

あるクラスの3-連結グラフに対する点被覆問題の線形時間解法

柴田勲男 渡辺敏正

広島大学工学部 第二類 回路システム工学講座

(724) 東広島市鏡山一丁目4-1

(電話) 0824-24-7662 (ファクシミリ) 0824-22-7195

(電子メール) watanabc@huis.hiroshima-u.ac.jp

概要: 本論文では、3-連結グラフの点被覆問題について考える。3-連結グラフの部分クラスである3-次正則平面準車輪グラフに着目し、これに対する最小点被覆を求める線形時間解法SW3を提案する。そのためにより単純な構造を持つ部分グラフであるレールグラフに対する最小点被覆を求める線形時間解法SWを示す。次に、3つのレールグラフとこれらが接続される1点とで誘導される部分グラフの最小点被覆を求める手法を与える。これらの2つのアルゴリズムを組合せることにより、SW3を得る。

キーワード: 点被覆, 3-連結グラフ, 線形時間アルゴリズム, 準車輪グラフ

Linear Time Algorithms for the Vertex Cover Problem in a Class of 3-Connected Graphs

Isao Shibata and Toshimasa Watanabe

Department of Circuits and Systems, Faculty of Engineering, Hiroshima University,

4-1 Kagamiyama, 1 Chome, Higashi-Hiroshima, 724 Japan

Phone: +81-824-24-7662 (Watanabe) Facsimile +81-824-22-7195

E-mail: watanabc@huis.hiroshima-u.ac.jp

Abstract: The subject of paper is the vertex cover problem for a class of 3-connected graphs. The main purpose is to propose a linear time algorithm for finding a minimum vertex cover of a 3-regular planar quasi-wheel, which is one of 3-connected planar graphs. First we show a linear time algorithm SW for finding a minimum vertex cover of a rail-graph, which is a subgraph of a quasi-wheel and has simple structure. Then we show an algorithm for obtaining a minimum vertex cover for a subgraph induced by three rail-graphs adjacent to another vertex. Finally SW3 is obtained by combining these two algorithms.

Key word: Vertex covers, 3-connected graphs, Linear time algorithms, Quasi-wheels

1. はじめに

グラフ $G=(V, E)$ (但し, V は点集合, E は辺集合)の点被覆とは, G の任意の辺の端点の少なくとも一方は含むような点部分集合 N のことである. 要素数最小の点被覆を最小点被覆と呼ぶ. G の一つの最小点被覆を求める問題(最小点被覆問題: VC)はグラフに関する基本的問題であり既にいくつかの結果が知られている. VCのNP-完全性としては, 次数が高々3の一般グラフ[2], 3次正則平面グラフ[9], 3次正則平面3連結グラフ[8]が知られている. 多項式時間算法としては直並列グラフに対する $O(|V|^2)$ 算法[9]や $O(|V|+|E|)$ 算法[1, 6], 2部グラフに対するマッチング算法を利用した $O(|V|^{3/2})$ 算法(例えば, [3, 4, 5]参照)がある. また, コンピュータネットワーク上での回線監視局の設置問題等への応用が考えられる.

本稿では, 3-連結グラフのクラスの部分クラスである3次正則平面準車輪グラフに着目し, それに対する最小点被覆を線形時間で求めるアルゴリズムSW3を提案する. そのために, 3次正則平面準車輪グラフの部分グラフにより構造の簡単なルールグラフに対する最小点被覆を求める線形時間算法SWを与える. 次に, 3つのルールグラフが1点で接続されて得られるグラフの最小点被覆を求める手法を与えることにより, SW3を得る. なお, 本稿との関連結果の一部は[10, 11]で既に報告している.

2. 諸定義

2.1 基本的定義

本章ではグラフに関する諸定義を述べる. 断らない限り, 無向単純グラフのみを扱う. なお, 特に定義されない用語等は例えば[5]を参照のこと. グラフ(graph) $G=(V, E)$ は, 有限な空でない点集合 V と, 辺集合 E とからできている. ここで, 辺は V の2点を結ぶものとし, (u, v) などと表す. この2点をその辺の端点と呼ぶ. またグラフ G の点集合を $V(G)$, 辺集合を $E(G)$ と表わすこともある. グラフ G において点 v の点次数(degree)を $\delta_v(v)$ と表わす. また, グラフ G の最大点次数(各々, 最小点次数)を $\Delta(G)$ ($\delta(G)$)と表わす.

グラフ $G=(V(G), E(G))$ から点集合 $P \subseteq V(G)$ とそれに接続する辺をすべて取り去ることを, 点集合 P (点 v)の除去という. グラフ G から何個かの点を除去すると G の連結性が失われて, 非連結グラフか自明なグラフ(辺を含まず唯一点のみからなるグラフ)ができるが, そのような点の最小個数を G の連結度(connectivity)と呼び $\kappa(G)$ と表わす. G が k -連結(k -connected)であるとは $k \leq \kappa(G)$ であることをいう. また常に $\kappa(G) \leq \delta(G)$ である. つまり, k -連結グラフとは任意の $k-1$ 点とそれらに接続する辺(枝)を除去しても残ったグラフが連結であるグラフのことである.

また, どの点の次数も同じであるグラフを正則グラフと呼びその次数が r であるとき, r 次正則グラフと呼ぶ. C_n を n 個の点からなる初等閉路を表す. $n=3$ のとき特に C_3 を3辺閉路と呼ぶ.

グラフ G の点部分集合 $N \subset V$ がグラフ G の点被覆(vertex cover)であるとは, G の任意の辺 $(u, v) \in E(G)$ に対して, $\{u, v\} \cap N \neq \emptyset$ であることである. G の点被覆の中でその要素数 $|N|$ が最小である N を G の最小点被覆(minimum vertex cover)と言う.

2.2 車輪グラフ

車輪グラフ(wheel) W_{n+1} (但し, $n \geq 3$) (図1)とは,

C_n に新しく1点 v_0 と n 本の辺 (v_0, v) ($v \in V_{C_n}$)を付加して定まるグラフのことで, $W_{n+1} = K_1 + C_n$ と表す. 辺 (v_0, v) をそのスポーク(spoke), C_n をリム(rim), v_0 をハブ(hub), と呼ぶ.

2.3 3-連結グラフ

3-連結グラフの特徴付けは次に示すTutteの定理により与えられている.

(定理1) [7] グラフ G が3-連結であるための必要十分条件はグラフ G が車輪グラフであるか, あるいは車輪グラフから次の2種の演算IまたはIIを何回か繰り返して得られるグラフであることである.

《演算I》(辺付加) 新しい単純辺を付加する.

《演算II》(点分割) $\delta_v(v) \geq 4$ なる点 v を新しい隣接した2点 v', v'' で置き換え(即ち v', v'' を新しい辺で結び) G において v と隣接していた点を新しいグラフ G' では v', v'' のいずれか1点だけと, $\delta_{v'}(v') \geq 3$ 且つ $\delta_{v''}(v'') \geq 3$ となるように辺で結ぶ. 図2に図1の点 v_0 に対して点分割を行った結果を示す. G' は辺の結び方に依存して定まる.

(なお, 演算I, IIはグラフの平面性を必ずしも保持しない.)

2.4 準車輪グラフ

準車輪グラフとは車輪グラフであるか, または車輪グラフから演算IIのみを何回か反復して得られるグラフと定義する(図2). G を準車輪グラフとするとき, 演算IIの定義よりリム上の点(リム点と呼ぶ)には点分割は適用されないで, $V(G)$ はリム点集合 V_R とそれ以外の点(内部点と呼ぶ)の集合 V_I に分割される. V_I による G の誘導部分グラフ $G \langle V_I \rangle$ (G の辺で V_I 中の2点を両端点とするものにより定まる部分グラフ)は木で, G のハブ木と呼ぶことにする. さらに, G からリム上のすべての辺を除去して定まる生成木(spanning tree)を G の主生成木と呼ぶ.

なお, 本文中扱う準車輪グラフはリム C がすでに与えられているものとする. 準車輪グラフのリムを求めることの計算時間複雑度はまだ明らかでないが, 本稿で扱う平面準車輪グラフのリムを定めることは $O(|V(G)|^2)$ の計算時間があれば可能であることが[11]で示されている.

(補題1) 平面準車輪グラフ上で, ハブ木の任意の葉 v について v とリム上の1辺を含む3辺閉路が唯1つ存在する.

(証明略)

2.5 レールグラフ

3次正則平面準車輪グラフ G のハブ木を H , リムを C と表わす. H から $\delta_H(v) \neq 2$ なるすべての点 v を除去して生ずるパスを P_1, \dots, P_h とする. $h \geq 1$ の場合を考える. このとき, 任意の i ($1 \leq i \leq h$)について, G において P_i 上の点と隣接する C 上の点の集合を Q_i と表わし, $V(P_i) \cup Q_i$ により誘導される G の部分グラフを G のルールグラフと呼び, $R_i(v, w; G)$ と表わす. ここで v, w は P_i の両端点である. P_i を $R_i(v, w; G)$ のハブパスと呼ぶ. 図3には3次正則平面準車輪グラフと4つのルールグラフ R_1, \dots, R_4 (各々太実線で)を示している. 以後 $R_i(v, w; G)$ を表示する場合には, v が左側で w が右側に位置するようにハブパスを水平方向に置いて平面描画することにする. このとき, G の平面性から Q_i は C 上の丁度2つの(点を共有しない)パスを誘導する. 上側, 下側のパスをそれぞれ $R_i(v, w; G)$

の上リム, 下リムと呼ぶ。上リム, 下リムに接続するスポークをそれぞれ上スポーク, 下スポークと呼ぶ。どのスポークも平面描画上では交差していない。上スポーク, 下スポークいずれもが3本以上連続していないハブパスのことを, 特に2進ハブパスと呼ぶ。両端点が共に点被覆に含まれているスポークをバリアと呼ぶことがある。

2.6 解法の基本方針

与えられた3次正則平面準車輪グラフGからすべてのルールグラフを抽出する。Gでの各ルールグラフには, 左端, 右端いずれにも3辺閉路が接続されていないとき, その一方または両方の先端に3辺閉路が接続されている場合がある。各ルールグラフの最小点被覆が得られたならばそれから, 隣接する各3辺閉路も含めたものに対する最小点被覆を得ることは簡単である。従って議論は大きく2つに分けられる。一つは各ルールグラフにおいて一つの被覆状況(詳細は後述)が与えられたときそれを含む最小(または極小)点被覆を求める算法についてである。もう一つは, すべてのルールグラフに対して最小(または極小)点被覆が求められることを前提として, 3つのルールグラフとそれらが接続されている次数3の点により誘導される部分グラフに対する最小(または極小)点被覆を求める算法についてである。前者では2進ハブパスを持つルールグラフに対する算法が本質的であり, 一般的なルールグラフはすべてこれに帰着できる。後者については基本的には可能なすべての被覆状況の組合せの中から適当なものを選ぶ方法をとる。以下ではこのような流れに沿って説明してゆく。

3. ルールグラフの最小点被覆

3.1 基本被覆法TURN(CF, x, y)

ここでは2進ハブパスを持つルールグラフR(v, w; G) (=Rと表す)において, その部分グラフS(v, y; R) ($y \leq w$)のある条件を満たす一つの極小な点被覆NSを求める手続きTURN(CF, x, y)を示す。ここで, $x=v$ であり, yはRのハブパスP上で $v=x, y, w$ の順に ($y=w$ もあり得る)出現する点である。xからyまでのP上の点と, これらに隣接するC上の点から誘導されるRの部分グラフがSR(x, y; R) (=SRと表す)である。SRもまたルールグラフである。CFは以下に述べるいずれか一つの被覆状況である。xからyまでのP上の各点を $v_1(x), \dots, v_m(y)$ とし, 各点に接続するスポークを順に S_1, S_2, \dots, S_m と表すことにする。もし, S_i が上スポークならば $S_i=(u_i, v_i)$ と表し, S_i が下スポークならば $S_i=(v_i, d_i)$ と表すことにする。

各スポーク S_i に対してそのセクション ST_i を以下の様に帰納的に定義する。なお, 簡単のため S_i が上スポークの場合のみ述べる。

- (1) $i=1$ の場合: (S_1 は上スポーク)もし S_2 が上スポークならば $ST_1=\{u_1, v_1, d_2\}$ とし(図4(1)), もし S_2 が下スポークならば $ST_1=\{u_1, v_1, d_2\}$ とする(図4(2), (3))。
- (2) $i \geq 2$ に対して, S_i が上スポークのとき, S_{i+1} が上スポークならば $ST_{i+1}=\{u_{i+1}, v_{i+1}\} \cup (ST_i - \{u_i, v_i\})$ とおき(図5(1)), S_{i+1} が下スポークならば $ST_{i+1}=\{u_i, v_{i+1}, d_{i+1}\}$ とおく(図5(2), (3))。 S_i が下スポークのとき, S_{i+1} が下スポークならば $ST_{i+1}=\{v_{i+1}, d_{i+1}\} \cup (ST_i - \{v_i, d_i\})$ とおき(図6(1)), S_{i+1} が上スポークならば $ST_{i+1}=\{u_{i+1}, v_{i+1}, d_i\}$ とおく(図6(2), (3))。

図4(1)における ST_1 と ST_2 , 同図(2), (3)における ST_1 以外のセクション ST_i については, S_i の両端点と S_{i-1} または S_{i-2} の端点からなる(これはP上を左から右へ移動し

ながらセクションを考えていることによる)。

各セクション ST_i の3点を上から上リムの点, ハブパス上の点, 下リムの点を順に並べ, 各々が点被覆に属しているか否かの情報を示したものを被覆状況と呼び CF_i と表す。左から右へ(右から左へ)進むことを前提にしている場合は左被覆状況(右被覆状況)と呼ぶ。被覆状況としては図7に示す①~⑦の7種類ある(同図中, 黒点が点被覆に含まれることを示している)。以下では左被覆状況についてのみ述べる。この場合にはセクションは図5, 6に示した6種類(但し, 図4での例外は除く)である。

各セクション ST_i ($i \geq 2$)は図7①~⑦のいずれかの被覆状況 CF_i となるが, CF_i は初期に与えられるものとする。以下では図7①~⑦を単に①~⑦として引用する。ここで, $X_i=ST_i \cup \dots \cup ST_1$ とおき, X_i により誘導される $S(x, y; R)$ の部分グラフを SX_i とおく。今, SX_i に対する最小点被覆 N_i が得られているとする。このとき, $SX_{i+1}-SX_i$ の中から必要な最小数の点を選んで N_i に加えることにより SX_{i+1} に対する点被覆 N_{i+1} を構成する。この操作の結果 CF_i が CF_{i+1} に変化する。この変化を以下にまとめる。左の列に CF_i を書き, 図4, 5, 6の(1)~(3)の各々の場合において, 対応する CF_{i+1} を示す。 S_i が上スポークのときには $CF_i \neq \textcircled{3}$, 下スポークのときには $CF_i \neq \textcircled{1}$ である。

(i) $i=1$ のとき(図4)

$CF_i \Rightarrow$	(1);	(2)及び(3)
①	②	④
②	①	②
⑤	⑥	③
⑥	⑤	⑦
⑦	⑤または⑥	⑥

(ii) $i \geq 2$ 且つ S_i が上スポークのとき(図5)

$CF_i \Rightarrow$	(1);	(2)及び(3)
①	②	⑦
②	①	③
⑤	⑥	②または③
⑥	⑤	④
⑦	⑤または⑥	④または⑥

(iii) $i \geq 2$ 且つ S_i が下スポークのとき(図6)

$CF_i \Rightarrow$	(1);	(2)及び(3)
②	③	①
③	②	⑦
④	⑥	①または②
⑥	④	⑤
⑦	⑤または⑥	④または⑥

なお, (i)において

$CF_i \Rightarrow$	(1);	(2)及び(3)
④	①または②	④

さらに, (ii)において

$CF_i \Rightarrow$	(1);	(2)及び(3)
④	①または②	⑥

また, (iii)において

$CF_i \Rightarrow$	(1);	(2)及び(3)
⑤	②または③	⑥

も一応考え得る組合せであるが, これらはいずれも必要でない(あるいは不要である)ことが確かめられる。

CF_i が①~⑦のそれぞれを取る場合について CF_{i+1} は①~⑦のうちの高々2つのみあり得る。もし $CF_i=\textcircled{7}$ の場合にはそれより右への操作を終了するものとする。 CF_{i+1}

が2通り存在した(従って $CF_{i+1} \neq \textcircled{7}$)としても CF_{i+2} は高々2通りである。しかも $CF_{i+1} = \textcircled{7}$ ならば $2 \leq j \leq i+1$ なる任意の S_j について $|N_{i+1} \cap V(S_j)| = 1$ である。ここで、 $V(S_j)$ は S_j の端点の集合である。一方、 $V(S_{i+1}) \subseteq N_{i+1}$ (つまり S_{i+1} がバリア)ならば必ず $CF_{i+1} = \textcircled{7}$ となる。

ところで $CF_{i+1} = \textcircled{7}$ となったとすると、これより右側部分の最小点被覆に入る点は N_{i+1} とは全く独立に選ぶことができる。すなわち、この部分で問題を分離することができる。従って、操作が $y=v_m$ に届く前に $CF_{i+1} = \textcircled{7}$ となったらここで操作を終了することにす。TURN(CF, x, y)が CF_j で終了したとする。すなわち、 $j=m$ であるかまたはある $j < m$ において $CF_j = \textcircled{7}$ となったときである。もし、 N_j が2通り存在するならば最終的な点被覆NSとしては、より点数の少ない方を選ぶことにす。但し、どちらも $CF_j = \textcircled{7}$ となる場合にはより右方に進んでいる方をNSとする。NSはSRの点被覆でCFで指定された点を含むものの中で要素数最小であることになる。

以上をまとめてTURN(CF, x, y)を記述しておく。ただし、記述を簡単にするため X_i と SX_i から X_{i+1} と SX_{i+1} への更新操作は明示しないことにす。

```
TURN(CF, x, y);
begin
i ← 1; NS ← {CF1の黒丸の点}; VC ← {NS};
X1 ← ST1;
SX1 ← X1により誘導されるS(x, y; R)の部分グラフ;
state ← "continue";
i ← i+1;
while (i ≤ m) and
(CV中にCFi-1 ≠ ⑦なるSXi-1の点被覆Nが存在する) do
begin
for (CFi-1 ≠ ⑦なるすべてのN ∈ VC) do
begin
VC ← VC - {N};
NUNiがSXiの点被覆となるような
最小集合Ni ⊆ STi - STi-1を選ぶ;
CF(NUNi) ← CFi;
VC ← VC ∪ {NUNi};
if CFi = ⑦ then index(NUNi) = i;
end;
rightend ← i;
i ← i+1;
end;
if VC - {N(1)} then N ← N(1);
if VC = {N(1), N(2)} then
if rightend < m then /* CF(N(1)) = ⑦; j=1, 2 */
N ← (N(1), N(2))のうちindexの値が他方より小さくないもの)
else /* rightend = m 且つ CF(N(1)) ≠ ⑦なるN(1)が一つは存在 */
N ← (CF(N(1)), CF(N(2)))のうち要素数が他方より小さくないもの);
Nとrightendを出力する;
end;
```

(補題2) TURN(CF, x, y)が ST_j で終了したとする。このとき、NSはCFで指定された点を含むような SX_j の点被覆の中で点数最小のものである。このときの計算時間は、 $O(|V(P)|)$ である。

(証明略)

TURN(CF, x, y)はP上をxから右方向へyまで移動する操作として述べた。逆に同様の操作をyからxへ移動しながら行うこともできる。この移動方向を示すために、右方向へ動く場合をRTURN(CF, x, y)、左方向に動く場合をLTRURN(CF, x, y)と表すことにす。

3.2 2進ハブバスを持つレールグラフの最小点被覆

前節のレールグラフ $R=R(v, w; G)$ にRTURN(CF, x, y)を適用したとき、 $j < m$ なる ST_j で操作が終了してNSが出力されたとする。NSはCFで指定された点を CF_j に含むような SX_j に対する最小点被覆である。このとき $CF_j = \textcircled{7}$ である。Rの部分グラフ $S(v_{j+1}, v_m; R)$ (= R' と表す)の最小点被覆を求めることを考える。R'に対しては CF_{j+1} 上は①~⑦のいずれかを仮定してもよいが、結局は得られる点被覆数が最小となるものを仮定することに他ならない。しかし、これを①~⑦すべてについて調べるのは時間がかかりすぎる。ここではユニットと呼ばれる部分グラフに注目して、より効率良く最小点被覆を求める方法を述べる。2進ハブバス上で、交互に連続する3本の上スポークと下スポークが検出されたとき、それらのスポークの端点から誘導されるGの部分グラフをユニットと呼ぶ(図8)。ユニットの最小点被覆は図8に示す(a)三角形、(b)台形型の2通りがある。

記法簡化のためR'を前節のR自身と考えて記号をそのまま用いる。基本的にはCFに①~⑦のどれかを仮定して、RTURN(CF, x, y)またはLTRURN(CF, x, y)を実行し、出来るだけ $|NS \cap S_i| = 1$ となる様に点被覆NSを構成してゆく。但し、ユニットの扱いが新しく追加される。

今、Pを v_1, v_2, \dots と見て行き、 v_j, v_{j+1}, v_{j+2} でユニットUが初めて出現したとする。簡単のため S_j と S_{j+2} が下スポーク、 S_{j+1} が上スポークの場合について説明する。 S_{j-1} は必ず下スポークである。更に S_{j-2} と S_{j-3} は共に上スポーク S_{j-4} と S_{j-5} は共に下スポーク、 \dots 、と以後 S_i まで2本1組の上スポークと下スポークが交互に並ぶ形となる。従って、 $j \geq 5$ ならば、 $S(v_i, v_{j-1}; R)$ は図9に示す部分グラフS'に分割してゆることができる(図10)。このとき、Rの任意の最小点被覆Nに対して

$$|V(S_i) \cap N| = 1 \quad j-4 \leq i \leq j-1$$

である。実際、図10において、 $v_{j-1} \in N$ ならば $u_{j-2}, v_{j-2}, d_{j-4} \in N$ であり、 $v_{j-5} (\in N)$ を含むS'及びそれより右のS'についても全く同様な選び方が繰り返される。明らかに $N \cap V(S')$ はS'の最小点被覆である。全く同様に、 $d_{j-1} \in N$ ならば $v_{j-2}, u_{j-2}, v_{j-4} \in N$ であり、 $d_{j-5} \in N$ として同じ選び方が反復される。あるS'の左側に別のS'を完全には含まないときにも、各スポークに対する点の選び方は同様に続行できる。

以上の基本的操作に基づきレールグラフ $R=R(v, w; G)$ の点被覆を求める操作BSW(v, w)を示す。

BSW(v, w);

1° $N \leftarrow \emptyset$;

2° vからwまでハブバス上を走査し、ユニットが検出されたならば、以下の3°から5°を実行する。そうでないならば、TURN(②, v, w)を実行し、求めたNSをNに加え、5°へ行く。

3° ユニットUが v_j, v_{j+1}, v_{j+2} を含むとする。このとき、Uに三角形及び台形型の2種類の被覆を行い、 $j \geq 2$ ならば、LTRURN(②, v, v_{j-1})を実行し、求めたNSをNに加える。

4° 三角型(各々, 台形型)について, $j+2 < m$ ならば RTURN(②, v_{j+2}, w) (各々, RTURN(③, v_{j+2}, w))を実行し, NSをNに加える.

5° $\text{rightend} < m$ (つまり $CF_{r_1, r_2, \dots, r_m} = \textcircled{7}$ で終了した)ならば, $v \leftarrow v_{r_1, r_2, \dots, r_m+1}$ として2°へ戻る. そうでなければ (つまり $\text{rightend} = m$ ならば), $N = R(v, w; G)$ の点被覆としてアルゴリズムを終了する.

(定理2) $BSW(v, w)$ で求めた点部分集合Nは, $R(v, w; G)$ の最小点被覆である.

(証明) 紙面の都合上, 証明の中心部分の概要のみを示す. ユニットUの右に進んで最初に出会う $CF_k = \textcircled{7}$ なる被覆状態までに經由する部分, すなわちRの部分グラフ $S(v, v_k; R)$ ($=S^*$ と表す)について考える. $S^* - V(U)$ の二つの部分グラフそれぞれの最小点被覆(各部分グラフが含むスポークの本数個の点で構成される)の集合をそれぞれNLとNRと表す. S^* の最小点被覆数は $|NL| + 3 + |NR| - 1$ ($=k$)以上である. もし, $|N^*| = k$ なる S^* の最小点被覆があったとすると N^* はUの点被覆は三角型または台形型かあるいはそれらと左右逆の点被覆しかあり得ないが, $BSW(v, w)$ の操作より $|V(S^*) \cap N^*| = 1$ ($1 \leq i \leq k-1$)ならば, S_k はバリアにならざるを得ない. 従って $|N^*| \geq k+1$ 以上でなければならず, 矛盾である. よって S^* の最小点被覆は $k+1$ 以上である.

(証明終わり)

3.3 レールグラフの最小点被覆への拡張

与えられたレールグラフのハブバスが2進ハブバスではないときに図11に示す変形操作により2進ハブバスを持つレールグラフに変形する. 変形後のレールグラフに対する最小点被覆を $BSW(v, w)$ により求めながら, 点被覆が求まっている部分のスポークを元のレールグラフへ復元しながらその復元部分の点被覆を追加してゆく操作を行う. バリアがない場合は容易である. バリアがあるときには若干の工夫がある. 例えば, 図11(a)の下側の図におけるスポークがバリアだとし, 左から右へ操作が進んでいくときには同図上側の(a, b)をバリアとして, その右側について(復元された部分も含めて)操作を反復する. 詳細は紙面の都合で省略する. それぞれの部分グラフに対していずれの場合も, 復元の前後で他の辺の被覆に全く影響はない. また, (復元後に点被覆に加えた頂点数) = (復元後のスポークの増加本数)の関係が成り立っているため, 点被覆の最小性は保存される.

以下では $BSW(v, w)$ に点被覆のレールグラフへの拡大操作を組込んだ操作を $SW(v, w)$ と示すことにする.

4. 交差ブロック

4.1 交差ブロックの構造

3次正則平面準車輪グラフGの最小点被覆を求めるための準備をする. Gのハブ木上の頂点でスポークが接続しない任意の頂点(点次数は3)をzとする. Gにおいてzと隣接するレールグラフを $R_\alpha, R_\beta, R_\gamma$ とし, zとの隣接点を端点とするスポークを含むセクションをそれぞれ $ST_\alpha, ST_\beta, ST_\gamma$ と表し, $R_\alpha, R_\beta, R_\gamma$ の被覆状況をそれぞれ $CF_\alpha, CF_\beta, CF_\gamma$ と表す. このとき,

{z} $UST_\alpha UST_\beta UST_\gamma$ から誘導されるGの部分グラフを交差ブロックと呼ぶ. 図12に交差ブロックを示す. 基本的には(つまり, 左右対称形や回転同値形等を除いて)この3種類である. 次章で $CF_\alpha, CF_\beta, CF_\gamma$ にどの様な被覆状況を仮定すれば最小被覆となるかを調べることにな

る. また, $CF_\alpha, CF_\beta, CF_\gamma$ をそれぞれこの交差ブロックの被覆断面と呼ぶ.

交差ブロックYと隣接するレールグラフ $R_\alpha, R_\beta, R_\gamma$ について考える. R_α (各々, R_β, R_γ)のハブバスの端点の内 C_α (C_β, C_γ)に含まれる端点を w_α (w_β, w_γ)とし, もう一方の端点を v_α (v_β, v_γ)とする. $SW(v_\alpha, w_\alpha)$ ($SW(v_\beta, w_\beta), SW(v_\gamma, w_\gamma)$)が実行されたとき得られる点被覆を NR_α (NR_β, NR_γ)とする. w_α (w_β, w_γ)からハブバス上を v_α (v_β, v_γ)へと走査したときバリアに出会えばそのバリアの接続するハブバス上の端点をxとし, バリアに出会わないときは, v_α (v_β, v_γ)をxとする. このとき, xと w_α (w_β, w_γ)までの部分ハブバスに接続するスポークの端点から誘導される部分グラフを R_α (R_β, R_γ)の w_α (w_β, w_γ)側のブロックと呼ぶ.

4.2 ブロックの型

ブロックはその構造から主に次の3つの型に区別する. 前期型: ブロック B_j がユニットを含まない. (ただし, 中心点zが直接3辺閉路と隣接し, ブロックが頂点を持たない場合もこの型に含むものとする.)

中期型: ブロック B_j がユニットUを含み, 三角型と台形型のどちらの被覆をUについて施しても, B_j の点被覆にバリアが発生しない.

後期型: ブロック B_j がユニットUを含み, 三角型か台形型的一方または両方の被覆をUについて施したときに, B_j 内にバリアが発生する.

4.3 トランス

あるブロック B_j ($j \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$)被覆断面 CF_k について考える. B_j の最小点被覆を NB_j としたとき, B_j が前期型及び中期型のブロックであったならば, NB_j に含まれる頂点の個数を増やすことなく, CF_k に2種類の被覆状況を実現することができる. 一つの被覆状況が得られているときに, 意図的にもう一方の被覆状況を実現するようにブロックの最小点被覆を再構成する操作を上ランスと呼ぶ. トランスについて次の結果が得られる. ただし, \Leftrightarrow はその両側の被覆状況間でトランスが行なわれるという意味である.

(I) B_j が前期型であり, 上スポーク, 下スポーク共に含む場合: ① \Leftrightarrow ⑤, ③ \Leftrightarrow ④, ② \Leftrightarrow ⑥

(II) B_j が前期型であり, 上スポーク (各々, 下スポーク)のみを含む場合: ① \Leftrightarrow ②, ⑤ \Leftrightarrow ⑥ (② \Leftrightarrow ③, ④ \Leftrightarrow ⑥)

(III) B_j が中期型であり, 被覆断面の頂点から誘導されるスポークが上スポーク (各々, 下スポーク)である場合: ① \Leftrightarrow ② (② \Leftrightarrow ③)

4.4 交差ブロックと被覆断面

交差ブロックYに隣接するブロック B_j ($j = \alpha, \beta, \gamma$)の被覆が得られたときそれに応じて各被覆断面 CF_j が定まる. CF_j ($j = \alpha, \beta, \gamma$)の各組合せに対して, まだ被覆されていないY上の辺を被覆するために必要な最小の頂点数を組合せの不足数と呼ぶ.

5. 任意の3次正則平面準車輪グラフの点被覆

任意の3次正則平面準車輪グラフGの点被覆を求めることを考える. また, レールグラフの特殊な構造として, スポークを持たない場合, 1本のみ持つ場合, 同種のスポークを2本のみ持つ場合が考えられるが, ほぼ同様の

議論で処理できるので紙面の都合上詳細は省略する。

基本的には各レールグラフの最小点被覆と各交差ブロックにおいて $7 \times 7 \times 7 = 343$ 通りの組合せの各々に対する最小点被覆を憶えておき、これらの中から最小のものを選ぶことである。しかし、各交差ブロックではもっと少ないその組合せで十分であることが示される。

5.1 レールグラフの極小点被覆

BSW(v, w)を利用して、レールグラフR(v, w; G)の点被覆を求める際に、予め与えられた左、右両端の被覆断面を実現する点被覆が存在したときのみに、その内で最小の頂点数から成る点被覆を選ぶように修正する。また、ここでは極小性を重視するため、実現可能なものでも明らかな冗長性を含む場合には実現不可能と判定する場合もある。この操作をMBSW(LCF, v, w, RCF)と表す。ここでLCF, RCFはそれぞれ左端と右端の被覆状況である。この操作の計算時間は $O(|V(R)|)$ である。また、SW(v, w)に対して同様の修正を組込んだものをMSW(LCF, v, w, RCF)と表す。

5.2 コンビネーショングラフ

ここで、レールグラフRについての補助グラフCOM(R)を定義する。まず、図3のR₁を例にとり具体的にCOM(R₁)の作成手順を示す。但し、ハブバスの左端をv、右端をwとし、図3の左端のセクションをSTL、右端をSTRとする。図14(b)を参照されたい。

(1) vに接続するスポークは、下スポークなので、STLの被覆状況として①と⑤は除外できる。STLの被覆状況CFL ∈ {②, ③, ④, ⑥, ⑦}の各々に対応する5頂点(以後、L点と呼び、簡単のため②, ③等とそのまま用いる)を用意する。同様に、STRについても被覆状況CFRを表すR点を用意するのであるが、後の議論の都合上、STLについては図の上から下に、順に上リム点、ハブバス点、下リム点とするが、STRについては、順に下リム点、ハブバス点、上リム点としていることに注意されたい。従って、R点としては①, ②, ③, ④, ⑥, ⑦を用意する。各L点CF_L、及び各R点CF_Rにはポテンシャルと呼ばれる整数が付加される。それぞれ#CF_L、#CF_Rと表す。但し、#CF_Lの与え方については後述するので、ここでは予め与えられているものとしておく。一方、#CF_R = ∞とする。

(2) R₁に対してSW(v, w)を実行し得られた点被覆をNR₀とする。このとき、CFL = ③且つ、CFR = ①となる。また、|NR₀| = 6であり、トランスはできない。L点の③とR点の①との間に辺を付加し、その辺重みとして0を与える。

(3) 次にMSW(②, v, w, ①)を実行し、得られた点被覆をNR₁とする。L点の②とR点の①との間に辺を付加し、その辺重みとして|NR₁| - |NR₀| (今の場合1)を与える。同様な操作を、CFL ∈ {②, ③, ④, ⑥, ⑦}、CFR ∈ {①, ②, ⑤, ⑥, ⑦}なる任意の組合せ{CFL, CFR}について実行し、同様の辺とその重みの付加を行う。但し、{CFL, CFR} ∈ {{③, ⑦}, {③, ⑥}, {③, ⑤}, {③, ②}, {⑦, ⑤}, {⑦, ②}}なる組合せについては、MSW(CFL, v, w, CFR)で“実行不可能”と判定されるので辺と重みの付加はしない。

(4) 各R点CF_Rに対して、以下のポテンシャル割当てを行う。CF_{1}, ..., CF_{1k}を(2), (3)の操作の結果CF₁と隣接したL点とし、辺(i_a, j)の重みを0(i_a, j)と表す。このとき、CF₁のポテンシャルを}

$$\#CF_1 = \min\{\#CF_{1a} + 0(i_a, j) \mid a=1, \dots, k\}$$

とし、更に#CF₁ = #CF_{1a} + 0(i_a, j)なる辺(i_a, j)のみを残し、他の辺(ib, j), 1 ≤ b ≤ k; b ≠ a, はすべて除去する。

上の(1)~(4)の操作で得られたグラフがCOM(R₁)であ

る。COM(R₂)のL点とR点の間に辺eがあることは、R₂においてCFLとCFRを実現する。(eの重み)+|NR₀|個の要素数をもつ点被覆が存在することを意味する。COM(R₂)を構成したことはCFLとCFRのすべての組合せの中で、実際に存在し得る最小点被覆をすべて調べて、その各々の頂点数を保持していることに他ならない。

次に、交差ブロックYについての補助グラフCOM(Y)を定義する。図3のR₁, R₂, R₃に接続する交差ブロックY₁を例にとり、具体的にCOM(Y₁)の作成手順を示す。図14(a)を参照されたい。この場合、形としては図12(1)に対応する。ただし、R₁, R₂, R₃が接続する点をz₁とし、同図に示すようにR₁のセクションST₁を考える。z₁を中心に時計回りに、ST₁を含む頂点をそれぞれ上リム点u₁、ハブバス点v₁、下リム点d₁とする。ST₁の被覆状況CF₁に対応しておかれるCOM(Y₁)の頂点をそれぞれL₁点またはR₁点と呼ぶ。レールグラフ、交差ブロックいずれについても補助グラフの作り方はL点(またはL₁点)からR点(またはR₁点)へ向かって進みながら行われることを示すためである。

今、図14(a)で示されるようにR₂点が③, ④で、R₁点が①, ⑤であり、各々の頂点にはポテンシャル(図の左肩の数字)が与えられているとする。

(1) ST₁のスポークS₂₁ = (v₂₁, d₁₁)は下スポークなので、CF₂ ∈ {②, ③, ④, ⑥, ⑦}となる。

(2) CF₂ ∈ {③, ④}、CF₁ ∈ {①, ⑤}の任意の各組合せ(CF₂, CF₁)について新しく1頂点T(CF₂, CF₁)を用意し、R₂点CF₂とT(CF₂, CF₁)との間、及び、T(CF₂, CF₁)とR₁点CF₁との間、それぞれに重み0の辺を付加する。R₂点CF₂のポテンシャルとR₁点CF₁のポテンシャルとの和をT(CF₂, CF₁)のポテンシャルとする。例えばR₂点③とT(③, ①)、T(③, ①)とR₁点①との間に重み0の辺を接続し、(③のポテンシャル)+(①のポテンシャル)=0をT(③, ①)のポテンシャルとする。

(3) 各ST_iの被覆状況がCF_iであった場合のY_iの不足数をL(CF₁, CF₂, CF₃)と表す。各L_i点CF_i ∈ {②, ③, ④, ⑥, ⑦}について、T(CF₂, CF₁)のポテンシャルとL(CF₁, CF₂, CF₃)との和を最小とするR₂点②とR₁点⑤を選ぶ。T(②, ⑤)とL₂点CF₂との間に重み0の辺を付加する。L₂点のポテンシャルについては、例えばCF₂ = ②のときは、T(②, ⑤)のポテンシャルは(今の場合どの組{CF₂, CF₁}についても)0であり、L(④, ⑤, ⑥) = 1で不足数最小となるので、L₂点②のポテンシャルを#② = 1とする。

上の(1)~(3)の操作で得られたグラフがCOM(Y₁)である。1 ≤ i ≤ 2なるR₁点はレールグラフR₁の補助グラフCOM(R₁)のR点により与えられる。このことはすべての交差ブロックについても同様である。

COM(Y₁)は、CF₁, CF₂, CF₃すべての組合せ(343通り)の中で実際に存在し得る最小点被覆をすべて調べて、その各々の頂点数を保持している。

ここまではCOM(R₂)とCOM(Y₁)のように各補助グラフの構成法を単独に示したが、これらの構成は以下の順序に従う。すなわち、COM(R₁)とCOM(R₂)の構成が終了してから(つまりCF₁とCF₂が確定してから)、R₁点とR₂点、及びL₂点によってCOM(Y₁)を構成する。L₂点をR₂のL点とし、これらとR₂のR点によってCOM(R₂)を構成するという順序である。図14ではCOM(R₂)とCOM(Y₁)を別々に表示している。これをひとまとまりにしてみると、Y₁のCF₁, CF₂、及びR₂のCFRのすべての組合せの中で存在し得る最小点被覆をすべて調べて、その各々の頂点数を記憶しているのがわかる。

Gに対して以下の操作を実行する。

(1) Gの3辺閉路に接続するレールグラフが存在しなければ操作を終了する。そうでなければ、その様なレールグラフ R_i をまず選び、 $COM(R_i)$ を構成する。但し、 R_i のL点にはポテンシャル0を与える。

(2) (i) 以下の操作を可能な限り反復する：もし接続する3つのレールグラフ R_1, R_2, R_3 のうち2つ、例えば R_1, R_2 、に対して $COM(R_1), COM(R_2)$ が構成済であるような交差ブロックYが存在するならば、 $COM(Y)$ を構成する。

(ii) (1)に戻る。

上記の操作が終了したとき、すべてのレールグラフと交差ブロックは処理済となり、1つのグラフが生じる。これがGのコンビネーショングラフ $COM(G)$ である。 $COM(G)$ を構成することはR点(及び R_i 点)、L点(及び L_i 点)のすべての組合せの中で存在可能な最小点被覆を求めたことに他ならない。但し、 $COM(G)$ の構成過程でレールグラフから交差ブロックへ、交差ブロックからレールグラフへと補助グラフの構成が移ってゆく際に高々7種類の2項組{被覆状況, 点のポテンシャル}を伝えてゆく。このことにより探索すべき場合の数の増加が抑えられている。

(注1) $COM(Y)$ の縮小(図14(b)において右肩に×印が付加されたR点を候補から省くことができる。)に関して次の補題を示すことができる(証明は省略する)。

(補題5) コンビネーショングラフ $COM(G)$ 上で、任意の交差ブロック Y_i についての $COM(Y_i)$ の R_1 点、 R_2 点は高々3個、 L_3 点は高々5個に縮小できる。
(証明略)

5.3 最小点被覆問題解法SW3

与えられた3次元正則平面準車輪グラフGの最小点被覆を求める操作SW3の概略をまとめておく。

1° Gのすべてのレールグラフと交差ブロックを抽出する；

2° $COM(G)$ を構成する；

3° $COM(G)$ を利用してすべてのレールグラフと交差ブロックにより定まるGの部分グラフに対する最小点被覆NSを求める；

4° NSを3辺閉路に拡大してGの最小点被覆NSを得る；

SW3の正当性を簡単に述べておく。 $COM(G)$ の構成は、最後にあるレールグラフのR点が決まって終了する。この中でポテンシャルが最小の点の一つを選び、この点から $COM(G)$ 上の辺と点を操作の逆に辿る。これにより、すべてのレールグラフにおけるL点とR点の一つずつ、またすべての交差ブロックにおける R_1 点、 R_2 点、 L_3 点の一つずつ、それぞれ含むような木が得られる。この木はすべてのレールグラフと交差ブロックにより定まるGの部分グラフ(Gからリム上の辺を含むような3辺閉路をすべて除いて定まる部分グラフ)の最小点被覆を与える。3辺閉路へ最小性を保持しながら点被覆の拡大をすることができるので、結局Gの最小点被覆が得られる。

次にSW3の計算時間について述べておく。任意の3次元正則平面準車輪グラフ $G(V, E)$ についてSW3を実行したときの計算時間について考える。まず、1つのレールグラフ R_i に対して行なわれる操作の手間の総和を考える。 R_i に対して、 $SW(v, w)$ が2回実行され、 $MSW(Fst, v, w, Lst)$ が高々 $5 \times 5 = 25$ 回実行される。 $SW(v, w), MSW(Fst, v, w, Lst)$ 共に $O(|V(R_i)|)$ の手間で実行され、 COM 上で R_i に対応する

部分グラフを構築する手間は $O(1)$ であるので、 R_i に対して行なわれる操作の手間の総和は $O(|V(R_i)|)$ である。

次に、1つの交差ブロック Y_i に対して行なわれる操作の手間の総和を考える。 $COM(Y_i)$ の R_1 点、 R_2 点、 L_3 点の組み合わせは高々 $3 \times 3 \times 5 = 45$ 通りであり、 $COM(Y_i)$ を構築する手間は $O(1)$ であるので、 Y_i に対して行なわれる操作の手間の総和は $O(1)$ である。

任意の R_i, Y_i について、上で示した手間を要する。したがって、全ての手間の総和は、

(レールグラフに対する手間) + (交差ブロックに対する手間) + (3辺閉路の被覆を行なう手間)

$$= \sum O(|V(R_i)|) + \sum O(1) + O(1)$$

ここで、 $\sum |V(R_i)| < |V|$ なので、 $\sum O(|V(R_i)|) = O(|V|)$ である。よって、このアルゴリズムは線形時間で実行可能である。

6. 今後の課題

今後の課題としては、まず、本手法を平面準車輪グラフを扱えるように拡張することの検討がある。次には、準車輪グラフの最小点被覆問題に対して、計算時間複雑度解析が考えられる。

参考文献

- [1] S. Arnborg and A. Proskurowski, Linear-Time algorithms for NP-hard problems restricted to partial k-trees, *Discrete Applied Mathematics*, 23, pp. 11-24 (1989).
- [2] M. R. Garey and D. S. Johnson, The rectilinear steiner tree problem is NP-complete, *SIAM J. App. Math.*, 32, 4, pp. 826-834 (1977).
- [3] 伊理, 藤重, 大山著, “グラフ・ネットワーク・マトロイド” 産業図書(1986).
- [4] 大山, “7M J' R' A” 情報処理実用シリーズ 6, 丸善閣(1989).
- [5] 尾崎, 白川, 翁長著, “グラフ理論” コロナ社(1975).
- [6] K. Takamizawa, T. Nishizeki and N. Saito, Linear-Time Computability of Combinatorial Problems on Series-Parallel Graphs, *J. ACM*, Vol. 29, No. 3, pp. 623-641 (1982).
- [7] W. T. Tutte, *Connectivity in Graphs*, Univ. of Tronto Press, London, U.K., 1966.
- [8] 上野, 辻, 梶谷, “CMOSゲート回路のゲート配置問題の計算複雑度について” 信学技報 CAS87-207, pp. 67-71 (1987-12).
- [9] T. Watanabe, T. Ae, and A. Nakamura, On the node cover problem of planar graphs, *Proc. IEEE ISCAS*, pp. 78-81 (1979).
- [10] T. Watanabe, S. Kajita and K. Onaga, Vertex covers and connected vertex covers in 3-connected graphs, *Proc. 1991 IEEE ISCAS*, pp. 1017-1020 (1991).
- [11] 渡辺, 中村, “3-連結グラフの連結点被覆問題” 信学技報 AL81-79, pp. 51-56 (1981-11).

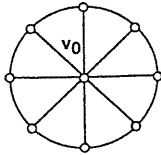


図1. 車輪グラフ.

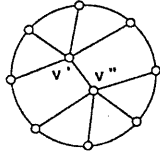


図2. 点分割(図1の点 v_0 の分割により生ずる一つの準車輪グラフ).

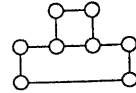


図9. 部分グラフ S' .

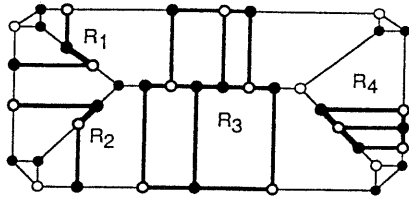


図3. 3次正則平面準車輪グラフ G とその最小点被覆.

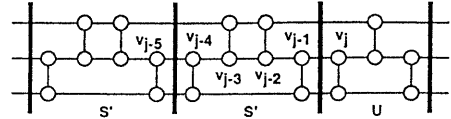
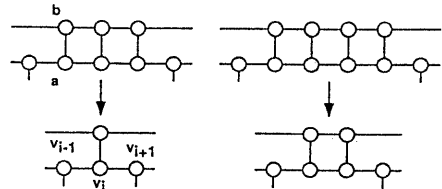


図10. $S(v_1, v_{j-1}; R)$ の S' への分割.



(a) 3本以上の奇数本の連続するスポーク. (b) 4本以上の偶数本の連続するスポーク.

図11. 2進ハブバスを持つレールグラフへの変形.

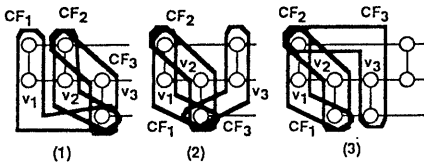


図4. S_1 が上スポークの場合のセクション ST_1 .

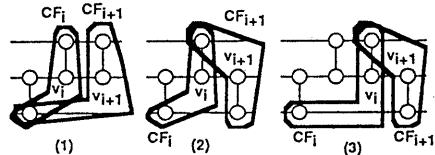


図5. S_1 が上スポークの場合のセクション ST_{i+1} ($i \geq 1$).

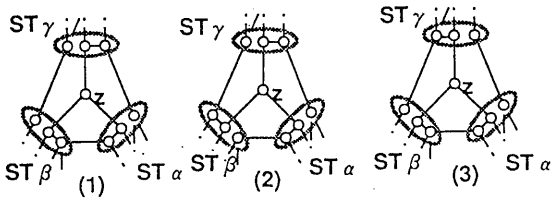


図12. 交差ブロック.

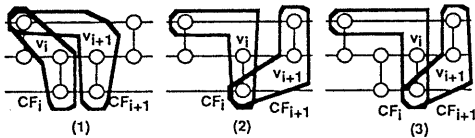


図6. S_1 が下スポークの場合のセクション ST_{i+1} ($i \geq 1$).

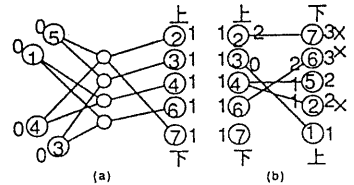


図14. 補助グラフ (a) $COM(Y_1)$ と(b) $COM(R_3)$

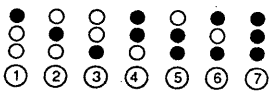


図7. 被覆状況.

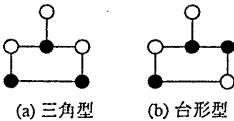


図8. ユニットとその最小点被覆.

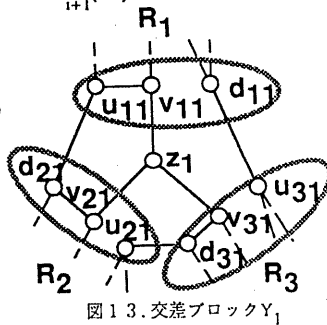


図13. 交差ブロック Y_1

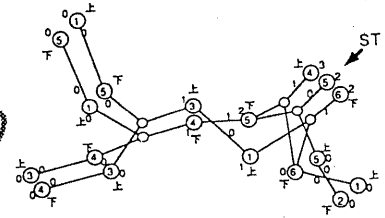


図15. G のコンビネーショングラフ $COM(G)$