コンピュータビジョン 88－5－2
アルゴリズム 38－8－2
（1994. 3. 18）

代数的手法によるビジョンシステムの構築について

出口 光一郎
東京大学 工学部 計数工学科

概要： ビジョンシステムにおける幾何学的拘束を代数的な定理証明手法によって整理し、形状復元のアルゴリズムを構築する枠組を述べる

1 形状の復元には何が必要かを形式的な手段でアルゴリズムへ結び付ける

本稿では、機械的な定理自動証明手法を用いて、列挙された対象および光学系の幾何学的拘束より投影画像から三次元形状を認識するためのアルゴリズムを形式的に導く枠組みについて述べる。

画像から何を読みとるかによってそれをXとし、Xから形状を復元する手法を一般に Shape from X と呼んでいる。Shape from X においては、うまいXをどう見つけるかが第一義であり、その上でそれをもとにした巧妙なアルゴリズムによって形状の再現を試みている。しかし、一つの画像内でも場所ごとに読みとれる特徴Xはそれぞれ異なる。あるXとそのXに特化した Shape from X のアルゴリズムの開発だけでは、総合的な認識には至れない。

これを克服するためには、コンピュータビジョンにおいては、どのような画像特徴が読みとれればどのような形状が再現できるのかを整理することが必要なのであるが、それらの間の幾何学的な拘束関係が入り組んでいて、容易にはできないでいた。ここでは、このような問題、すなわち画像から何が読みとれたとき、どんな形状が再現できるのか、どのような拘束関係が導けるのか、逆にある拘束を導くためには、あと何を読み取らねばならないかという問いに形式的な手段で答えを出す手法について論じる。

ここでの手法のあらましは次のようなものである。既に得られている形状特徴の情報をまず仮定として列挙する。続いて、何が知りたいのかに関する記述を作る。前者の仮定の下で後者が導けるとする命題を作る。これが誘導可能なものでれば、この命題は定理と成り得る。そこで、定理証明手法によってこの命題の成立性を判断する [2,3]。本稿では、Wu による幾何学的な定理を解析的に表現して自動証明をする手法を応用する。

Wu の定理証明手法のコンピュータビジョンへの応用の可能性については、[1] の提案があるが、ここでは、定理が成り立たない場合に Wu の手法が副産物として形式的に出力する、与えられた命題が定理として成り立つための付加的な条件を積極的に利用し、幾何学的な特徴間の新たな拘束関係を導いていく。

2 Wu の自動定理証明手法とその応用

2.1 幾何学的拘束の代数表現

まず対象の配置とその光学的な投影による幾何学的な量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の間の拘束関係を解析的な多項式として書き下し列挙する。次に、これらの多項式を「仮定」と「結論」の二組に分ける。普通は、結論としては列挙した多項式の内の一つを取り出す。すなわち、「仮定」集合 $H = \{h_1, h_2, \cdots, h_n\}$ （以下、多項式 h と多項方程式 $h = 0$ とを区別せずに用いる）と「結論」 C とを得る。

Wu の定理証明手法は、仮定集合 $H = \{h_1, h_2, \cdots, h_n\}$ から結論 C が導けるかを機械的に判定するものである。このことは、言い換えると多項方程式 $h_1, h_2, \cdots, h_n$ の共通根が C の根でもあることを判定する [3]。これが成り立たないとき、Wu の手法は $H \cap \{R\}$ の共通根が C の根でもあるような多項式 R を副産物として示す。この多項式 R は結果として H を構成する幾何学的な記述・拘束条件と C が記述する幾何学的な計量とを結びつける新しい関係式となる。

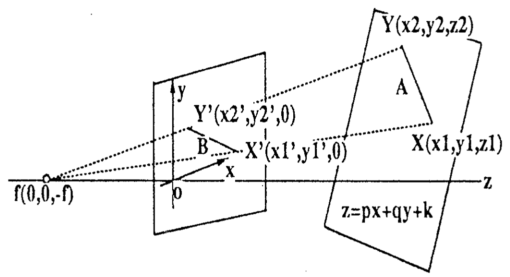

図 1: A relation of lengths in 3-D space and its projected image plane.

例えば、図 1 に示すように、空間の平面 $z = px+qy+k$ 上に 2 点 $X(x_1, y_1, z_1), Y(x_2, y_2, z_2)$ があり、それらが画像平面 $z = 0$ 上 $X'(x'_1, y'_1, 0), Y'(x'_2, y'_2, 0)$ にそれぞれ投影されているとする。これらの関係を列挙すると、f を焦点距離として、

$$
\begin{aligned}
fx_1 - (f + z_1)x'_1 &= 0 && (1)\\
fy_1 - (f + z_1)y'_1 &= 0 && (2)\\
fx_2 - (f + z_2)x'_2 &= 0 && (3)\\
fy_2 - (f + z_2)y'_2 &= 0 && (4)\\
z_1 - px_1 - qy_1 - k &= 0 && (5)\\
z_2 - px_2 - qy_2 - k &= 0 && (6)
\end{aligned}
$$

画像上の 2 点 XY 間の距離を B とすると、例えば

$$- x'_1 + x'_2 - B\cos\phi = 0 \qquad \left(\tan\phi = \frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1}\right) \quad (7)$$

である。これらの多項式群を仮定集合 H としよう。

このとき空間での X, Y の距離を A とすると、

$$A^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0 \quad (8)$$

このA が他の変数によってどのように表現されるか、すなわち、画像上の2点間の距離 B を読みとって、その空間での距離を復元するには、これらの変数のうちあとどれが分からなくてはならないか、そしてどのようなアルゴリズムが構成されるかが今の課題であるとする。

そこで、(8) を結論式として、「(1) ~ (7) という仮定のもとで (8) が成立する。」という命題が定理として成立するかを Wu の手法で判定する。

2.2 疑似割算による三角形化

Wu の手法の基本をなしているのが、多項式の疑似割算である [1,4]。多項式 $s = a_p x^p + \cdots + a_1 x^1 + a_0$ を多項式 $t = b_q x^q + \cdots + b_1 x^1 + b_0$ で変数 x に関して疑似割算するとは t の x に関する最高次の係数 b_q(x 以外の変数の多項式である) の k 乗を s にかけて t で割算することである。その結果得られる余りは変数 x を含まず、また普通の割算と違って分数式でない。

そこで、変数 $x_1, x_2, \cdots$ をある順序で選んで次々に x_i を x_i' と置き換えながらこの疑似割算を用いていくことで、仮定式集合 H を次のように集合 H' へ「三角形化」することができる [3]。

$$
\begin{aligned}
h_1'(x_1', x_2', x_3', \cdots, x_l', x_{l+1}, \cdots, x_n) &= 0 \\
h_2'(x_2', x_3', \cdots, x_l', x_{l+1}, \cdots, x_n) &= 0 \\
h_3'(x_3', \cdots, x_l', x_{l+1}, \cdots, x_n) &= 0 \\
&\vdots \\
h_l'(x_l', x_{l+1}, \cdots, x_n) &= 0
\end{aligned}
$$

仮定式集合の三角形化のため選ばれる変数 $x_1', \cdots, x_l'$ を従属変数、変数 $x_{l+1}, \cdots, x_n$ を独立変数と呼ぶ。従属変数は全順序 $x_1' > x_2' > x_3' > \cdots > x_l'$ を持つことになる。

2.3 結論式の誘導可能性判断

Wu の手法 (Wu の定理) では前述の多項式の命題の真偽性を次のように判定する。

「結論式 C を、三角形化された多項式 $h_1', h_2', \cdots, h_l'$ の順序を維持しながら変数 $x_1', x_2', \cdots, x_l'$ の全順序に従って次々に疑似割算し、最後の疑似余りが 0 であれば命題は真、0 でなければ命題は偽である。」

すなわち、まず、結論式 C を h_1' で変数 x_1' に関して疑似割算する。この疑似余りを r_1 とする。r_1 は、x_1' を含まない。r_1 を h_2' で変数 x_2' に関して疑似割算して得られる疑似余りを r_2 とする。このような過程を h_l' まで繰り返して得られる最後の疑似余りを r_l とする。r_l は、従属変数 $x_1', x_2', \cdots, x_l'$ を含まない。この最後の疑似余り r_l が 0 であれば結論式は仮定式集合から誘導できる。このとき命題は真である。もし、疑似余りが 0 でなければ命題は偽である。

ただし、ここで注目すべきことは、疑似余り r_l が恒等的に 0 ではないとき、$r_l = 0$ は独立変数 $x_{l+1}, \cdots, x_n$ のみを含み、定理が成立するためにあと必要な条件そのものであることである。

2.4 新しい拘束式の導出

先の例に上記の過程を当てはめてみる。ここで、変数の順序を、$x_1 > y_1 > x_2 > y_2 > z_1 > z_2 > x_1'$ とする。得られた最後の疑似余りを整理すると、

$$
A = \frac{|f+k|}{|M_1 M_2|}\sqrt{UV} \tag{9}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
M_i &= f - p x_i' - q y_i' \\
U &= \begin{pmatrix} U_2 V_f \\ 2(y_1' - y_2') U_1 V_f \\ (y_1' - y_2')^2 U_0 V_f \end{pmatrix}^t \\
U_2 &= (1 + p^2 \quad -2 q y_2' \quad (p^2 + q^2) y_2^2) \\
U_1 &= (pq \quad p y_2' + q x_2' \quad -(p^2 + q^2) x_2' y_2') \\
U_0 &= (1 + q^2 \quad -2 p x_2' \quad (p^2 + q^2) {x_2'}^2) \\
V &= \begin{pmatrix} B^2 \cos^2\phi \\ B\cos\phi \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V_f = \begin{pmatrix} f^2 \\ f \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

また、例えば空間中にある平面の方程式が未知で、仮定集合としては $H = \{(1), (2), (3), (4), (7)\}$ が与えられているとすると、

$$
A = \sqrt{\frac{(F_1^2 \quad 2 x_2' F_1 Z_{21} \quad M V_f) V}{f^2}} \tag{10}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
M &= \begin{pmatrix} Y_{21}^2 + Z_{21}^2 \\ 2 Y_{21} Y Z_{21} \\ x_2^2 Z_{21}^2 + Y Z_{21}^2 \end{pmatrix}^t \\
F_i &= f + z_i \qquad Z_{ij} = z_i - z_j \\
Y_{ij} &= y_i' - y_j' \qquad Y Z_{ij} = y_i' z_i - y_j' z_j
\end{aligned}
$$

3 おわりに

コンピュータビジョンで対象の形状を認識する過程は、ある総合的な処理過程でなくてはならない。一つの物体の形状を認識するのにもいろいろな手がかりとそれら相互の拘束関係を多面的に解きほごしていく必要がある。さらに、一つの対象の部分、部分においても何が既知かという条件は異なるので、これらを絡み合わせて利用すべきである。そのためには、いろいろな条件に応じた関係式を用意しておかなくてはならないし、また、重要なことは、どのような条件下では、何を元にしてどのような関係が導けるのかを形式的にまた柔軟に判定できるシステムが必要である。ここで示した枠組みはこのような可能性を持っている。さらに、幾何学的な関係が代数的に与えられるので、それらを統合していく条件を明確に与え得る。

Reference

[1] D.Kapur and J.L.Mundy, " Wu's method and Its Application to Perspective Viewing",*Artificial Intelligence*, 37, pp. 15-36, 1988.

[2] D. Kapur,"A Refutational Approach to Geometry Theorem Proving", *Artificial Intelligence*, 37, pp.61-93, 1988.

[3] K.Koh, K. Deguchi, and I.Morishita, "Reconstruction of Polyhedra by a Mechanical Theorem Proving Method",*Trans. IEICE*, E76-D-4, pp.437-445, 1993.