アルゴリズム 39−6
（1994．5．13）

点集合の移動に関する最短経路問題について

吉田健　安留誠吾　都倉信樹

大阪大学基礎工学部情報工学科

本稿では, 移動する物体として k個の点からなる点集合を定義し, 水平, 垂直線分からなる n 個の長方形の障害物が存在する平面における最短経路問題について考察する. 点集合とは, お互いの間の相対位置が移動中もつねに等しいものとする.

本稿では, 1点の最短経路を $T(n)$ 時間 $S(n)$ 領域で求めるアルゴリズムが存在すれば, k個の点からなる点集合と水平, 垂直な辺からなる n 個の長方形の障害物の集合と任意の2点 s, t が与えられたとき, s, t をそれぞれ始点, 終点とする点集合の最短経路を $O(max(nk\log(nk), T(nk)))$ 時間, $O(max(nk\log(nk), S(nk)))$ 領域で求めるアルゴリズムを提案する.

さらに L_1距離のもとでの点集合の最短経路を $O(nk\log^2(nk))$ 時間, $O(nk\log(nk))$ 領域で, ユークリッド距離のもとでの点集合の最短経路を $O(n^2k^2)$ 時間, $O(n^2k^2)$ 領域で求めることができることを示す.

Shortest paths for a set of points

Ken Yoshida　Seigo Yasutome　Nobuki Tokura

Dept. of Information & Computer Sciences,
Faculty of Engineering Science, Osaka Univ.

In this paper, we define a set of k points as a moving object, and consider the problem of finding the shortest paths among n iso-oriented rectangles in the plane. A set of points consists of k points and thier relative location is preservated in the motion.

In this paper, we present an algorithm which solve the problem of finding the shortest paths for a set of points. If there is an algorithm which solve the problem of finding the shortest paths for a point in $T(n)$ time and $S(n)$ space, and a set of k points, n iso-oriented rectangles, source point s,and target point t are given, our algorithm find the sortest paths for a set of k points between s and t in $O(max(nklog(nk), T(nk)))$ time, $O(max(nklog(nk), S(nk)))$ space.

Furthermore, we present L_1 shortest paths for a set of points can be found in $O(nk\log^2(nk))$ time and $O(nk\log(nk))$ space, and Euclidean shortest paths in $O(n^2k^2)$ time and space.

1　はじめに

最短経路問題は, 計算幾何学における基本的な問題であり, その応用としてロボットの移動問題, VLSI の配線の設計, 幾何学的最適化問題などがある. 最短経路問題では点を移動させてその最短経路を求めるものがもっともよく研究されており, 他には円, 線分, 多角形などについての研究がなされている[1],[2],[3].

障害物の形状については水平, 垂直な辺からなる長方形, 単純多角形などについて研究されている[4],[5].

また, 距離についても L_1距離のもとでの点の最短経路問題を扱った文献 [4], ユークリッド距離のもとでの点の最短経路問題を扱った文献 [6] などがある.

本稿では, 移動する物体として k個の点からなる点集合を定義し, 水平, 垂直線分からなる n 個の長方形の障害物が存在する平面上における最短経路問題を考える. 点集合は k個の点からなり, お互いの間の相対位置が移動中もつねに等しい. 点集合の最短経路問題は, 例えば次のようなロボットの最短経路問題に応用できる.

- いくつかの支持脚によって移動する.
- 支持脚は障害物を横切れない.
- 本体は障害物の上を通ることができる.

本稿では, 点集合の最短経路問題を障害物を平行移動してその合併を求めることによって, 1 点の最短経路問題に帰着して解く. 障害物を平行移動して合併を求める際に, n 個の長方形の合併は $O(n^2)$ 本の辺を含む多角形の集合になる. この多角形の集合を入力とし 1 点の最短経路問題を適用したのでは効率が悪い. そこで 1 点の最短経路問題を解くために必要な辺だけを求めることにした.

点集合の最短経路問題の距離の定義は最後に帰着する 1 点の最短経路を求めるアルゴリズムに依存している. ある距離尺度のもとで $T(n)$ 時間, $S(n)$ 領域で 1 点の最短経路を求めるアルゴリズムが存在するとき, そのアルゴリズムを適用することにより水平, 垂直線分からなる n 個の長方形の障害物が存在する平面上における k個の点からなる点集合の最短経路を $O(max(nk\log(nk), T(nk)))$ 時間, $O(max(nk\log(nk), S(nk)))$ 領域で求めるアルゴリズムを提案する.

さらに L_1距離のもとでの点集合の最短経路を $O(nk\log^2(nk))$ 時間, $O(nk\log(nk))$ 領域で, ユークリッド距離のもとでの点集合の最短経路を $O(n^2k^2)$ 時間, $O(n^2k^2)$ 領域で求めることができることを示す.

2　諸定義

本稿では, 直行座標系を用いて議論する. つまり, 頂点を $p_i = (x_i, y_i)$ で表し, 点 p_1, p_2を端点とする線分を$\overline{p_1p_2}$で表す.

定義 1 本稿で扱う障害物を次のように定義する. 4 点 $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_1), c = (x_1, y_2), d = (x_2, y_2)$ があって, $x_1 < x_2, y_1 < y_2$をみたすとき,

- 4 点 a, b, c, d によって定義される長方形領域

  $$\{(x,y)|x_1 \le x \le x_2, y_1 \le y \le y_2\}$$

  を障害物と呼び $R(a, b, c, d)$ で表す.

- 領域

  $$\{(x,y)|x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2\}$$

  を障害物 $R(a, b, c, d)$ の内部と呼ぶ.

- 線分$\overline{ab}, \overline{bd}, \overline{cd}, \overline{ac}$ を障害物 $R(a, b, c, d)$ の辺と呼ぶ. 障害物の辺上の点の集合を障害物の境界と呼ぶ.

□

定義 2 有限個の点の系列 $p_1, p_2, ..., p_u$に関して $p_i, p_{i+1} (i = 1, ..., u-1)$ の間を線分で連結した

ものを経路といい, $P = p_1, p_2, ..., p_u$で表す. そして, 点p_1, p_uをそれぞれ経路Pの始点, 終点と呼ぶ.

経路の長さは2点間の距離をどのように定義するかで異なる. いま2点p, p'間の距離を$d(p, p')$で表すことにすると,

$$経路\ Pの長さ = \sum_{i=1}^{u-1} d(p_i, p_{i+1})$$

と定義する. □

定義 3 $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_1), c = (x_1, y_2), d = (x_2, y_2)$によって定義される障害物$R$とベクトル$\vec{v} = (v_x, v_y)$が与えられた時, Rの$\vec{v}$による平行移動によって得られる障害物R'とは$a' = (x_1 + v_x, y_1 + v_y), b' = (x_2 + v_x, y_1 + v_y), c' = (x_1 + v_x, y_2 + v_y), d' = (x_2 + v_x, y_2 + v_y)$によって定義される障害物である. このとき

$$R' = R + \vec{v}$$

と書く.

また, R'がRの$-\vec{v}$による平行移動で得られるとき,

$$R' = R - \vec{v}$$

と書く. □

定義 4 平面上の任意の点をp_1, k個のベクトルを$\vec{v_1}, ..., \vec{v_k}$とする. このとき点集合$S$を次のように定義する.

$$S = \{p_i | p_i = p_1 + \vec{v_i}, i = 1, ..., k\}$$

このとき点p_1をSの基準点と呼ぶ. ただし$\vec{v_1} = (0, 0)$とする. 図1に点集合の例を示す. □

定義 5 点p_1とベクトル$\vec{v_1}, ..., \vec{v_k}$によって定義された点集合を$S = \{p_1, p_2, ..., p_k\}$とする. 基準点$p_1$に対して任意の2点$a$, bが与えられ, p_1がaを始点としbを終点とする経路P上を移動するとき, 基準点以外の点集合の要素$p_i (2 \leq i \leq k)$も移動し, 移動中もつねに$p_i = p_1 + \vec{v_i}$が成り立つものとする. このときPをaを始点としbを終点とする点集合Sの経路と定義する. □

定義 6 点p_1とベクトル$\vec{v_1}, ..., \vec{v_k}$によって定義された点集合$S = \{p_1, p_2, ..., p_k\}$が与えられたとき, Sの経路Pが存在し, P上の任意の点pにおいて, 点$p + \vec{v_i} (1 \leq i \leq k)$が障害物の内部にないとき$P$を点集合の実行可能な経路と呼ぶ. また, 点集合の経路Pは実行可能であるという. □

定義 7 点集合の実行可能な経路のうち経路の長さが最短の経路を, 点集合の最短経路と定義する. □

定義 8 点集合の最短経路問題とは, n個の障害物が存在する平面において点p_1とベクトル$\vec{v_1}, ..., \vec{v_k}$による点集合$S = \{p_1, p_2, ..., p_k\}$と始点$s$, 終点$t$が与えられたとき, s, tをそれぞれ始点, 終点とする点集合の最短経路を求める問題である. □

ここで, 議論を簡単化するため次の仮定を設ける.

仮定 1 点集合$S = \{p_1, ..., p_k\}$の最短経路問題において, 点集合の基準点p_1が, 与えられた始点もしくは終点の位置にあるとき, 点集合の要素の任意の点$p_i (1 \leq i \leq k)$について, 点p_iは障害物の内部には存在しない. □

仮定1が成り立たない場合, すなわち, 与えられた始点, 終点において, 点集合のある要素が障害物の内部にある場合は, 最短経路が存在しない場合である. これは, 点集合の各点について長方形の障害物の内部にあるかどうか調べるという単純な方法でも, $O(nk)$時間で判定できる. よって, この仮定を設けない場合でも, 点集合と障害物が与えられたときに$O(nk)$時間で判定すれば, 以下の議論の一般性が失われることはない.

定義 9 単純多角形の障害物が存在する単純多角形の領域, もしくは開平面で, 始点sと終点tが与えられているとする. このときsを始点とし, tを終点とする経路Pについて,

- P上のどの点も障害物の内部にない時, Pを *1* 点の実行可能な経路と呼ぶ.

- 実行可能な経路のうち経路の長さが最短の経路を *1* 点の最短経路と呼ぶ.

1 点の最短経路問題とは s を始点とし t を終点とする最短経路を求める問題である. □

3 点集合の最短経路問題

前章で定義した点集合の最短経路問題を 1 点の最短経路問題に帰着して解くことを考える.

定義 10 障害物 $R_1, ..., R_n$ の合併 Cを次のように定義する.

$$\text{障害物の合併 } C = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$$

すなわち, 各障害物を平面上の集合と考えたときの和集合である.

障害物の合併 Cにおいて, もとのある障害物 R_i の内部であったような点の集合を内部といい, 内部以外の障害物 R_iの境界を合併 Cの境界という. 境界を辺の系列として表現したものを輪郭という. □

定義 11 障害物の合併の内部でない点の集合は有限個の領域からなる. このような領域のうち, その境界に, あたえられた障害物の辺の端点をすくなくとも *1* つ含む領域を自明でない領域 (*nontrivial region*) と呼び, それ以外の領域を自明な領域 (*trivial region*) と呼ぶ. □

定義 12 自明でない領域の輪郭を自明でない輪郭 (*nontrivial contour*) と呼ぶ. 図 *2*の太線の部分が障害物の合併の自明でない輪郭である. □

3.1 方針

まず, 点集合の経路の特徴を示す.

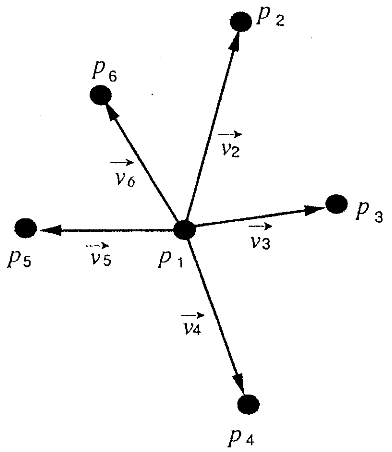

図 1: 点集合 S

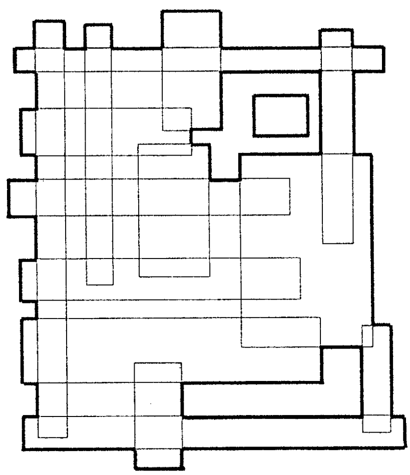

図 2: 障害物の合併の自明でない輪郭

補題 1 点 p_1とベクトル$\vec{v_1},...,\vec{v_k}$で定義された点集合 Sと, n 個の長方形の障害物の集合 O_1 と任意の *2* 点 s,t が与えられているとき, 点集合の最短経路を求める問題を P_1とする. このとき, 集合 O_1の各障害物をベクトル$-\vec{v_i}$によって平行移動した障害物の集合を $O_i(i=2,...,k)$ とし, $O=O_1\cup...\cup O_k$とする.

ここでOの要素の合併Cを障害物の集合とし, s,t をそれぞれ始点, 終点とする *1* 点の最短経路を求める問題を P_2とする.

ここで問題 P_1における点集合の経路に対して, 問題 P_2の同じ経路を対応づける.

このとき,

(1) 問題 P_1で点集合の実行可能な経路が存在すれば, 対応する問題 P_2の経路も *1* 点の実行可能な経路であり, 逆も成り立つ.

(2) 問題 P_2での *1* 点の最短経路に対応する問題 P_1の経路は問題 P_1での点集合の最短経路である.

[証明]

(1) まず問題 P_1における点集合の経路が実行可能でなければ対応する問題 P_2における対応する 1 点の経路も実行可能でないことを示す.

問題 P_1における点集合の経路が実行可能でない時, 定義より経路上のある点pにおいて, ある$i(1\le i\le k)$があって, 点 $p+\vec{v_i}$が O_1に含まれる障害物の内部にある. この点$p+\vec{v_i}$を含んでいる障害物をRとし, $R'=R-\vec{v}$とすると, 点 $p+\vec{v_i}$が Rの内部の点であることから点pはR' の内部にある. 問題 P_2において$R'\in O$であるので, 点pはOに含まれる障害物の内部である. よって, P_2における対応する 1 点の経路も実行可能ではない.

次に逆を示す.

問題P_2における 1 点の経路が実行可能でないとすると, 経路上のある点pがあって点pはOに含まれる障害物の内部である. このときある$i,1\le i\le k$があってpはO_iの要素である障害物の内部である. この障害物をRとし, $R'=R+\vec{v_i}$ とすると, $R'\in O_1$である. よってR'は問題 P_1における障害物であり, 点 $p+\vec{v_i}$は R'の内部なので問題 P_1における対応する点集合の経路も実行可能でない.

(2) 問題 P_1における経路と問題 P_2における経路は同じものを対応させているので, 対応する経路の長さは等しい. いま, 問題 P_2における最短経路を Pとし, Pに対応する問題 P_1の経路が最短経路ではないと仮定する. このとき問題 P_1において,

$$P\text{の長さ} > P'\text{の長さ}$$

であるような実行可能な経路 P'が存在する. P'に対応する問題 P_2における経路は (1) より実行可能である. これは Pが最短経路であるという仮定に矛盾する. よって問題 P_2での最短経路に対応する問題 P_1の経路は問題 P_1での最短経路である. □

補題 1から, 点集合の最短経路問題を点の最短経路問題に帰着して解けることがわかる. すなわち, 次のような手順が考えられる.

- 障害物の集合 O_iの各要素を平行移動しそれらの合併を求める.
- 始点, 終点が存在する領域を求める. 始点, 終点が同じ領域に含まれない場合, 実行可能な経路は存在しない.
- 得られた領域は内部に単純多角形の穴 (hole) を持つ単純多角形の領域, もしくは開平面である. この領域に対して 1 点の最短経路を求めるアルゴリズムを適用する.

図 3,4に点集合の最短経路問題が 1 点の最短経路問題に帰着される例を示す.

以下では上の方針に基づいて考察を進める.

3.2 障害物の合併を求める

n 個の長方形の障害物と k個のベクトルが与えられているとする. この時, n 個の障害物それぞれに対して k個のベクトルによる平行移動を求める. 結

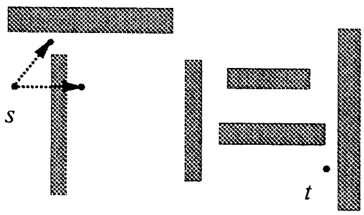

図 3: 点集合の最短経路問題の例

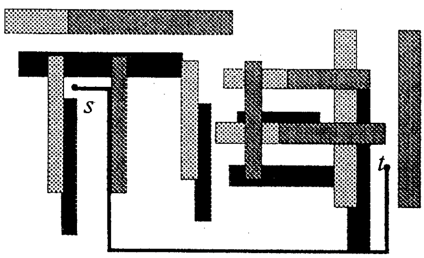

図 4: 1 点の最短経路問題に帰着

果としてnk個の長方形を $O(nk)$ 時間で求めることができる.

つぎに, 一般に n 個の長方形の合併の輪郭には $O(n^2)$ 本の辺が含まれことから nk個の長方形の合併の輪郭には $O(n^2k^2)$ 本の辺が含まれる. よって, 合併のすべての輪郭を求めると, 以後のステップではアルゴリズムの入力となる辺の数が $O(n^2k^2)$ になってしまい効率が悪い.

そこで最終的に必要なのは始点 s と終点 t を含む領域であり, 合併のすべての輪郭を求める必要はないので, nk個の長方形の合併の自明でない領域だけを求めることにする.

このとき次の補題が成り立つ.

補題 2 n 個の長方形の合併の自明でない領域を $O(n\log n)$ 時間, $O(n\log n)$ 領域で求めることができる.

また, 求めた自明でない領域の輪郭に含まれる辺の数は $O(n)$ 本である.

[証明]

文献 [7] では, n 個の長方形の合併の自明でない領域を $O(n\log n)$ 時間, $O(n\log n)$ 領域で求めるアルゴリズムが提示されている. また, 自明でない輪郭に含まれる辺の数は $O(n)$ であることが示されている. このアルゴリズムを適用することによって題意を得る. □

これを用いて nk個の長方形の合併の自明でない領域を $O(nk\log(nk))$ 時間, $O(nk\log(nk))$ 領域で求めることができる.

3.3 始点, 終点の位置決定

得られた自明でない領域のうち, 始点と終点が含まれている領域を見つける. このとき始点, 終点が異なる領域に含まれている場合は実行可能な経路は存在しない. また, 始点または終点が自明でない領域に含まれていない場合, 仮定 1から始点, 終点ともに障害物の内部には存在しないので, 自明な領域に含まれていることになる.

すでに自明でない輪郭が求まっていれば, 始点, 終点が自明な領域に含まれている場合はそれを検出して, その自明な領域を求めることができるので, ここでは自明でない領域が求まっていれば十分である.

補題 3 n 個の長方形の合併の自明でない領域が求まっているとき, $O(n\log n)$ 時間 $O(n\log n)$ 領域で前処理しておくことにより, 平面上の任意の *1* 点が与えられたとき, $O(\log n)$ 時間で与えられた点を含む領域を求めることができる.

[証明]

文献 [7] では, 得られた自明でない領域に対して $O(n\log n)$, $O(n\log n)$ 領域の前処理をしておくことにより, 1 回の質問あたり $O(\log n)$ 時間で点位置決定問題を解くアルゴリズムを提示している. ま

た, 質問点が自明でない領域に含まれない時には, その点を含む自明な領域を $O(\log n)$ 時間で求める. このアルゴリズムを用いることによって題意を得る. □

3.4 実行可能な経路の存在性

以上の議論から点集合を移動物体とするときに実行可能な経路が存在するかどうかを決定することができる.

定理 1 k個の点からなる点集合と n 個の水平, 垂直な辺からなる長方形の障害物と任意の *2* 点 s, t が与えられたとき, s, t をそれぞれ始点, 終点とする実行可能な経路が存在するかどうかを $O(nk\log(nk))$ 時間, $O(nk\log(nk))$ 領域で決定できる.

[証明]

点集合を $S = p_1, p_1, ..., p_k$とし, ベクトル $\vec{v_1}, ..., \vec{v_k}$によって与えられているものとする. また, 障害物の集合を O_1とする. O_1の各要素を$-\vec{v_i}$によって平行移動してできた集合を $O_i (i = 2, ..., k)$とし, $O = O_1 \cup ... \cup O_k$とする. 1つの長方形の平行移動は定数時間で求めることができるので, Oを $O(nk)$ 時間で求めることができる. また Oの要素数は nkである.

このとき, Oの要素の合併の自明でない輪郭を求め, 始点 s, 終点 t のそれぞれが含まれる領域を求める. 補題 2を用いると Oの要素数は nk個より, Oの要素の合併の自明でない輪郭を $O(nk\log(nk))$ 時間, $O(nk\log(nk))$ 領域で求めることができる.

つぎに補題 3より s, t の含まれる領域を $O(nk\log(nk))$ 時間, $O(nk\log(nk))$ 領域で求めることができる. このとき s, t が同じ領域に含まれていれば s, t をそれぞれ始点, 終点とする実行可能な経路が存在し, 同じ領域に含まれなければ実行可能な経路は存在しない.

以上より s, t をそれぞれ始点, 終点とする実行可能な経路が存在するかどうかを $O(nk\log(nk))$ 時間, $O(nk\log(nk))$ 領域で決定できる. □

3.5 点集合の最短経路

つぎに点集合の最短経路を求めることを考える.

定理 2 ある距離尺度のもとでの *1* 点の最短経路を $T(n)$ 時間, $S(n)$ 領域で求めるアルゴリズムが存在するとする. このとき k個の点からなる点集合と n 個の水平, 垂直な辺からなる長方形の障害物の集合と任意の *2* 点 s, t が与えられたとき, s, t をそれぞれ始点, 終点とする点集合の最短経路を $O(max(nk\log(nk), T(nk)))$ 時間, $O(max(nk\log(nk), S(nk)))$ 領域で求めることができる.

[証明]

k個の点からなる点集合と n 個の水平, 垂直な辺からなる長方形の障害物の集合と任意の 2 点 s, t が与えられたとき, 定理 1より s, t をそれぞれ始点, 終点とする実行可能な経路が存在するかどうかを $O(nk\log(nk))$ 時間, $O(nk\log(nk))$ 領域で決定し, また s, t が同じ領域に含まれるときはその領域を求めることができる. この領域にたいして s, t をそれぞれ始点, 終点とする 1 点の最短経路を求めるアルゴリズムを適用すると, 補題 1より求めた 1 点の最短経路は点集合の最短経路になっている. □

この定理に既存の 1 点の最短経路を求めるアルゴリズムを適用することによって直ちにつぎの定理が得られる.

定理 3 k個の点からなる点集合と n 個の水平, 垂直な辺からなる長方形の障害物の集合と任意の *2* 点 s, t が与えられたとき, s, t をそれぞれ始点, 終点とする L_1距離のもとでの点集合の最短経路を $O(nk\log^2(nk))$ 時間, $O(nk\log(nk))$ 領域で求めることができる.

また, ユークリッド距離のもとでの点集合の最短経路を $O(n^2k^2)$ 時間, $O(n^2k^2)$ 領域で求めることができる.

[証明]

文献 [4] では, 多角形の障害物が存在する平面での 2 点間の L_1 距離のもとでの最短経路を $O(n \log^2 n)$ 時間, $O(n \log n)$ 領域で求めるアルゴリズムが提示されている. また文献 [6] ではユークリッド距離のもとでの最短経路を $O(n^2 k^2)$ 時間, $O(n^2 k^2)$ 領域で求めるアルゴリズムが提示されている. これらを定理 2に適用することにより題意を得る. □

4 あとがき

本稿では, k個の要素よりなる点集合と水平, 垂直な線分よりなる n 個の長方形の障害物の集合と任意の 2 点 s,t が与えられた時, s を始点, t を終点とする実行可能な経路が存在するかどうかを $O(nk\log(nk))$ 時間, $O(nk\log(nk))$ 領域で決定するアルゴリズムを提案した. また 1 点の最短経路を $T(n)$ 時間 $S(n)$ 領域で求めるアルゴリズムが存在するとき, 点集合の最短経路を $O(max(nk\log(nk), T(nk)))$ 時間, $O(max(nk\log(nk), S(nk)))$ 領域で求めることができることを示した.

より具体的には L_1距離のもとでの点集合の最短経路を $O(nk\log^2(nk))$ 時間, $O(nk\log(nk))$ 領域で, ユークリッド距離のもとでの最短経路を $O(n^2k^2)$ 時間, $O(n^2k^2)$ 領域で求めることができることを示した.

今後の課題としては, 障害物の形状や距離の定義が異なる場合への適用や, ある条件のもとで点集合のうちの何点かが障害物を横切れる場合などが考えられる.

参考文献

[1] D. Leven and M. Sharir: "An efficient and simple motion-planning algorithm for a ladder moving in two-dimensional space amidst polygonal barriers", Proceedings of the fourth annual symposium on Computational Geometry, pp. 221–227 (1985).

[2] K. Kedem and M. Sharir: "An efficient algorithm for planning collision-free translational motion of a convex polygonal object in 2-dimensional space amidst polygonal obstacles", Proceedings of the first annual symposium on Computational Geometry, pp. 75–80 (1985).

[3] K. Kedem and M. Sharir: "An automatic motion planning system for a convex polygonal mobile robot in 2-dimentional space", Proceedings of the fourth annual symposium on Computational Geometry, pp. 329–340 (1988).

[4] J. S. B. Mitchell: "L_1 shortest paths among polygonal obstacles", Algorithmica, **1**, 8, pp. 55–88 (1992).

[5] P. J. de Rezende, D. T. Lee and Y. F. Wu: "Rectilinear shortest paths with rectangular Barriers", Proceedings of First Annual ACM Symposium on Computational Geometry (1985).

[6] J. Reif and J. A. Storer: "Shortest paths in euclidean space with polyhedral obstacles", Technical report, Comp. Sience Dept., Brandies University (1985).

[7] W. Lipski, Jr and F. P. Preparata: "Segments, rectangles, contours", Journal of Algorithms, **2**, 1, pp. 63–76 (1981).

[8] 安留, 増澤, 辻野, 都倉 : "障害物の重みを考慮した最短経路問題", 信学論 (D-I), **J76-D-I**, pp. 157–163 (1993-4).