アルゴリズム 42－8
（1994. 11. 18）

ハイパーキューブの次数を考慮した耐故障グラフ

山田 敏規　　上野 修一

東京工業大学 電気・電子工学科
〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1

与えられた N点から成るグラフ Hに t 個の点といくつかの辺を付加して得られるグラフ G から任意の t 個の点を除去しても，残りのグラフに Hが部分グラフとして含まれているとき，G を Hの t 耐故障グラフという．N点から成るハイパーキューブ Q_Nに対しては，付加辺数が最適な $O(tN+t^2)$ であるが点の最大次数は $O(N+t)$ である t 耐故障グラフと付加辺数は $O(tN\log N)$ であるが最大次数が $O(t\log N)$ である t 耐故障グラフが知られている．小文では，付加辺数が最適な $O(tN+t^2)$ であり最大次数が比較的小さいような Q_Nの t 耐故障グラフの新しい構成方法をいくつか提案する．特に，任意の定数 c に対して，付加辺数が $2ctN+ct^2\left(\frac{\log N}{c}\right)^c$であり最大次数が $O(\frac{N}{\log^{c/2}N})+4ct$ であるような t 耐故障グラフを示す．

Fault-Tolerant Hypercubes with Small Degree

Toshinori YAMADA and Shuichi UENO

Department of Electrical and Electronic Engineering, Tokyo Institute of Technology
2-12-1 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo 152, Japan

For a given N-vertex graph H, a graph obtained from H by adding t vertices and some edges is called a t-FT (t-fault-tolerant) graph for H if even after deleting any t vertices from G, the remaining graph contains H as a subgraph. For an N-vertex hypercube Q_N, a t-FT graph with an optimal number $O(tN+t^2)$ of added edges and maximum vertex degree of $O(N+t)$, and a t-FT graph with $O(tN\log N)$ added edges and maximum degree of $O(t\log N)$ have been known. In this paper, we introduce some t-FT graphs for Q_N with an optimal number $O(tN+t^2)$ of added edges and small maximum degree. In particular, we show a t-FT graph for Q_N with $2ctN+ct^2\left(\frac{\log N}{c}\right)^c$ added edges and maximum degree of $O(\frac{N}{\log^{c/2}N})+4ct$.

1 まえがき

大規模集積回路技術の発展と共に大規模並列計算機が現実のものとなりつつあるが，大規模化に伴い耐故障技術の開発が基本的な課題の一つとなっている．並列計算機の耐故障技術は大きく二つに分類できる．一つは，機械に冗長性を付加しないで，正常なプロセッサと通信回線のみを用いて，従ってある程度の機能低下を許容して，全体の機械をシミュレートする方法である（例えば，[3, 4, 10, 11, 15, 17, 20] 参照）．他方は，機械に冗長性を付加して，正常な部分が常に全体の機械を保持するようにして，従っていかなる機能低下もなく，運用する方法である（例えば，[1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 16, 18, 22, 23, 25, 26] 参照）．

小文では，後者の方法において，高々t個のプロセッサが故障すると仮定したときに，t個の冗長なプロセッサといくつかの冗長な通信回線を付加して耐故障化するモデルについて考察する．このとき，経済性の観点から，付加する通信回線の数を最小化することが重要である．よく知られているように，プロセッサを点に，通信回線を辺に対応させることによって，並列計算機の結線構造はグラフで表現することができるので，ここで扱う問題は以下のようなグラフ理論的な問題として定式化できる．以下では，N点から成るグラフをG_Nのように表す．

問題 1 与えられたグラフH_Nに対して，次の条件を満たすグラフG_{N+t}をH_Nにt個の点と最小数の辺を付加して構成せよ．

条件 1 G_{N+t}から任意のt個の点を除去して得られるグラフはH_Nを部分グラフとして含んでいる．

条件1を満たすG_{N+t}をH_Nのt耐故障グラフという．小文では，並列計算機の結線構造としてよく知られているハイパーキューブQ_Nのt耐故障グラフについて考察する．

一般に，任意のグラフH_Nの各点とt点上の完全グラフK_tの各点を辺で結んで得られるグラフ$H_N \vee K_t$はH_Nのt耐故障グラフである．$H_N \vee K_t$はH_Nにt個の点と$tN + \frac{1}{2}t(t-1)$本の辺を付加して得られる．

Q_Nは次数$\log N$の正則グラフであるので，Q_Nの任意のt耐故障グラフの最小次数は$\log N + t$である．従って，Q_Nの任意のt耐故障グラフの付加辺数は$\Omega(tN+t^2)$であり，$Q_N \vee K_t$の付加辺数はオーダーの意味で最適である．しかしながら，$Q_N \vee K_t$の最大次数は$N + t - 1$であるので，$Q_N \vee K_t$は現実的なt耐故障グラフであるとは言い難い．

一方，文献 [6] では，最大次数が$O(t \log N)$であるQ_Nのt耐故障グラフを提案しているが，その付加辺数は$O(tN \log N)$であり，$Q_N \vee K_t$のそれと比較して，大幅に増えてしまう．

そこで小文では，付加辺数は最適な$O(tN)$であり，最大次数が比較的小さいようなQ_Nのt耐故障グラフの構成方法をいくつか提案する．

まず3節では，最大次数が$O(N/\sqrt{\log N}) + 3t$で，付加辺数が$2tN + t^2$であるようなQ_Nのt耐故障グラフを構成する方法を示す．この構成方法は，4節で提案する構成方法の基礎をなしている．

4節では，最大次数が$O(N/\log N) + 5t$で，付加辺数が$4tN + 2t^2$であるようなQ_Nのt耐故障グラフを構成する方法を示す．この構成方法は，5節で提案する構成方法の基礎をなしている．

最後に5節では，任意の定数cに対して，最大次数が$O(N/\log^{c/2} N) + 4ct$で，付加辺数が$2ctN + ct^2(\log N/c)^c$であるようなQ_Nのt耐故障グラフを構成する方法を示す．

なお，辺の故障のみを仮定したモデルにおける辺耐故障グラフに関しては，ある定数cに対して，最大次数が$O(t\log(\log N/t + c)) + \log N$で，付加辺数が$O(tN \log(\log N/t + c))$であるような$Q_N$の$t$耐故障グラフを構成することができることが知られている [26].

2 準備

グラフGの点集合と辺集合をそれぞれ$V(G)$と$E(G)$で表す．グラフHがグラフGの部分グラフであるとき，$H \subset G$と表す．$S \subseteq V(G)$に対して，GからSの点およびSの点に接続する辺をすべて除去して得られるグラフを$G - S$で表す．あるグラフHが与えられたとき，グラフGは$|F| \le t$であるすべての$F \subseteq V(G)$に対して$H \subset G - F$を満たすとき，Hに関するt耐故障グラフという．

次のように定義されるグラフ$Q(n)$をn次元キューブという：$V(Q(n)) = \{0,1\}^n$; $E(Q(n)) = \{(u,v) | u,v \in V(Q(n)), w(u \oplus v) = 1\}$．ここで，$\oplus$はベクトルの排他的和を表し，$w(x)$はベクトル$x$のハミング重み（すなわち，非零要素の数）を表す．定義から，$|V(Q(n))| = 2^n$である．また，$Q(n)$の各点の次数はnであるので，$|E(Q(n))| = n2^{n-1}$であることが分かる．あるnに対して$Q(n)$と同型であるグラフをハイパーキューブという．

以下では，$N = 2^n$とし，$[n] = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$と定義する．

3 ハイパーキューブのt耐故障グラフの構成1

補題 1 pを奇数とする．このとき，$[p]$から$[p]$への写像

$$\phi_p : k \mapsto (2k) \bmod p$$

は全単射である．また，$i \in [p] - \{0\}$のとき，

$$\phi_p^{-1}((i-2) \bmod p) = \phi_p^{-1}(i) - 1$$

である．

証明： ある $k_1, k_2 \in [p]$ に対して，$\phi_p(k_1) = \phi_p(k_2)$ であると仮定すると，$\{2(k_1 - k_2)\} \bmod p = 0$ であり，p は奇数であるので，$(k_1 - k_2) \bmod p = 0$ である．ここで，$-(p-1) \leq k_1 - k_2 \leq p-1$ であるので，$k_1 - k_2 = 0$，すなわち $k_1 = k_2$ となる．従って，ϕ_pは単射であるので，ϕ_pは全単射である．

$i \in [p] - \{0\}$ のとき，$\phi_p(0) = 0 \neq i$ であるので，$\phi_p^{-1}(i) > 0$ である．このとき，

$$\begin{aligned}\phi_p(\phi_p^{-1}(i) - 1) &= \{2\phi_p^{-1}(i) - 2\} \bmod p \\ &= (i-2) \bmod p\end{aligned}$$

であるので，$\phi_p^{-1}((i-2) \bmod p) = \phi_p^{-1}(i) - 1$ である．■

n 次元キューブ $Q(n)\,(n \geq 3)$ の t 耐故障グラフを以下のように構成する．

n が奇数のとき $p = n$，n が偶数のとき $p = n-1$ とおく．このとき，p は奇数である．任意の $i \in [p]$ に対して，

$$V_i = \{v \in V(Q(n)) | w(v) \bmod p = i\}$$

とおく．$(V_0, V_1, \ldots, V_{p-1})$ は $V(Q(n))$ の分割である．

$t \leq \min_{1 \leq i \leq p-1} |V_i|$ と仮定する．任意の $i \in [p] - \{0\}$ に対して，S_iは $|S_i| = t$ であるような V_iの部分集合とする．このとき，グラフ $G^1(n)$ を次のように定義する：

$$\begin{aligned}V(G^1(n)) &= V(Q(n)) \cup S_0; \\ E(G^1(n)) &= E(Q(n)) \\ &\quad \cup \bigcup_{i=0}^{p-1} \{(u,v) | u \in V_i, v \in S_{(i+1) \bmod p}\} \\ &\quad \cup \bigcup_{i=0}^{p-1} \{(u,v) | u \in V_i, v \in S_{(i+3) \bmod p}\} \\ &\quad \cup \{(u,v) | u \in S_0, v \in S_1\}.\end{aligned}$$

ここで，S_0は t 個の付加点から成る集合である．

補題 2 $t \leq \log N$であるとき，$G^1(n)$ は $Q(n)\,(n \geq 3)$ の t 耐故障グラフである．

証明：

$$\min_{1 \leq i \leq p-1} |V_i| = \begin{cases} \log N + 1 & n \text{ が偶数のとき} \\ \log N & n \text{ が奇数のとき}\end{cases}$$

であるので，$n \geq 3, t \leq \log N$であるならば，グラフ $G^1(n)$ を構成することができる．

Fを $|F| \leq t$ である $V(G^1(n))$ の任意の部分集合とする．任意の $i \in [p]$ に対して $F_i = V_i \cap F, t_i = |F_i|$ とし，$F_p = S_0 \cap F, t_p = |F_p|$ とする．このとき $|F| = \sum_{i=0}^{p} t_i \leq t$ である．補題1より，任意の $i \in [p] - \{0\}$ に対して，$t_{\phi_p(0)} + t_{\phi_p(1)} + \cdots + t_{(i-2) \bmod p} \leq t - t_i$ であり，$t_{\phi_p(0)} + t_{\phi_p(1)} + \cdots + t_{p-2} \leq t - t_p$ であるので，任意の $i \in [p]$ に対して

$$|A_i| = t_{\phi_p(0)} + t_{\phi_p(1)} + \cdots + t_{(i-2) \bmod p}$$

であるような $S_i - F$の部分集合 A_iが存在する．ここで，ϕ_pは補題1で定義した写像である．さらに，任意の $i \in [p] - \{0\}$ に対して，$|F_i \cup A_i| = |F_i| + |A_i| = |A_{(i+2) \bmod p}|$ であり，$|F_0| = |A_2|$ であるので，任意の $i \in [p]$ に対して，全単射

$$\varphi_i : \begin{cases} F_0 \rightarrow A_2 & i = 0 \text{ のとき} \\ F_i \cup A_i \rightarrow A_{(i+2) \bmod p} & i \neq 0 \text{ のとき}\end{cases}$$

が存在する．このとき，$V(Q(n))$ から $V(G^1(n) - F)$ への写像φ を次のように定義する．

$$\varphi(v) = \begin{cases} v & v \notin F \cup A \text{ のとき} \\ \varphi_0(v) & v \in F_0 \text{ のとき} \\ \varphi_i(v) & v \in F_i \cup A_i,\ i \in [p] - \{0\} \text{ のとき}\end{cases}$$

ただし，$A = \bigcup_{i=1}^{p-1} A_i$である．このとき，$\varphi$ が単射であることは簡単に確かめられる．

次に，任意の $(u,v) \in E(Q(n))$ に対して，$(\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G^1(n) - F)$ であることを示す．$(u,v) \in E(Q(n))$ であるとき，$u \in V_i, v \in V_{(i+1) \bmod p}$, $i \in [p]$ であると仮定して一般性を失わない．次の 4 つの場合に分けて考察する．

1) $u, v \notin F \cup A$ のとき：$\varphi(u) = u, \varphi(v) = v$であるので，$(\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G^1(n) - F)$ である．

2) $u \notin F \cup A, v \in F \cup A$ のとき：$\varphi(u) = u \in V_i$, $\varphi(v) = \varphi_{(i+1) \bmod p}(v) \in A_{(i+3) \bmod p} \subseteq S_{(i+3) \bmod p}$であるので，$(\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G^1(n) - F)$ である．

3) $u \in F \cup A, v \notin F \cup A$ のとき：$\varphi(u) = \varphi_i(u) \in A_{(i+2) \bmod p} \subseteq S_{(i+2) \bmod p}$, $\varphi(v) = v \in V_{(i+1) \bmod p}$であるので，$(\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G^1(n) - F)$ である．

4) $u, v \in F \cup A$ のとき：$i \neq p-2$ のとき，$\varphi(u) = \varphi_i(u) \in A_{(i+2) \bmod p} \subseteq V_{(i+2) \bmod p}$, $\varphi(v) = \varphi_{(i+1) \bmod p}(v) \in A_{(i+3) \bmod p} \subseteq S_{(i+3) \bmod p}$であるので，$(\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G^1(n) - F)$である．$i = p-2$のとき，$\varphi(u) = \varphi_{p-2}(u) \in A_0 \subseteq S_0, \varphi(v) = \varphi_{p-1}(v) \in A_1 \subseteq S_1$であるので，$(\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G^1(n) - F)$ である．

従って，任意の $(u,v) \in E(Q(n))$ に対して，$(\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G^1(n) - F)$ であるので，$Q(n) \subset G^1(n) - F$である．よって，$G^1(n)$ は $Q(n)$ に関する t 耐故障グラフである．■

次に，グラフ $G^1(n)$ の最大次数と付加辺数を評価する．最大次数を評価するために，次の補題を用いる．

補題 3 [14]
$$\binom{2m}{m} \sim \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}}.$$

補題 4 $G^1(n)$ の最大次数は $O(N/\sqrt{\log N})+3t$ である．

証明： $v \in V(G^1(n))$ の次数を $deg_1(v)$ と表す．
1) $v \in V_0$のとき：
$$\begin{aligned} deg_1(v) &\le \log N + |S_1| + |S_3| \\ &= \log N + 2t. \end{aligned}$$

2) $v \in S_0$のとき：
$$\begin{aligned} deg_1(v) &\le |V_{p-1}| + |V_{p-3}| + |S_1| \\ &\le 2 \max_{0 \le i \le p-1} |V_i| + t. \end{aligned}$$

3) $v \in V_i - S_i$, $i = 1, 2, \ldots, p-1$ のとき：
$$\begin{aligned} deg_1(v) &\le \log N + |S_{(i+1) \bmod p}| + |S_{(i+3) \bmod p}| \\ &= \log N + 2t. \end{aligned}$$

4) $v \in S_i$, $i = 2, 3, \ldots, p-1$ のとき：
$$\begin{aligned} deg_1(v) &\le \log N + |V_{(i-1) \bmod p}| + |V_{(i-3) \bmod p}| \\ &\quad + |S_{(i+1) \bmod p}| + |S_{(i+3) \bmod p}| \\ &\le \log N + 2 \max_{0 \le i \le p-1} |V_i| + 2t. \end{aligned}$$

5) $v \in S_1$のとき：
$$\begin{aligned} deg_1(v) &\le \log N + |V_0| + |V_{p-2}| \\ &\quad + |S_2| + |S_4| + |S_0| \\ &\le \log N + 2 \max_{0 \le i \le p-1} |V_i| + 3t. \end{aligned}$$

よって，$G^1(n)$ の最大次数は高々$\log N + 2\max_{0 \le i \le p-1} |V_i| + 3t$ であることが分かる．
$$\max_{0 \le i \le p-1} |V_i| = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$
であり，補題3より
$$\binom{2m-1}{m-1} = \frac{1}{2}\binom{2m}{m} \sim \frac{2^{2m-1}}{\sqrt{\pi m}}$$
であるので，
$$\max_{0 \le i \le p-1} |V_i| \sim \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{N}{\sqrt{\log N}} & n \text{ が偶数のとき} \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{N}{\sqrt{\log N + 1}} & n \text{ が奇数のとき} \end{cases}$$
である．したがって，$G^1(n)$ の最大次数は $O(N/\sqrt{\log N}) + 3t$ である． ∎

補題 5 $G^1(n)$ の付加辺数は高々$2tN + t^2$である．

証明： 任意の $i \in [p]$ に対して，$|S_i| = t$ であるので，
$$\begin{aligned} |E(G^1(n))| - |E(Q(n))| &\le 2t \sum_{i=0}^{p-1} |V_i| + t^2 \\ &= 2tN + t^2 \end{aligned}$$
である． ∎

補題2，4，5をまとめて，次の定理を得る．

定理 1 $n \ge 3$ とする．$t \le \log N$であるとき，最大次数が $O(N/\sqrt{\log N}) + 3t$ で，付加辺数が高々$2tN + t^2$であるような $Q(n)$ の t 耐故障グラフを構成することができる． ∎

なお，αを 2 以上の自然数とし，$p = 2\lceil n/(2\alpha) \rceil - 1$ とすることによって，定理1と同じようにして，次の定理を証明することができる．

定理 2 αを 2 以上の自然数の定数とし，$n \ge 2\alpha + 1$, $\lambda = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\alpha})$ とする．$t \le \binom{n}{\lfloor \lambda n \rfloor}$であるとき，最大次数が $O(N/\sqrt{\log N}) + 3t$ で，付加辺数が高々$2tN + t^2$であるような $Q(n)$ の t 耐故障グラフを構成することができる． ∎

4 ハイパーキューブの t 耐故障グラフの構成 2

この節を通して，$\mathbf{o}$は $(0,0)$ を表す．

補題 6 p, qを互いに素な自然数とする．このとき，$[pq]$ から $[p] \times [q]$ への写像
$$\phi_{p,q} : k \mapsto (k \bmod p, k \bmod q)$$
は全単射である．また，$(i,j) \in [p] \times [q] - \{\mathbf{o}\}$ のとき，
$$\phi_{p,q}^{-1}((i-1) \bmod p, (j-1) \bmod q) = \phi_{p,q}^{-1}(i,j) - 1$$
である．

証明： ある $k_1, k_2 \in [pq]$ に対して，$\phi_{p,q}(k_1) = \phi_{p,q}(k_2)$ であると仮定すると，$((k_1 - k_2) \bmod p, (k_1 - k_2) \bmod q) = \mathbf{o}$であり，$p, q$は互いに素であるので，$(k_1 - k_2) \bmod pq = 0$である．ここで，$-(pq-1) \le k_1 - k_2 \le pq - 1$であるので，$k_1 - k_2 = 0$，すなわち $k_1 = k_2$となる．従って，$\phi_{p,q}$は単射である．また，$|[pq]| = |[p] \times [q]|$ であるので，$\phi_{p,q}$は全単射である．

$(i,j) \in [p] \times [q] - \{\mathbf{o}\}$ のとき，$\phi_{p,q}(0) = \mathbf{o} \ne (i,j)$ であるので，$\phi_{p,q}^{-1}(i,j) > 0$ である．このとき，
$$\begin{aligned} &\phi_{p,q}(\phi_{p,q}^{-1}(i,j) - 1) \\ &= ((\phi_{p,q}^{-1}(i,j) - 1) \bmod p, (\phi_{p,q}^{-1}(i,j) - 1) \bmod q) \\ &= ((i-1) \bmod p, (j-1) \bmod q) \end{aligned}$$

であるので，

$$\phi_{p,q}^{-1}((i-1) \bmod p, (j-1) \bmod q) = \phi_{p,q}^{-1}(i,j) - 1$$

である． ∎

n 次元キューブ $Q(n)\,(n \geq 5)$ の t 耐故障グラフを以下のように構成する．

n が奇数のとき $p = \frac{n+1}{2}, q = \frac{n-1}{2}$，$n$ が偶数のとき $p = \frac{n}{2}, q = \frac{n}{2} - 1$ とおく．このとき，$p = q+1$ であるので，p と qは互いに素である．任意の $(i,j) \in [p] \times [q]$ に対して，

$$V(i,j) = \{v \in V(Q(n)) | w_u(v) \bmod p = i, \; w_l(v) \bmod q = j\}$$

とおく．ただし，$w_u(v), w_l(v)$ は n が奇数のときはそれぞれ上位$\frac{n+1}{2}$ビット，下位$\frac{n-1}{2}$ビットにある 1 の数を，n が偶数のときはそれぞれ上位$\frac{n}{2}$ビット，下位$\frac{n}{2}$ビットにある 1 の数を表す．$(V(0,0), V(0,1), \ldots, V(p-1, q-1))$ は $V(Q(n))$ の分割である．

$t \leq \min_{(i,j)\in[p]\times[q]-\{\mathbf{o}\}} |V(i,j)|$ と仮定する．任意の $(i,j) \in [p] \times [q] - \{\mathbf{o}\}$ に対して，$S(i,j)$ は $|S(i,j)| = t$ であるような $V(i,j)$ の部分集合とする．このとき，グラフ $G^2(n)$ を次のように定義する：

$$\begin{aligned}
V(G^2(n)) &= V(Q(n)) \cup S(0,0) \\
E(G^2(n)) &= E(Q(n)) \\
&\cup \bigcup_{(i,j)\in[p]\times[q]} \{(u,v) | u \in V(i,j), \; v \in S((i+1) \bmod p, j)\} \\
&\cup \bigcup_{(i,j)\in[p]\times[q]} \{(u,v) | u \in V(i,j), \; v \in S(i, (j+1) \bmod q)\} \\
&\cup \bigcup_{(i,j)\in[p]\times[q]} \{(u,v) | u \in V(i,j), \; v \in S((i+2) \bmod p, (j+1) \bmod q)\} \\
&\cup \bigcup_{(i,j)\in[p]\times[q]} \{(u,v) | u \in V(i,j), \; v \in S((i+1) \bmod p, (j+2) \bmod q)\} \\
&\cup \{(u,v) | u \in S(0,0), v \in S(1,0)\} \\
&\cup \{(u,v) | u \in S(0,0), v \in S(0,1)\}
\end{aligned}$$

ここで，$S(0,0)$ は t 個の付加点から成る集合である．

補題 7 $t \leq \log N - 1$ のとき，$G^2(n)$ は $Q(n)\,(n \geq 5)$ の t 耐故障グラフである．

証明：

$$\min_{(i,j)\in[p]\times[q]-\{\mathbf{o}\}} |V(i,j)| = \begin{cases} \log N + 2 & n \text{ が偶数のとき} \\ \log N - 1 & n \text{ が奇数のとき} \end{cases}$$

であるので，$n \geq 5, t \leq \log N - 1$ であるならば，グラフ $G^2(n)$ を構成することができる．

Fを $|F| \leq t$ である $V(G^2(n))$ の任意の部分集合とする．任意の $(i,j) \in [p] \times [q]$ に対して，$F(i,j) = V(i,j) \cap F, t(i,j) = |F(i,j)|$ とし，$F(p,q) = S(0,0) \cap F, t(p,q) = |F(p,q)|$ とする．このとき，$|F| = \sum_{(i,j)\in[p]\times[q]} t(i,j) + t(p,q) \leq t$ である．$i' = (i-1) \bmod p$, $j' = (j-1) \bmod q$ とおくと，補題6より，任意の $(i,j) \in [p] \times [q] - \{\mathbf{o}\}$ に対して，$t(\phi_{p,q}(0)) + t(\phi_{p,q}(1)) + \cdots + t(i',j') \leq t - t(i,j)$ であり，$t(\phi_{p,q}(0)) + t(\phi_{p,q}(1)) + \cdots + t(p-1, q-1) \leq t - t(p,q)$ であるので，任意の $(i,j) \in [p] \times [q]$ に対して，

$$|A(i,j)| = t(\phi_{p,q}(0)) + t(\phi_{p,q}(1)) + \cdots + t(i',j')$$

であるような $S(i,j) - F$の部分集合 $A(i,j)$ が存在する．さらに，任意の $(i,j) \in [p] \times [q] - \{\mathbf{o}\}$ に対して，$|F(i,j) \cup A(i,j)| = |F(i,j)| + |A(i,j)| = |A((i+1) \bmod p, (j+1) \bmod q)|$ であり，$|F(0,0)| = |A(1,1)|$ であるので，任意の $(i,j) \in [p] \times [q]$ に対して，全単射

$$\varphi_{i,j} : \begin{cases} F(0,0) \to A(1,1) & (i,j) = \mathbf{o} \text{のとき} \\ F(i,j) \cup A(i,j) \to A((i+1) \bmod p, (j+1) \bmod q) & (i,j) \neq \mathbf{o} \text{のとき} \end{cases}$$

が存在する．このとき，$V(Q(n))$ から $V(G^2(n) - F)$ への写像φ を次のように定義する．

$$\varphi(v) = \begin{cases} v & v \notin F \cup A \text{ のとき} \\ \varphi_{0,0}(v) & v \in F(0,0) \text{ のとき} \\ \varphi_{i,j}(v) & v \in F(i,j) \cup A(i,j), \; (i,j) \in [p] \times [q] - \{\mathbf{o}\} \text{ のとき} \end{cases}$$

ただし，$A = \bigcup_{(i,j)\in[p]\times[q]-\{\mathbf{o}\}} A(i,j)$ である．このとき，φ が単射であることは簡単に確かめられる．

次に，任意の $(u,v) \in E(Q(n))$ に対して，$(\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G^2(n) - F)$ であることを示す．$(u,v) \in E(Q(n))$ であるとき，$u \in V(i,j), v \in V((i+1) \bmod p, j), (i,j) \in [p] \times [q]$ であると仮定して一般性を失わない．次の 4 つの場合に分けて考察する．

1) $u, v \notin F \cup A$ のとき：$\varphi(u) = u$, $\varphi(v) = v$であるので，$(\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G^2(n) - F)$ である．

2) $u \notin F \cup A, v \in F \cup A$ のとき：$\varphi(u) = u \in V(i,j)$, $\varphi(v) = \varphi_{(i+1) \bmod p, j}(v) \in A((i+2) \bmod p, (j+1) \bmod q) \subseteq S((i+2) \bmod p, (j+1) \bmod q)$ であるので，$(\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G^2(n) - F)$ である．

3) $u \in F \cup A, v \notin F \cup A$ のとき：$\varphi(u) = \varphi_{i,j}(u) \in A((i+1) \bmod p, (j+1) \bmod q) \subseteq S((i+1) \bmod p, (j+1) \bmod q)$, $\varphi(v) = v \in V((i+1) \bmod p, j)$ であるので，$(\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G^2(n) - F)$ である．

4) $u, v \in F \cup A$ のとき：$(i,j) \neq (p-1, p-1)$ のとき，$\varphi(u) = \varphi_{i,j}(u) \in A((i+1) \bmod p, (j+1) \bmod q) \subseteq$

$V((i+1) \bmod p, (j+1) \bmod q)$, $\varphi(v) = \varphi_{(i+1)\bmod p, j}(v) \in A((i+2) \bmod p, (j+1) \bmod q) \subseteq S((i+2) \bmod p, (j+1) \bmod q)$ であるので，$(\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G^2(n) - F)$ である．$(i,j) = (p-1, p-1)$ のとき，$\varphi(u) = \varphi_{p-1,p-1}(u) \in A(0,0) \subseteq S(0,0)$, $\varphi(v) = \varphi_{0,p-1}(v) \in A(1,0) \subseteq S(1,0)$ であるので，$(\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G^2(n) - F)$ である．

従って，任意の $(u,v) \in E(Q(n))$ に対して，$(\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G^2(n) - F)$ であるので，$Q(n) \subset G^2(n) - F$ である．よって，$G^2(n)$ は $Q(n)$ に関する t 耐故障グラフである． ∎

補題 8 $G^2(n)$ の最大次数は $O(N/\log N) + 5t$ である．

証明： $v \in V(G^2(n))$ の次数を $deg_2(v)$ と表す．
1) $v \in V(0,0)$ のとき：

$$deg_2(v) \le \log N + 4t.$$

2) $v \in S(0,0)$ のとき：

$$deg_2(v) \le 4 \max_{(i,j)\in[p]\times[q]} |V(i,j)| + 2t.$$

3) $v \in V(i,j)$, $(i,j) \in [p] \times [q] - \{\mathbf{o}\}$ のとき：

$$deg_2(v) \le \log N + 4t.$$

4) $v \in S(i,j)$, $(i,j) \in z_{p,q}^2 - \{\mathbf{o}, (0,1), (1,0)\}$ のとき：

$$deg_2(v) \le \log N + 4 \max_{(i,j)\in[p]\times[q]} |V(i,j)| + 4t.$$

5) $v \in S(0,1) \cup S(1,0)$ のとき：

$$deg_2(v) \le \log N + 4 \max_{(i,j)\in[p]\times[q]} |V(i,j)| + 5t.$$

よって，$G^2(n)$ の最大次数は高々$\log N + 4 \max_{(i,j)\in[p]\times[q]} |V(i,j)| + 5t$ であることが分かる．

$n = 2m$ のとき，

$$\max_{(i,j)\in[p]\times[q]} |V(i,j)| = \binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}^2$$

であり，$n = 2m+1$ のとき

$$\max_{(i,j)\in[p]\times[q]} |V(i,j)| = \binom{m+1}{\lfloor (m+1)/2 \rfloor} \binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}$$

であるので，補題 3より，

$$\max_{(i,j)\in[p]\times[q]} |V(i,j)| = O\left(\frac{N}{\log N}\right)$$

である．よって，$G^2(n)$ の最大次数は $O(N/\log N) + 5t$ である． ∎

補題 9 $G^2(n)$ の付加辺数は高々$4tN + 2t^2$である．

証明： 任意の $(i,j) \in [p] \times [q]$ に対して，$|S(i,j)| = t$ であるので，

$$\begin{aligned} |E(G^2(n))| - |E(Q(n))| &\le 4t \sum_{(i,j)\in[p]\times[q]} |V(i,j)| + 2t^2 \\ &= 4tN + 2t^2 \end{aligned}$$

である． ∎

補題 7，8，9をまとめて，次の定理を得る．

定理 3 $n \ge 5$ とする．$t \le \log N - 1$ であるとき，最大次数が $O(N/\log N) + 3t$ で，付加辺数が高々$4tN + 2t^2$ であるような $Q(n)$ の t 耐故障グラフを構成することができる． ∎

5 ハイパーキューブの t 耐故障グラフの構成 3

c を自然数の定数とする．$c|n$ と仮定し，$m = n/c \ge 2$, $M = m^c$とする．任意の $i \in [M]$ に対して，

$$V_i = \{v \in V(Q(n)) | \sum_{k=0}^{c-1} m^k w_k(v) \bmod m = i\}$$

とする．ここで，$w_k(v)$ は vの第 $mk+1$ ビットから第 $m(k+1)$ ビットにある 1 の数を表す．$(V_0, \ldots, V_{M-1})$ は $V(Q(n))$ の分割である．任意の $i \in [M]$ に対して，$Neib(i) = \{j | \exists(u,v) \in E(Q(n)), u \in V_i, v \in V_j\}$ とする．$m \ge 2$ であるので，任意の $u, v \in V(Q(n))$ に対して，$(u,v) \in E(Q(n))$ であるための必要十分条件は，$w_{k_1}(v) = w_{k_1}(u) \pm 1$ かつ $w_k(v) = w_k(u)\ (k \ne k_1)$ であるような $k_1 \in [c]$ が存在することである．従って，任意の $i \in [M]$ に対して，$|Neib(i)| \le 2c$ である．

$t \le \min_{1 \le i \le M-1} |V_i|$ と仮定する．任意の $i \in [M] - \{0\}$ に対して，S_iは $|S_i| = t$ であるような V_iの部分集合とする．このとき，グラフ $G^3(n)$ を次のように定義する：

$$\begin{aligned} V(G^3(n)) &= V(Q(n)) \cup S_0 \\ E(G^3(n)) &= E(Q(n)) \\ &\quad \cup \bigcup_{i=0}^{M-1} \{(u,v) | u \in V_i, v \in S_{(j+1) \bmod M}, \\ &\qquad\qquad j \in Neib(i)\} \\ &\quad \cup \bigcup_{i=0}^{M-1} \{(u,v) | u \in S_{(i+1) \bmod M}, v \in S_{(j+1) \bmod M}, \\ &\qquad\qquad j \in Neib(i)\} \end{aligned}$$

ただし，S_0は t 個の付加点から成る集合である．

補題 10 $t \le \frac{2^{c-1}}{c} \log N$のとき，$G^3(n)$ は $Q(n)$ の t 耐故障グラフである．

証明：

$$\min_{1\le i\le M-1}|V_i| = 2^{c-1}m = \frac{2^{c-1}}{c}\log N$$

であるので，$t \le \frac{2^{c-1}}{c}\log N$であるならば，グラフ $G^3(n)$ を構成することができる．

Fを $|F| \le t$ である $V(G^3(n))$ の任意の部分集合とする．任意の $i \in [M]$ に対して，$F_i = V_i \cap F, t_i = |F_i|$ とし，$F_M = S_0 \cap F, t_M = |F_M|$ とする．このとき，$|F| = \sum_{i=0}^{M} t_i \le t$ である．任意の $i \in [M] - \{0\}$ に対して，$t_0 + t_1 + \cdots + t_{(i-1)\bmod M} \le t - t_i$であり，$t_0 + t_1 + \cdots + t_{M-1} \le t - t_M$であるので，$i \in [M]$ に対して，$|A_i| = t_0 + t_1 + \cdots + t_{(i-1)\bmod M}$であるような $S_i - F$の部分集合 A_iが存在する．さらに，任意の$i \in [M] - \{0\}$ に対して，$|F_i \cup A_i| = |F_i| + |A_i| = |A_{(i+1)\bmod M}|$ であり，$|F_0| = |A_1|$ であるので，任意の $i \in [M]$ に対して，全単射

$$\varphi_i : \begin{cases} F_0 \rightarrow A_1 & i = 0 \text{ のとき} \\ F_i \cup A_i \rightarrow A_{(i+1)\bmod M} & i \neq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

が存在する．このとき，$V(Q(n))$ から $V(G^3(n) - F)$ への写像φ を次のように定義する．

$$\varphi(v) = \begin{cases} v & v \notin F \cup A \text{ のとき} \\ \varphi_0(v) & v \in F_0 \text{のとき} \\ \varphi_i(v) & v \in F_i \cup A_i, i \in [M] - \{0\} \text{ のとき} \end{cases}$$

ただし，$A = \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$である．このとき，$\varphi$ が単射であることは簡単に確かめられる．

次に，任意の $(u,v) \in E(Q(n))$ に対して，$(\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G^3(n) - F)$ であることを示す．$(u,v) \in E(Q(n))$ であるならば，$u \in V_i, v \in V_j, i \in [M], j \in Neib(i)$ である．

1) $u, v \notin F \cup A$ のとき：$\varphi(u) = u, \varphi(v) = v$であるので，$(\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G^3(n) - F)$ である．

2) $u \notin F \cup A, v \in F \cup A$ のとき：$\varphi(u) = u \in V_i$, $\varphi(v) = \varphi_j(v) \in A_{(j+1)\bmod M} \subseteq S_{(j+1)\bmod M}$，$j \in Neib(i)$ であるので，$(\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G^3(n) - F)$ である．

3) $u, v \in F \cup A$ のとき：$\varphi(u) = \varphi_i(u) \in A_{(i+1)\bmod M} \subseteq S_{(i+1)\bmod M}$，$\varphi(v) = \varphi_j(u) \in A_{(j+1)\bmod M} \subseteq S_{(j+1)\bmod M}$，$j \in Neib(i)$ であるので，$(\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G^3(n) - F)$ である．

従って，任意の $(u,v) \in E(Q(n))$ に対して，$(\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G^3(n) - F)$ であるので，$Q(n) \subset G^3(n) - F$ である．よって，$G^3(n)$ は $Q(n)$ に関する t 耐故障グラフである．∎

次に，グラフ $G^3(n)$ の最大次数と付加辺数を評価する．証明は，紙面の都合で省略する．

補題 11 $G^3(n)$ の最大次数は $O(N/\log^{c/2} N) + 4ct$ である．∎

補題 12 $G^3(n)$ の付加辺数は高々$2ctN + ct^2(\log N/c)^c$ である．∎

補題10，11，12をまとめて，次の定理を得る．

定理 4 cを自然数の定数とし，nを$c|n$を満たす$2c$以上の自然数とする．$t \le \frac{2^{c-1}}{c}\log N$であるとき，最大次数が $O\left(\frac{N}{\log^{c/2} N}\right) + 4ct$ で，付加辺数が高々$2ctN + ct^2\left(\frac{\log N}{c}\right)^c$ であるような $Q(n)$ の t 耐故障グラフを構成することができる．∎

定理4は次のように一般化することができる．証明は定理4と同じようにしてできるが，やや煩雑になる．

定理 5 cを自然数の定数とし，$n \ge 2c$, $r = n \bmod c$ とする．$t \le 2^{c-1}\left\lfloor\frac{\log N}{c}\right\rfloor$であるとき，最大次数が$O\left(\frac{N}{\log^{c/2} N}\right) + 4ct$ で，付加辺数が高々$2ctN + ct^2\left\lceil\frac{\log N}{c}\right\rceil^r\left\lfloor\frac{\log N}{c}\right\rfloor^{c-r}$ であるような $Q(n)$ の t 耐故障グラフを構成することができる．∎

謝辞： 日頃御指導いただく梶谷洋司教授に感謝する．本研究は，東京工業大学のCAD21研究体の研究課題の一部として行なわれたものである．

参考文献

[1] M. Ajitai, N. Alon, J. Bruck, R. Cypher, C. T. Ho, and M. Naor. Fault tolerant graphs, perfect hash functions and disjoint paths. *Proc. IEEE Symp. on Foundations of Computer Science*, pp. 693–702, 1992.

[2] N. Alon and F. R. K. Chung. Explicit construction of linear sized tolerant networks. *Discrete Math.*, Vol. 72, pp. 15–19, 1988.

[3] F. Annexstein. Fault tolerance in hypercube-derivaive networks. *Proc. ACM Symp. on Parallel Algorithms and Architectures*, pp. 179–188, 1989.

[4] Bernd Becker and Haus-Ulrich Simon. How robust is the n-cube? *Information and Computation*, Vol. 77, pp. 162–178, 1988.

[5] J. Bruck, R. Cypher, and C. T. Ho. Fault-tolerant meshes with minimal numbers of spares. *Proc. 3rd IEEE Symp. on Parallel and Distributed Processing*, pp. 288–295, 1991.

[6] J. Bruck, R. Cypher, and C. T. Ho. Fault-tolerant meshes and hypercubes with minimal numbers of spares. *IEEE Trans. on Comput.*, pp. 1089–1104, 1993.

[7] J. Bruck, R. Cypher, and C. T. Ho. Fault-tolerant meshes with small degree. *Proc. ACM Symp. on Parallel Algorithms and Architectures*, pp. 1–10, 1993.

[8] J. Bruck, R. Cypher, and C. T. Ho. Fault-tolerant de bruijn and shuffle-exchange networks. *IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems*, Vol. 5, No. 5, pp. 548–553, May 1994.

[9] J. Bruck, R. Cypher, and C. T. Ho. Tolerating faults in a mesh with a row of spare nodes. *Theoretical Computer Science*, Vol. 128, No. 1-2, pp. 241–252, June 1994.

[10] J. Bruck, R. Cypher, and D. Soroker. Running algorithms efficiently on faulty hypercubes. *Proc. ACM Symp. on Parallel Algorithms and Architectures*, pp. 37–44, 1990.

[11] J. Bruck, R. Cypher, and D. Soroker. Tolerating faults in hypercubes using subcube partitioning. *IEEE Trans. of Comput.*, Vol. 41, pp. 599–605, May 1992.

[12] A. A. Farrag and R. J. Dawson. Designing optimal fault-tolerant star networks. *Networks*, Vol. 19, pp. 707–716, 1989.

[13] A. A. Farrag and R. J. Dawson. Fault-tolerant extensions of complete multipartite networks. *Proc. 9th International Conference on Distributed Computing Systems*, pp. 143–150, 1989.

[14] Welliam Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1. Modern Asia Edition, 2 edition, 1964.

[15] Niall Graham, Frank Harary, Marilynn Livingston, and Quentin F. Stout. Subcube fault-tolerance in hypercubes. *Information and Computation*, Vol. 102, pp. 280–314, 1993.

[16] Frand Harary and John P. Hayes. Edge fault tolerance in graphs. *Networks*, Vol. 23, pp. 135–142, 1993.

[17] J. Hastad, F. T. Leighton, and M. Newman. Fast computations using faulty hypercubes. *Proc. ACM Symp. on Theory of Computing*, pp. 251–284, 1989.

[18] J. P. Hayes. A graph model for fault-tolerant computing systems. *IEEE Trans. on Comput.*, Vol. C-25, pp. 875–883, 1976.

[19] Ching-Tien Ho. An observation on the bisectional interconnection networks. *IEEE Trans. on Comput.*, Vol. 41, pp. 873–877, July 1992.

[20] C. Kaklamanis, A. R. Karlin, F. T. Leighton, V. Milenkovic, P. Raghavan, S. Rao, C. Thomborson, and A. Tsantilas. Asymptotically tight bounds for computing with faulty arrays of processors. *Proc. IEEE Symp. on Foundations of Computer Science*, pp. 285–296, 1990.

[21] M. Paoli, W. W. Wong, and C. K. Wong. Minimum k-hamiltonian graphs. *J. Graph Theory*, Vol. 10, pp. 79–95, 1986.

[22] A. L. Rosenberg. Fault-tolerant interconnection networks, a graph theoretic approach. *in Workshop on Graph-Theoritec Concepts in Computer Science, Trauner Veriag, Linz*, pp. 286–297, 1983.

[23] S. Ueno, A. Bagchi, S. L. Hakimi, and E. F. Schmeichel. On minimum fault-tolerant networks. *SIAM J. on Discrete Mathematics*, Vol. 6, No. 4, pp. 565–574, November 1993.

[24] W. W. Wong and C. K. Wong. Minimum k-hamiltonian graphs. *J. Graph Theory*, Vol. 8, pp. 155–165, 1984.

[25] Guy W. Zimmerman and Abdol-Hossein Esfahanian. Chordal rings as fault-tolerant loops. *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 37/38, pp. 563–573, 1992.

[26] 山田敏規, 上野修一. ハイパーキューブの耐故障グラフ. 信学技報, CAS93-66(1993).