コンピュータビジョン 88－5－3
アルゴリズム 38－8－3
（1994．3．18）

アルゴリズムの新展開とその画像処理への応用

今井 浩
東京大学大学院理学系研究科情報科学専攻

1 アルゴリズムと画像処理

画像処理では種々のアルゴリズムが用いられる．アルゴリズムの観点からみたその特徴としては，大量データを高速に処理することの必要性，さらに認識まで一歩進めると学習の絡む非常に幅広い分野に渡ること，などが考えられる．もちろん，この「特徴抽出」はたった2つの面に着目したものであるが，このような特徴に着目した時，アルゴリズムおよびその基礎論の分野は，一体どのような点で画像処理に貢献できる成果を上げることができるのだろうか．

その第1点として，とにかくアルゴリズムを高速化することが上げられる．高速化は，多くの場合，より大量のデータの処理を可能にする点でも重要である．このとき，個々の画像処理の問題に対してそれぞれ効率のよいアルゴリズムを開発することも非常に大切であるが，一方でアルゴリズム設計のパラダイムのレベルでの貢献を行なうことも重要である．というのも，パラダイムは抽象的な扱いができるレベルでこそ考えることができるからである．このようなパラダイムの1つとして，従前からあったものの，最近幾何的問題でその有用性が広く深く示されている randomization（確率的挙動をアルゴリズムの中に持ち込む手法）がある．本稿では，色量子化でのクラスタリング問題に関連した確率的アルゴリズム [2] について，そのアルゴリズムを評価するのに関連したもので，次の第2点と深く関わる点について述べる．

その第2点として，学習関連のアルゴリズムとして，上のことに絡んで，計算論的学習理論 (Computational Learning Theory) の中のパラダイムである PAC 学習 [1, 3] についても述べる．これはたとえば，画像処理での認識に関する研究分野で従来統計・確率の観点からのアプローチがあったものの上に，所与の学習精度を達成するのに必要な例数とか，学習アルゴリズムの計算量とかの「複雑度」の概念を加えたものともいえ，上記の randomization に密接に関係する．

本稿ではこれらの点に着目し，アルゴリズムの新展開がいかに画像処理の問題に係われるかを見ていく．

2 PAC 学習

例からの学習に関する計算論的学習理論は，論理式の学習方法などに関するものから始まった (Valiant [3])．Blumer, Ehrenfeucht, Haussler, Warmuth [1] は，Valiant の学習概念を拡張し，幾何概念を学習する枠組みを提案している．対象を幾何概念とすると，幾何に関連して得られている様々な成果を背景とすることにより，広範囲に渡る議論を展開することができ，画像処理において元々ある幾何構造を直接用いる他にも色々な適用を図ることができる．

この枠組では，学習の対象は d 次元ユークリッド空間 E^d での領域で，これを学習すべき概念（幾何概念）とする．C を幾何概念の集合（領域の集合）とする．C の1つの要素（領域）に関して，ある固定された確率分布 P に従う m 点に対して，それぞれの点が領域に含まれている（正例）か含まれていない（負例）かを教えられた時，領域をできるだけ正確に推定することを考える．正確さの尺度（誤差）を予測された領域と元の領域の対称差の確率とすると，

(1) C のどのような概念に対しても，十分大きな m に対しては，任意の小ささの誤差を高い確率で達成できること，

(2) さらに，m に関する下限が誤差の確率の逆数の多項式であり，推定が多項式時間でできること

の2点が望まれる．(1) が達成できる概念のクラスを PAC 学習可能であるという．ここで，PAC は Probably Approximately Correct の略である．条件 (1) は C の任意の要素に対して，小さな ϵ, δ に対して確率高々 δ で誤差 ϵ 以上になることを意味する．以下，条件 (1) に関するものだけ述べる．

まず，幾何概念の学習の簡単な例について述べる．概念クラス C が，平面 E^2 上の長方形（辺が座標軸に水平なものとする）の集合であるとし，P を E^2 上の任意の分布とする．C の要素 c（長方形）を学習する簡単なアルゴリズムは，P に従って発生されたサンプル点に対して，c の中に含まれている点（正例）の x, y 座標の各最小，最大値を求めておくことである．この4つの極値を l', r', b', t' とする．そして，全てのサンプル点を処理したのち，$[l', r'] \times [b', t']$ の長方形を推定とする．もし，正例となるサンプル点がなかったら，空の長方形を答える．この簡単なアルゴリズムに関して，次の定理が成り立つ．

定理 1: この長方形概念学習アルゴリズムは，概念クラス C に対するサンプル数 $\frac{4}{\epsilon}\ln\frac{4}{\delta}$ の PAC 学習可能アルゴリズムである．□

証明はわりと簡単であり，またそれをより高次元まで拡張することも可能である．しかし，この簡単なアルゴリズムとその証明を，円，半平面，任意の方向の長方形などの学習に拡張するのは自明ではない．一般化するには，次の VC 次元 [4] が有用である．E^d での概念クラス C と有限点集合 S に対して，C のある要素と S との共通部分であるような S の部分集合全体からなる集合が S の部分集合全体と一致する時，S は C により細分されるという．このとき，C の **VC 次元**を，どのような $d'+1$ 点の集合 S も C により細分できないような最小の d' と定める．もしそのような d' が存在しなければ，C の VC 次元は無限大である．

たとえば，E^d の超平面で定められる半空間の集合の次元は $d+1$ である．この VC 次元を用いて，主定理は次のように述べられる．

定理 2: ある緩い仮定の下で，C が PAC 学習可能であるための必要十分条件は，C の VC 次元が有限であることである．さらに，C の VC 次元を d' としたとき，サンプル数 $m(\epsilon,\delta)=\max\{\frac{4}{\epsilon}\log\frac{2}{\delta}, \frac{8d'}{\epsilon}\log\frac{8}{\epsilon}\}$ で少なくとも $1-\delta$ の確率で ϵ 未満の誤差を達成する PAC 学習アルゴリズムが存在する． □

この定理は，学習可能性と不可能性の間に大きなギャップがあることを示しており，$O(\frac{1}{\epsilon}\log\frac{1}{\epsilon\delta})$ のサンプル数で学習可能であるか，そうでなければ全く学習可能でないかのどちらかだといっている．この枠組で実際に学習を行なアルゴリズムは，確率的挙動をアルゴリズムの中に含むアルゴリズムとも相性がよく，種々の技法が開発されている．

3 k-Voronoi 空間

画像認識のアルゴリズムで，最近点探索に基づくものがある．その学習複雑度を上の枠組の中で考えることができる．まず，Voronoi 図の定義からしよう．d 次元の点 $q_j=(\mu_j)$ $(j=1,\ldots,k)$ に対して，点 q_j の Voronoi 領域 $\mathrm{Vor}(q_j)$ を

$$\mathrm{Vor}(q_j)=\bigcap_{l=1}^{k}\{\, p=(x) \mid \|x-\mu_j\|^2 \le \|x-\mu_l\|^2 \,\}$$

によって定める．ここで，$\|\cdot\|$ は L_2 ノルムである．$\mathrm{Vor}(q_j)$ $(j=1,\ldots,k)$ 全体は空間を分割し，それを Voronoi 図と呼ぶ．

同じ空間に n 個の点 $p_i=(x_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ からなる点集合 S が与えられた時，q_j $(j=1,\ldots,k)$ を配置すると，点集合 S を最も近い q_j の点によって分割することができる．これは，点集合 S を k 点から生成される Voronoi 図で分割したものである．そこで，この分割を Voronoi 分割とよび，この空間を k-Voronoi 空間と呼ぶ．この構造は，画像処理の学習アルゴリズムでよく使われる，最近点探索に対応する．

d 次元内の n 点が与えられた時，k 点を動かすことによってどれだけ異なる Voronoi 分割を生成できるかというのは，k-Voronoi 空間の VC 次元を評価することに対応する．ここでは VC 次元を直接評価するのではなく，異なる Voronoi 分割の数（k-Voronoi 空間の主細分関数という）を評価することについて述べる．この問題は，μ_j $(j=1,\ldots,k)$ を並べて $(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_k)$ よりなる dk 次元の空間を考え，その空間において各 μ_{j_1} と μ_{j_2} の対と各点 x_i に対して，$\|x_i-\mu_{j_1}\|^2-\|x_i-\mu_{j_2}\|^2=0$（ここで，$x_i$ は定数ベクトルとみなされる）という超曲面を考え，この超曲面の集合によってこの dk 次元空間がどれだけのセルに分割されるかを評価しすることによって解析でき，次の定理が得られる [2].

定理 3: d 次元の n 点を識別する k-Voronoi 空間の主細分関数は，$O(n^{dk})$ である． □

このような最近点探索手法は，色量子化などで現れる次のようなクラスタリング問題に代表される識別学習で有用である．k クラスタリング問題とは，d 次元の n 点 $p_i=(x_i)$ の集合 S に対して，S を $S_1,\ldots,S_k$ の k 個の部分集合に分け，そのとき

$$\sum_{p_i\in S_j}\|x_i-\bar{x}(S_j)\|^2$$

を最小にするようなクラスタリングを求める問題である．ここで，$\bar{x}(S_j)$ は S_j の重心である．

上の主細分関数を用いることにより，確率的挙動を示す学習アルゴリズムでこの概念を学習しようとした時の例の数を評価することができ，またこれによって実際的に高速なアルゴリズムを構成することができる [2]. 考えとしては，ランダム抽出により，部分から全体のことを大体うかがえるというもので，調べる対象が部分となってサイズが小さくなるとアルゴリズムの方でできる範囲がぐっと広がるというものである．このような考え方は，最近のアルゴリズム論の中で有用性が広く示されているもので，この問題でも成功をおさめている．

参考文献

[1] A. Blumer, A. Ehrenfeucht, D. Haussler and M. Warmuth: Classifying Learnable Geometric Concepts with the Vapnik-Chervonenkis Dimension. *J. ACM*, Vol.36 (1989), pp.929–965.

[2] M. Inaba, N. Katoh and H. Imai: Randomized Algorithms for Variance-Based k-Clustreing. *Proc. 10th ACM Symp. on Computational Geometry*, 1994, to appear.

[3] L. G. Valiant: A Theory of the Learnable. *Comm. ACM*, Vol.27, No.11 (1984), pp.1134–1142.

[4] V. N. Vapnik and A. Ya. Chervonenkis: On the Uniform Convergence of Relative Frequencies of Events to Their Probabilities. *Theory of Prob. and Its Appl.*, Vol.16, No.2 (1971), pp.264–280.