

Butterfly networks の de Bruijn network 及び Kautz network への埋め込みについて

蓮沼 徹, 柴田幸夫

群馬大学 工学部 情報工学科

butterfly networks の de Bruijn network 及び Kautz network への部分グラフとしての埋め込みについて考察する。 r -dimensional k -ary の butterfly network、de Bruijn graph、Kautz graph をそれぞれ $b(k, r)$, $UB(k, r)$, $UK(k, r)$ で表すとする。 $UB(d, D)(UK(d, D))$ が $b(i, D-1)$, $i = 1, 2, \dots, d-1$ を頂点を共有しない形で含むことが示される。又、 $UB(d, D)(UK(d, D))$ が $kP(D-1, \lfloor \frac{d}{k} \rfloor - 1) + \lfloor \frac{d}{k} \rfloor^{D-1}(d \bmod k)$ 個の $b(k, D-1)$ に同型な部分グラフを頂点を共有しない形で含むことも示される。ここで、 $P(r, n) = \sum_{1 \leq i \leq n} i^r$ であり、実数 x に対して、 $\lfloor x \rfloor$ は x を越えない最大の整数を表す。

Embedding butterflies in de Bruijn and Kautz networks

Toru Hasunuma and Yukio Shibata

Department of Computer Science,
Gunma University
1-5-1 Tenjin-cho, Kiryu,
Gunma, 376 Japan

We investigate the embeddability of the butterflies in the de Bruijn and Kautz networks. Suppose $b(k, r)$, $UB(k, r)$ and $UK(k, r)$ denote the r -dimensional k -ary butterfly, de Bruijn graph and Kautz graph, respectively. Then it is proved that $UB(d, D)(UK(d, D))$ contains $b(i, D-1)$, $i = 1, 2, \dots, d-1$ in vertex-disjoint manner. Also it is shown that $UB(d, D)(UK(d, D))$ contains $kP(D-1, \lfloor \frac{d}{k} \rfloor - 1) + \lfloor \frac{d}{k} \rfloor^{D-1}(d \bmod k)$ vertex-disjoint copies of $b(k, D-1)$, where $P(r, n) = \sum_{1 \leq i \leq n} i^r$ and $\lfloor x \rfloor$ stands for the greatest integer not exceeding a real number x .

1 序論

hypercube は並列コンピュータのプロセッサのインターコネクションネットワークとしては、最もよく知られたものであるが、その欠点はサイズの増加と共に次数が増加してしまうことである。この欠点を解消し、しかも hypercube と同等の計算能力をもつものとして butterfly network や cube-connected-cycle 等が考案されている。(see [6]) 一方、hypercube の次の世代のインターコネクションネットワークとして、de Bruijn network や Kautz network が注目されている。その最大の理由は同じ次数、直径の下で de Bruijn network や Kautz network の方が hypercube よりもずっと多くの頂点をもつことである。又、de Bruijn network や Kautz network は次数が限定されており、連結度も最適であり、さらに簡単なルーティングアルゴリズムをもっている。(see [2])

ネットワークの埋め込みは通常、包含の概念よりも一般的なものとして扱われることが多い。すなわち、辺が長さ 2 以上の道に写されることを認めている。この埋め込みの意味において、[1] では butterfly network の、それと同じくらい位の数の de Bruijn network への埋め込みに関する結果を代数的考察を通して導いている。ここでは埋め込みは包含を意味する。すなわち、部分グラフとしての埋め込みについて考察する。そして、butterfly networks の de Bruijn network 及び Kautz network への埋め込みに関するいくつかの結果を組合せ論的考察を通して導く。

ここではダイグラフは多重弧をもたないとし、グラフはループ及び多重辺をもたないとする。 G をダイグラフとする。 G の頂点集合及び弧集合をそれぞれ、 $V(G), A(G)$ で表す。 G の底グラフとは G の各弧を辺に置き換え、ループを取り除き、二重辺を一つの辺にしたものであり、 $U(G)$ によって表される。 G のラインダイグラフとは 頂点集合として $A(G)$ をもち、頂点 u が 頂点 v に隣接する必要十分条件が、 G において u に対応する弧が v に対応する弧に隣接することであるダイグラフであり、 $L(G)$ で表される。 G から $L(G)$ への対応はグラフ上の単項演算とみることができる。この演算をラインダイグラフ演算と呼ぶ。 G にラインダイグラフ演算を r 回繰り返し適用して得られるダイグラフは $L^r(G)$ で表される。

v を G の頂点とする。 v の出次数とは、 v から接続している弧の数であり、 v の入次数とは、 v に接続している弧の数である。 v の出次数、入次数をそれぞれ $deg_G^+(v), deg_G^-(v)$ で表す。 G の最小次数とは $\min_{v \in V(G)} \min(deg_G^+(v), deg_G^-(v))$ であり、 $\delta(G)$ によって表される。出次数が 0 の頂点の集合を $Z_{out}(G)$ 、入次数が 0 の頂点の集合を $Z_{in}(G)$ で表す。 v から、又は v に接続している弧の集合を $I_G(v)$ とする。 $S \subseteq V(G)$ とする。このとき、 $\cup_{w \in S} I_G(w)$ を $I_G(S)$ で略記する。 $T \subseteq A(G)$ とする。 $\langle S \rangle_G, \langle T \rangle_G$ はそれぞれ S による導出ダイグラフ、 T による弧-導出ダイグラフを表す。 n -ウォークとは長さ n のウォークのことであり、同様に n -パス、 n -サイクルも定義される。 u から v への最短パスの長さを $d_G(u, v)$ で表す。完全 k 分木において、その根から全ての葉へ path が存在するように辺に方向付けを行なって構成されるダイグラフを完全 k 分出木という。完全 k 分出木の全ての弧の向きを逆にして得られるダイグラフを完全 k 分入木という。 H をダイグラフとする。 $A(G)$ のある分割が存在して、各分割部分によって弧-導出されるダイグラフが H に同型であるときに、 G は H -分解をもつという。 x を実数とする。 $[x]$ は、 x を越えない最大の整数を示す。 m, n を整数とする。 m が n を割り切るときに、 $m | n$ と書く。又、 $\sum_{1 \leq i \leq n} i^r$ を $P(r, n)$ と書く。

まず、第 2 節では directed butterfly を定義し、 r -dimensional directed butterfly があるダイグラフにラインダイグラフ演算を r 回施すことによって構成されることを示す。さらに、 α_k -演算を定義し、これとラインダイグラフ演算を組み合わせることにより、 k -ary directed butterfly の族が生成できることを

示す。また、directed butterfly の分解に関する結果を与える。

第3節では前節で得られた結果を利用して、ラインダイグラフ演算によって生成されるダイグラフへの directed butterflies の埋め込みに関する結果を与える。これらのダイグラフの結果は直ちにグラフ（即ち、ダイグラフの底グラフ）の結果に還元される。de Bruijn graph 及び Kautz graph はそれぞれ、de Bruijn digraph 及び Kautz digraph の底グラフであり、de Bruijn digraph と Kautz digraph はラインダイグラフ演算によって定義できる。よって、butterfly networks の de Bruijn network 及び Kautz network への埋め込みの結果が得られることになる。

2 Directed butterfly

directed butterfly を定義する前に、ラインダイグラフ演算によって生成されるダイグラフをウォークの観点から見てみる。すると、ラインダイグラフ演算の一般化である W_r -演算を考えることができる。

定義 2.1 G をダイグラフとする。 $W_r(G)$ は次のように定義される。

$$\begin{cases} V(W_r(G)) = G \text{ における } r\text{-ウォークの集合,} \\ A(W_r(G)) = \{([u_0, u_1, \dots, u_r], [v_0, v_1, \dots, v_r]) \mid \\ \quad [u_0, u_1, \dots, u_r], [v_0, v_1, \dots, v_r] \in V(W_r(G)), u_{i+1} = v_i, 0 \leq i < r, (u_r, v_r) \in A(G)\}. \end{cases}$$

すると、 $L(W_r(G)) \cong W_{r+1}(G)$ であることが容易に確かめられる。従って、次の命題が成り立つ。

命題 2.2 $L^r(G) \cong W_r(G)$.

我々はしばしば、 $L^r(G)$ の代わりに $W_r(G)$ を考える。次に directed butterfly を定義する。

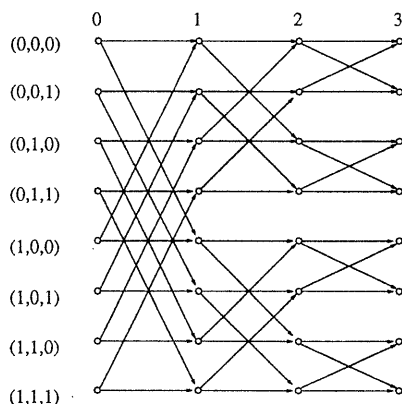


図 1: $\vec{b}(2,3)$.

定義 2.3 r -dimensional k -ary directed butterfly $\vec{b}(k,r)$ は次のように定義される。

$$\begin{cases} V(\vec{b}(k,r)) = \{((w_0, \dots, w_{r-1}), l) \mid w_i \in \{0, 1, \dots, k-1\}, 0 \leq i < r, 0 \leq l < r\}, \\ A(\vec{b}(k,r)) = \{(((w_0, \dots, w_{r-1}), l), ((w'_0, \dots, w'_{r-1}), l+1)) \mid w_i = w'_i \text{ for } i \neq l\}. \end{cases}$$

r -dimensional k -ary butterfly は $U(\vec{b}(k,r))$ によって定義される。

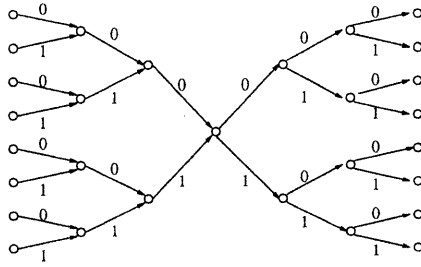


図 2: $\vec{X}_1(2,3)$.

2.1 ラインダイグラフ演算を使った directed butterfly の構成

定義 2.4 高さ r の完全 k 分出木と完全 k 分入木の二つの根を同一視して構成されるダイグラフを $\vec{X}(k,r)$ と書く。

$\vec{X}(k,r)$ を構成している完全 k 分出木において、同じ頂点から接続している k 個の弧に $\{0, 1, \dots, k-1\}$ の要素を一对一に割り当てる。同様に $\vec{X}(k,r)$ を構成している完全 k 分入木において、同じ頂点に接続している k 個の弧にも $\{0, 1, \dots, k-1\}$ の要素を一对一に割り当てる。このように弧にラベル付けされた $\vec{X}(k,r)$ を $\vec{X}_1(k,r)$ で表す。

定理 2.5 $\vec{b}(k,r) \cong W_r(\vec{X}_1(k,r))$.

証明. f を次のような $V(\vec{b}(k,r))$ 上の置換とする。

$$f(((w_0, \dots, w_{r-1}), l)) = ((w_1, \dots, w_{r-1}, w_0, \dots, w_{l-1}), l).$$

又、 $f^*(\vec{b}(k,r))$ を次のようなダイグラフとする。

$$\begin{cases} V(f^*(\vec{b}(k,r))) = V(\vec{b}(k,r)), \\ A(f^*(\vec{b}(k,r))) = \{(f(u), f(v)) \mid (u, v) \in A(\vec{b}(k,r))\}. \end{cases}$$

すると、

$$A(f^*(\vec{b}(k,r))) = \{(((w_0, w_1, \dots, w_{r-1}), l), ((w_1, \dots, w_{r-1}, \alpha), l+1)) \mid \alpha \in \{0, 1, \dots, k-1\}\}.$$

もちろん、 $\vec{b}(k,r) \cong f^*(\vec{b}(k,r))$ である。

$\vec{X}_1(k,r)$ の r -パスの集合を P_r とする。ここで、 $\vec{X}_1(k,r)$ の任意のウォークはパスである。 $p \in P_r$ とし、 $l(p)$ を p の最後の頂点とする。 x を $\vec{X}_1(k,r)$ を構成している完全 k 分出木 (完全 k 分入木) の根とする。今、 P_r を次のように $P_{(i)}$, $i = 0, 1, \dots, r$ に分割する。

$$P_{(i)} = \{p \in P_r \mid d_{\vec{X}_1(k,r)}(x, l(p)) = i\}.$$

すると、 $P_{(i)}$ の要素と $\{0, 1, \dots, k-1\}^r$ の要素は $\vec{X}_1(k,r)$ の弧のラベリングに従って一対一に対応する。 $\vec{X}_1(k,r)$ の r -パス p に対応する $\{0, 1, \dots, k-1\}^r$ の要素を $g(p)$ で表すとする。そして、 $q \in P_{(i)}$ に対して $h(q) = (g(p), i)$ として、 P_r から $V(f^*(\vec{b}(k,r)))$ への全単射を定義すると、これは $W_r(\vec{X}_1(k,r))$ から $f^*(\vec{b}(k,r))$ への同型写像になっている。□

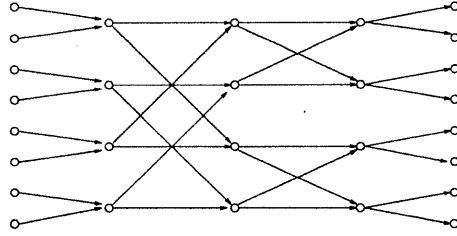


図 3: $\alpha_2(\vec{b}(2,3))$.

系 2.6 $\vec{b}(k,r) \cong L^r(\vec{X}(k,r))$.

次に α_k -演算を定義し、この α_k -演算と ラインダイグラフ演算 を組合せることによって、 k -ary directed butterfly の族 を構成できることを示す。

定義 2.7 G をダイグラフとする。 $Z_{in}(G)$ の各頂点 u に対して、 k 個の u に接続する新しい弧を (新しい頂点と共に) つけ加え、 $Z_{out}(G)$ の各頂点 v に対して、 k 個の v から接続する新しい弧を (新しい頂点と共に) つけ加えて構成されるダイグラフを $\alpha_k(G)$ で表す。

系 2.8 $\vec{b}(k,r) \cong L(\alpha_k(\vec{b}(k,r-1)))$, $r > 0$.

証明.

$$\begin{aligned} \vec{b}(k,r) &\cong L^r(\vec{X}(k,r)) \\ &\cong L(L^{r-1}(\vec{X}(k,r))) \\ &\cong L(W_{r-1}(\vec{X}(k,r))) \\ &\cong L(\alpha_k(W_{r-1}(\vec{X}(k,r-1)))) \\ &\cong L(\alpha_k(\vec{b}(k,r-1))). \end{aligned}$$

□

2.2 Directed butterfly の分解

補題 2.9 $\vec{b}(k,r)$ は r -パス 分解をもつ。

証明. $Z_{out}(\vec{b}(k,r))$ から $Z_{in}(\vec{b}(k,r))$ への関数 ϕ を次のように定義する。

$$\varphi(((w_0, w_1, \dots, w_{r-1}), r)) = ((w_0, w_1, \dots, w_{r-1}), 0).$$

$Z_{out}(\vec{b}(k,r))$ の各頂点 v に対して、弧 $(v, \phi(v))$ を k 個つけ加えて構成される多重ダイグラフを $\vec{c}(k,r)$ とする。 $\vec{c}(k,r)$ は正則多重ダイグラフであるから オイラーリアン サーキットをもつことになる。 $\vec{c}(k,r)$ における オイラーリアン サーキット の存在は、 $\vec{b}(k,r)$ における r -パス 分解の存在を意味する。 □

$\vec{X}_i(k,r)$ の $2r$ -パス の集合と $\{0, 1, \dots, k-1\}^{2r}$ の間には、 $\vec{X}_i(k,r)$ の弧のラベリングにより、一対一対応が存在する。 p を $\vec{X}_i(k,r)$ の $2r$ -パス として、 p に対応する $\{0, 1, \dots, k-1\}^{2r}$ の要素を $\psi_{k,r}(p)$ とする。

定理 2.10 m, n を正整数とし、 $m \mid n$ とする。 $\vec{b}(n,r)$ は $\vec{b}(m,r)$ -分解をもつ。

証明. $n = km$ とする. $\vec{b}(k, r) \cong W_r(\vec{X}(k, r))$ であるから, $\vec{b}(k, r)$ の r -パスは $\vec{X}(k, r)$ の $2r$ -パスに対応する. 従って, 補題 2.9 は次のように言い換えることができる. $\vec{X}(k, r)$ には k^{r+1} 個の $2r$ -パス, $p_0, p_1, \dots, p_{k^{r+1}-1}$ が存在して, $\langle A(p_i) \cap A(p_j) \rangle_{\vec{X}(k, r)}$, $0 \leq i < j < k^{r+1}$ は $(r+1)$ -パスを含まない.

今, $\psi_{k,r}(p_i) = (p_{i,0}, p_{i,1}, \dots, p_{i,2r-1})$, $0 \leq i < k^{r+1}$ とする. 又, $N_i = \{im, im+1, \dots, (i+1)m-1\}$ とし,

$$V_i = \{(q_0, q_1, \dots, q_{2r-1}) \mid q_j \in N_{p_{i,j}}, 0 \leq j < 2r\}, 0 \leq i < k^{r+1}.$$

とする. さらに,

$$A_i = \bigcup_{s \in V_i} A(\psi_{n,r}^{-1}(s)), 0 \leq i < k^{r+1}.$$

とする. すると, $\langle A_i \rangle_{\vec{X}_i(n,r)} \cong \vec{X}(m, r)$ となる. 従って, $W_r(\langle A_i \rangle_{\vec{X}_i(n,r)}) \cong \vec{b}(m, r)$ である. $\langle A(p_i) \cap A(p_j) \rangle_{\vec{X}(k,r)}$ ($0 \leq i < j < k^{r+1}$) は $(r+1)$ -パスを含んでいないので, $\langle A_i \cap A_j \rangle_{\vec{X}_i(n,r)}$ も $(r+1)$ -パスを含んでいない. 故に $W_r(\langle A_i \rangle_{\vec{X}_i(n,r)})$ と $W_r(\langle A_j \rangle_{\vec{X}_j(n,r)})$ は共通の弧をもたない. $|A(\vec{b}(n, r))|/|A(\vec{b}(m, r))| = k^{r+1}$ であるから $\vec{b}(n, r)$ は $\vec{b}(m, r)$ -分解をもつ. \square

directed butterfly はループや 2-サイクルをもたない. よって, 次の命題が成り立つ.

系 2.11 m, n を正整数とし, $m \mid n$ とする. $b(n, r)$ は $b(m, r)$ -分解をもつ.

系 2.12 $b(n, r)$ は $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor^r$ 個の $b(m, r)$ に同型な部分グラフを頂点を共有しない形で含む.

証明. directed butterfly について証明すれば十分である. $\vec{b}(n, r)$ は $i < n$ なる i に対して $\vec{b}(i, r)$ を含んでいるので, $m \mid n$ の場合について考えれば十分である. $n = km$ とする. 定理 2.10 から $\alpha_k(\vec{b}(n, r))$ は $\alpha_m(\vec{b}(m, r))$ -分解をもつことがわかる. 従って, $L(\alpha_n(\vec{b}(n, r)))$ は k^{r+1} 個の $L(\alpha_m(\vec{b}(m, r)))$ に同型な部分ダイグラフを頂点を共有しない形で含む. \square

3 埋め込み

補題 3.1 G をダイグラフとする. $W_r(G)$ の任意の二つの異なった $(r+1)$ -サイクルは頂点を共有しない.

証明. $W_r(G)$ の $(r+1)$ -サイクルは G における閉 $(r+1)$ -ウォークに対応している. C_1, C_2 を $W_r(G)$ の異なった二つの $(r+1)$ -サイクルとする. W_1, W_2 を C_1, C_2 に対応する G の閉 $(r+1)$ -ウォークとする. G は多重弧をもたないから, W_1 と W_2 に共通の部分ウォークの最大長は $(r-1)$ である. $W_r(G)$ の頂点は G の r -ウォークである. 故に C_1 と C_2 は頂点を共有しない. \square

定義 3.2 G をダイグラフとし, $v \in V(G)$ とする. v を通る G の r -ウォークの集合によって導出される $W_r(G)$ の部分グラフを $W_r(G, v)$ とする.

補題 3.3 G をダイグラフとし, $v \in V(G)$ とする. すると,

$$W_{r+1}(G, v) \cong L(\langle I_{W_r(G)}(V(W_r(G, v))) \rangle_{W_r(G)}).$$

証明. 定義より $V(W_r(G, v))$ は v を通る, G の r -ウォークの集合である. よって, $I_{W_r(G)}(V(W_r(G, v)))$ は v を通る, G の $(r+1)$ -ウォークの集合に対応する. $W_{r+1}(G) \cong L(W_r(G))$ より命題は成り立つ. \square

定理 3.4 G をダイグラフとし、 $v \in V(G)$ とする。すると、

$$\bar{b}(\delta(G) - 1, r) \subseteq W_r(G, v).$$

証明. $\delta(G) = k + 1$ とおく。ラインダイグラフ演算の性質より $k < \delta(G)$ は $k < \delta(L^r(G))$ を意味し、よって $k < W_r(G)$ となる。 r に関する帰納法によって証明する。 $r = 0$ のときには命題は明らかである。 $r \geq 0$ のときに命題が成り立つと仮定する。よって、 $\bar{b}(k, r)$ に同型な、 $W_r(G, v)$ の部分グラフが存在する。今、 F をそのような部分グラフとする。 $Z_{out}(F)$ の各頂点に対して、そこから接続している $W_r(G)$ の弧を k 個選ぶ。選ばれた k^{r+1} 個の弧の集合を T とする。 $w \in Z_{in}(F)$ とする。 $Z_{out}(F)$ の頂点 $t_1, t_2, t_1 \neq t_2$ が存在して、二つとも w に隣接すると仮定する。 $F \cong \bar{b}(k, r)$ であるから w から t_1, t_2 への r -パスが存在する。このことは、異なる二つの $(r+1)$ -サイクルが $W_r(G)$ において共通の頂点をもつことを意味し、よって補題 3.1 に反する。従って、 w に隣接する $Z_{out}(F)$ の頂点は高々一つである。故に $Z_{in}(F)$ の各頂点に対して、それに隣接している $W_r(G)$ の弧で T の要素でないものを k 個選ぶことができる。選ばれた k^{r+1} 個の弧の集合を S とする。すると、

$$L((A(F) \cup S \cup T)_{W_r(G)}) \supseteq L(\alpha_k(F)) \cong \bar{b}(k, r+1)$$

となる。補題 3.3 から $L((A(F) \cup S \cup T)_{W_r(G)}) \subseteq W_{r+1}(G, v)$ である。従って、命題は $(r+1)$ のときにも成り立つ。□

系 3.5 G をダイグラフとする。すると、 $L^r(G)$ は $\bar{b}(i, r), i = 1, 2, \dots, \delta(G) - 1$ を頂点を共有しない形で含む。

証明. $v \in V(G)$ とする。 G から v を取り除いたダイグラフを $G-v$ とする。定理 3.4 から、 $W_r(G)$ は $\bar{b}(\delta(G) - 1, r)$ と $W_r(G-v)$ を頂点を共有しない形で含むことがわかる。このことを $W_r(G-v)$ に再帰的に適用することによって命題が証明される。□

系 3.6 G をダイグラフとする。すると、 $U(L^r(G))$ は $b(i, r), i = 1, 2, \dots, \delta(G) - 1$ を頂点を共有しない形で含む。

系 3.7 G をダイグラフとする。 $U(L^r(G))$ は $kP(r, \lfloor \frac{\delta(G)}{k} \rfloor - 1) + \lfloor \frac{\delta(G)}{k} \rfloor^r (\delta(G) \bmod k)$ 個の $b(k, r)$ に同型な部分グラフを頂点を共有しない形で含む。

証明. 系 3.6 と系 2.12 より $U(L^r(G))$ は $\sum_{1 \leq i < \delta(G)} \lfloor \frac{i}{k} \rfloor^r$ 個の $b(k, r)$ に同型な部分グラフを頂点を共有しない形で含む。 $\delta(G) = kx + s, 0 \leq s < k$ とする。

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < \delta(G)} \lfloor \frac{i}{k} \rfloor^r &= \sum_{k \leq i < 2k} 1^r + \sum_{2k \leq i < 3k} 2^r + \dots + \sum_{k(x-1) \leq i < kx} (x-1)^r + \sum_{kx \leq i < kx+s} x^r \\ &= k \sum_{1 \leq i < x} i^r + sx^r \\ &= kP(r, \lfloor \frac{\delta(G)}{k} \rfloor - 1) + \lfloor \frac{\delta(G)}{k} \rfloor^r (\delta(G) \bmod k). \quad \square \end{aligned}$$

位数 p の完全対称ダイグラフを K_p^* で表す。 K_p^* の各頂点にループを付けたものを K_p° で表す。すると、 D -dimensional d -ary de Bruijn digraph 及び Kautz digraph は次のようにラインダイグラフ演算によって定義される。

$$\begin{cases} B(d, D) = L^{D-1}(K_d^{\circ}), \\ K(d, D) = L^{D-1}(K_{d+1}^*). \end{cases}$$

$U(B(d, D)), U(K(d, D))$ を単に $UB(d, D), UK(d, D)$ と書く。これまでの結果から直ちに以下の結果が得られる。

系 3.8 $UB(d, D)(UK(d, D))$ は $b(i, D-1)$, $i = 1, 2, \dots, d-1$ を頂点を共有しない形で含む。

系 3.9 $UB(d, D)(UK(d, D))$ は $kP(D-1, \lfloor \frac{d}{k} \rfloor - 1) + \lfloor \frac{d}{k} \rfloor^{D-1} (d \bmod k)$ 個の $b(k, D-1)$ に同型な部分グラフを頂点を共有しない形で含む。

4 結論

butterfly networks の de Bruijn network 及び Kautz network への部分グラフとしての埋め込みに関するいくつかの結果を与えた。これらの結果は、複数の butterfly networks の頂点を共有しない形での埋め込みであるため、fault-tolerant embedding に関する結果としてみることもできる。

de Bruijn digraphs や Kautz digraphs の定義としては ラインダイグラフ演算によるものの他に、アルファベットによるもの、合同式によるもの等が知られている。アルファベットによる定義は丁度 W_r -演算に対応している。合同式による定義からの一般化として、generalized de Bruijn digraphs, generalized Kautz digraphs がある。(see [2])

generalized de Bruijn digraph $G_B(n, d)$ は頂点集合として、 $\{0, 1, \dots, n-1\}$ をもち、頂点 u が頂点 v に隣接している必要十分条件が $y \equiv dx + i \pmod{n}$, $0 \leq i < d$ であるダイグラフである。同様に generalized Kautz digraph $G_K(n, d)$ は頂点集合として、 $\{0, 1, \dots, n-1\}$ をもち、頂点 u が頂点 v に隣接している必要十分条件が $y \equiv -dx - i \pmod{n}$, $1 \leq i \leq d$ であるダイグラフである。これらのダイグラフは次の性質をもつことが Imase ら [5] により知られている。

$$\begin{cases} G_B(n \times d, d) \cong L(G_B(n, d)), \\ G_K(n \times d, d) \cong L(G_K(n, d)). \end{cases}$$

故に $n = pd^r$ の場合にはこれまでの結果を適用することができる。

参考文献

- [1] F. ANNEXSTEIN, M. BAUMSLAG, AND A.L. ROSENBERG, *Group action graphs and parallel architectures*, SIAM J. Comput., 19 (1990), pp. 544-569.
- [2] J-C. BERMOND AND C. PEYRAT, *de Bruijn and Kautz networks: A competition for the hypercube?* in : Hypercube and Distributed Computers, Proceedings of the First European Colloquium on Hypercubes, Rennes, October 1989, Elsevier/North Holland, New York, (1989), pp. 279-293.
- [3] G. CHARTRAND AND L. LESNIAK, *Graphs & Digraphs, Second ed.*, Wadsworth, Monterey, CA 1986.
- [4] R.L. HEMMINGER AND L.W. BEINEKE, *Line graphs and line digraphs*, in Selected Topics in Graph Theory, L.W. Beineke and R.J. Wilson, ed., Academic Press, NY (1987), pp. 271-305.
- [5] M. IMASE, T. SONEOKA AND K. OKADA, *Connectivity of regular directed graphs with small diameter*, IEEE Trans. Comput., 34 (1985), pp. 267-273.
- [6] F.T. LEIGHTON, *Introduction to Parallel Algorithms and Architectures: Arrays · Trees · Hypercubes*, Morgan Kaufmann Publishers, San Mateo, CA 1992.