多角形を捜索するために必要な捜索者数について*

梅本 秀樹† 鈴木 一郎‡ 山下 雅史†

†広島大学工学部第2類 ‡ウイスコンシン大学ミルオーキー校

多角形内部を移動する侵入者を, 1本のフラッシュライトをもつ移動可能な複数の捜索者 (1-捜索者) によって捜索する問題について考える. 捜索者は自分のライトが照らしている直線上しか見ることができない. 辺数 n の任意の多角形内の侵入者を見つけるのに必要な捜索者数, および十分な捜索者数を求める.

Searching a Polygon by 1-Searchers

Hideki Umemoto † Ichiro Suzuki‡ Masafumi Yamashita †

†Department of Electrical Engineering, Hiroshima University
Kagamiyama, Higashi-Hiroshima, 724, Japan
ume@se.hiroshima-u.ac.jp, mak@se.hiroshima-u.ac.jp

‡Department of Electrical Engineering and Computer Science
University of Wisconsin - Milwaukee
P.O. Box 784, Milwaukee, WI 53201, U.S.A.
suzuki@blatz.cs.uwm.edu

The problem of searching for a mobile intruder in a polygonal region by mobile searchers having a flashlight whose visibility is limited to a ray emanating from his position is considered. In this report, we determine an upper and a lower bounds on the number of searchers necessary to find a intruder for any polygon of n edges.

*本研究は、一部, 科学研究費補助金 (一般研究 (C) 06680324), NFS IRI-9307506. ONR N00014-94-1-0284, の補助を受けている. なお, 鈴木は現在, 大阪大学基礎工学部寄付講座 (日立製作所) 所属.

1 はじめに

本稿では, 多角形内部を移動する侵入者を複数の捜索者によって捜索する問題を考察する.

多角形内部に存在する動かない侵入者を捜索する問題には, 多角形の内部のすべての点が少なくとも 1 点から見えているように固定点を配置する美術館問題 (art gallery problem)[3, 5, 6] や, 多角形の内部のすべての点が 1 度は見えるような巡回路を見つける巡回警備員問題 (watchman route problem)[1] があり, 盛んに研究されてきた.

一方, 多角形内部の移動する侵入者を捜索する問題として, 移動しない複数の捜索者によって捜索するサーチライトスケジューリング問題 [8] や, 移動可能な 1 人の捜索者によって捜索する多角形捜索問題 (polygon search problem)[2, 9] が検討されている. [2, 9] では, 捜索者の視野が k本のフラッシュライトに制限された k-捜索者や, 同時に 360 度を見ることができる ∞-捜索者について, 捜索できる単純多角形の条件が検討されている. しかし, これらの条件の多くは, 必要あるいは十分条件であって, 必要十分条件は, ある多角形が 1 人の 1-捜索者によって捜索できる場合ですら未解決で残されている.

本稿では, 辺数 n の多角形を何人の 1-捜索者 (以降捜索者は 1-捜索者を意味する) によって捜索できるか, 多角形の形状によらず捜索できるための捜索者数の上限と下限を示す. 捜索者数の上限を求めるために, 与えられた多角形の三角形分割から得られる双対グラフに対するグラフ辺捜索問題 [4, 7] を論ずる. 辺数 n の任意の多角形を捜索するために必要な捜索者数の下限を求めるために, ある具体的な多角形を与え, その捜索者数について論ずる.

2 問題の定式化

P を n 個の頂点をもつ多角形とその内部の領域とする. P に穴が存在する場合, 穴を構成する頂点数も n に含まれる. 2 点 $p, q \in P$ は, もし $\overline{pq} \subseteq P$ なら互いに見えるという.

多角形 P の三角形分割は, 頂点間の対角線によって, 多角形の内部を三角形領域に分割することである. P の三角形分割から得られる双対グラフは, 三角形集合を節点集合とし, 三角形の組が対角線を共有しているなら対応する節点間に辺を有するグラフである. 一般に, P には異なる三角形分割が複数存在するから, このようにして得られるグラフも一意には決まらない. P から得られる双対グラフの (任意の)1 つを $DG(P)$ で表す.

2.1 多角形捜索問題

1 本のフラッシュライトをもち, P 内を移動する捜索者を考える. 捜索者の視界は捜索者の位置から放射される 1 本の光線に限られている. 侵入者が多角形内を移動する速度は, 捜索者の移動する速度と捜索者がライトを動かす速度よりも任意に速いとする. また, 侵入者は連続的な動きをし, ある点から別の点に飛び移ることはない.

捜索者 p_iのスケジュールは, 捜索者の位置を表す連続関数 $s_i : [0, t_T] \to P$ とフラッシュライトを向ける位置を表す連続関数 $f_i : [0, t_T] \to P$ の組 (s_i, f_i) である. ここで, 任意の時刻 $0 \leq t \leq t_T$ について, $\overline{s_i(t)f_i(t)} \subseteq P$ であることが要請される.

$f_i(t)$ は常に P の境界上の点とは限らないことに注意する. したがって, この捜索者の定義は, フラッシュライトをもった捜索者のモデル化にそぐわないように感じるかもしれないが, 簡単な観察をすれば, この定義が捜索者の能力を増していないことが容易に理解できるであろう.

k 人の捜索者のスケジュールは $1 \leq i \leq k$ に対して, 各捜索者 p_i が実行するスケジュールの組 $\mathcal{S} = \{(s_i, f_i) \mid 1 \leq i \leq k\}$ である.

スケジュール $\mathcal{S}$ を実行するとき, 時刻 $t_i \in [0, t_T]$ において, 点 $x \in P$ が未捜索であるのは, ある連続関数$\rho : [0, t_T] \to P$ が存在し, $\rho(t_i) = x$, かつ, 各 $t \in [0, t_i]$ に対して $\rho(t)$ がどの捜索者にも見られていないときである. すなわち, どの $i (1 \leq i \leq k)$ に対しても, $\rho(t) \notin \overline{s_i(t)f_i(t)}$ を満たすときである. 未捜索でない点は既捜索である.

時刻 t_T に P のすべての点が既捜索となる k 人の捜索者のスケジュールが存在するなら, P は捜索可能であるといい, そのようなスケジュールを捜索スケジュールという. 多角形 P の捜

索に必要十分な捜索者の数を P の多角形捜索者数といい, $ps(P)$ で表す.

$V(x)$ を x から見える P の点の集合とする. 点 $x, y, z \in \mathrm{P}$ に対して, y と z 間の P 内の最短経路が $V(x)$ の少なくとも1点を含んでいるなら, y と z は x によって分離されるという. 点 $x, y, z \in P$ は, 3点のどの2点も第3の点から分離できないなら, 互いに分離不可能であるという.

定理 1 [9] P が1人の捜索者で捜索可能であるなら, P に互いに分離不可能な3点は存在しない. □

分離不可能性は, 残念ながら, P が捜索可能であるための十分条件となっていない [9].

2.2 グラフ捜索問題

グラフ捜索問題 (辺捜索) は, 次の操作によって, 与えられたグラフのすべての辺を, 同時に, できるだけ少ない捜索者で既捜索にすることである. 捜索者に許されている動きは次の3つである.

(i) 捜索者を節点に配置する.

(ii) 捜索者を節点から取り除く.

(iii) 捜索者を辺に沿って移動させる.

このとき, ある辺 $e = (u, v)$ を次の方法の1つによって既捜索にすることができる.

(1) u に1人の捜索者を置き, もう1人の捜索者を e に沿って u から v に移動する.

(2) u に1人の捜索者を置き, u に接続する e 以外のすべての辺が既捜索であるとき u にいた捜索者を e に沿って v に移動することで e を含む u に接続するすべての辺が既捜索になる.

この問題の興味あるポイントは, 1度捜索された辺も, 未捜索の辺との間に, 捜索者が存在しないようなパスができた瞬間に未捜索に戻される所である.

グラフ G の捜索に必要十分な捜索者の数を G のグラフ捜索者数といい, $es(G)$ で表す.

定理 2 [7] H が G の連結部分グラフなら, $es(H) \leq es(G)$ である. □

木 $T = (V, E)$ と $v \in V$ が与えられたとき, 次の性質をもつ T の部分木 T' を v の branch という.

(i) T' において, v は葉である.

(ii) T' は (i) の性質をもつものの中で最大部分木である.

定理 3 [7] 任意の木 T と任意の整数 $k \geq 1$ に対して, $es(T) \geq k+1$ であるための必要十分条件は, 捜索者数 k 以上の branch を3つ以上もつような節点が T に存在することである. □

捜索者数 k の branch を k-branch と呼ぶ. 次の性質をもつ2個以上の節点のパス $v_1, v_2, \ldots, v_l$ を avenue と呼ぶ.

(i) $v_1(v_l)$ は $v_2(v_{l-1})$ を含む k-branch を1つもつ.

(ii) 任意の $i(2 \leq i \leq l-1)$ に対して, v_i は v_{i-1}, v_{i+1} を含む k-branch を2つもつ.

補題 1 [4] 任意の木 $T = (V, E)$ に対して, $es(T) = k$ ならば以下のいずれかが成立する.

(i) ある $v \in V$ が存在して, v のすべての branch の捜索者数は k より小さい.

(ii) T は avenue をちょうど1つもつ.

□

3 単純多角形

本章では, 穴のない多角形を考察する.

3.1 一般の単純多角形

3.1.1 捜索者数の上限

単純多角形 P の三角形分割から得られる双対グラフ $DG(P)$ に対するグラフ捜索者数 $es(DG(P))$ を用いて, $ps(P)$ の上限を求める.

補題 2 P を (穴があるかもしれない) 多角形とし, 外部との境界線上の点 x, y が $\overline{xy} \subseteq P$ を満たしているとする. $\overline{xy}$ によって区切られた部

分多角形の1つを Q とする．Q は $\overline{xy}$ を含むものとする．$s:[0,t_T]\to P, f:[0,t_T]\to P$ を任意の $0\le t\le t_T$ について，$\overline{s(t)f(t)}\in P$ を満たすような任意の連続関数の組とするとき，$\overline{s(t)f(t)}\cap Q\ne\phi$ のときには常に $\overline{s'(t)f'(t)}=\overline{s(t)f(t)}\cap Q$ を満たすような連続関数の組 $s':[0,t_T]\to Q, f':[0,t_T]\to Q$ が存在する．

(略証)　(s,f) から (s',f') を次のように構成する．$I=\{t\in[0,t_T]\mid \overline{s(t)f(t)}\cap Q\ne\phi\}$ とする．

まず，$t\in I$ の場合，次のように (s',f') を構成する：

- $s'(t)=\begin{cases} s(t) & : s(t)\in Q \text{ の場合} \\ \overline{xy}\cap\overline{s(t)f(t)} & : \text{それ以外の場合.}\end{cases}$
- $f'(t)=\begin{cases} f(t) & : f(t)\in Q \text{ の場合} \\ \overline{xy}\cap\overline{s(t)f(t)} & : \text{それ以外の場合.}\end{cases}$

次に，$t\notin I$ の場合，次のように (s',f') を構成する：

t を含む，$[0,t_T]-I$ の極大連続区間は3つの型 (i)$[0,t_1)$, (ii)(t_1,t_2), (iii)$(t_2,t_T]$ のいずれかである．(i) の場合，任意の $t\in[0,t_1)$ について，$s'(t)=s'(t_1), f'(t)=f'(t_1)$ とする．(iii) の場合，任意の $t\in(t_2,t_T]$ について，$s'(t)=s'(t_2), f'(t)=f'(t_2)$ とする．(ii) の場合，s' と f' は，それぞれ，$s'(t_1)$ から $s'(t_2)$ へ，$f'(t_1)$ から $f'(t_2)$ へ等速で移動する関数として定義する．

このように定義した関数の組 (s',f') が補題の条件を満たすことは，構成法より明らかである．　□

定理 4 P を(穴があるかもしれない)多角形とし，外部との境界線上の点 x,y が $\overline{xy}\subseteq P$ を満たしているとする．$\overline{xy}$ によって区切られた部分多角形の1つを Q とする．Q は $\overline{xy}$ を含むものとする．このとき，$ps(Q)\le ps(P)$ である．

(略証)　$\mathcal{S}=\{(s_i,f_i)\mid 1\le i\le k\}$ を P の捜索スケジュールとする．各 $i(1\le i\le k)$ に対して，補題2の条件を満たす連続関数の組を $s'_i:[0,t_T]\to Q, f'_i:[0,t_T]\to Q$ とする．このとき $\mathcal{S}'=\{(s'_i,f'_i)\mid 1\le i\le k\}$ は Q の捜索スケジュールである．したがって，Q は k 人の捜索者で捜索できる．　□

補題 3 単純多角形 P を三角形分割して得られる双対グラフの1つを $DG(P)$ とする．このとき，$ps(P)\le es(DG(P))$ である．

(証明)　P は単純だから，$DG(P)$ は最大次数が3の木である [6]. $es(DG(P))$ に関する数学的帰納法により示す．

I) $es(DG(P))=1$ のとき，$DG(P)$ は単一の節点または1本のパスである．このように表される P は，明らかに1人の捜索者によって捜索できる (図1参照)．よって $es(DG(P))=1$ のとき，$ps(P)\le es(DG(P))$ である．

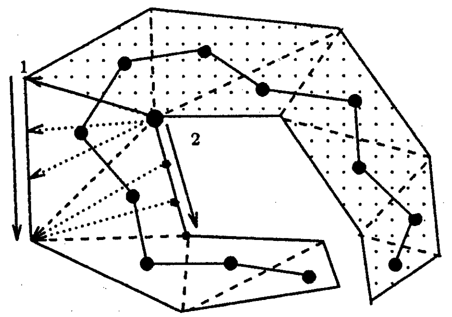

図 1: 1人の捜索者で捜索できる多角形.

II) $es(DG(P))\le i$ のとき，$ps(P)\le es(DG(P))$ であると仮定する．

$es(DG(P))=i+1$ のとき，補題1から，$DG(P)$ は次の2つの型のどちらかである．

(i) 捜索者数が $i+1$ より真に小さい branch のみを高々3つもつ節点 v が存在する．

(ii) avenue をちょうど1つもつ．

(i) の場合，v に対応する三角形を $\triangle abc$ とし，v の3つの branch に対応する多角形を P_1,P_2,P_3 とする (図2参照)．$\triangle abc$ は P_1,P_2,P_3 のそれぞれに含まれていることに注意せよ．i-branch から v を取り除いた木を T' とすると $es(T')\le i$ であるから，帰納法の仮定より，$P_1-\triangle abc$ は i 人の捜索者で捜索できる．そこでまず1人の捜索者を a に置き b をライトで照らす．$P_1-\triangle abc$ を残された i 人の捜索者で捜索する (操作1)．

次に a に置かれている捜索者はライトの位置を P_2 の境界線上に沿って b から時計回りに回す．このとき a からライトの位置を照らすことができるなら，ライトを回すだけで捜索が進

む. 図 2 に示すように, 一般には a から見えない領域が複数個存在する. これらを, 時計回りに $Q_1, Q_2, \ldots$ と名付け, 点 x_j, y_j 等も図 2 に示すように定める. x_1 までライトを旋回し, y_1 が照らされるようにする. 帰納法の仮定から, P_2 は i 人の捜索者で捜索できるので, 定理 4から Q_1 も i 人の捜索者で捜索できる. Q_1 を捜索した後, ライトの位置を y_1 からさらに時計回りに回すことを再開する. この操作をライトの位置が c に至るまで繰り返すことで, P_2 は $i+1$ 人で捜索できる (操作 2).

そして $P_3 - \triangle abc$ を i 人の捜索者で捜索することにより (操作 3), P が $i+1$ 人の捜索者で捜索できた.

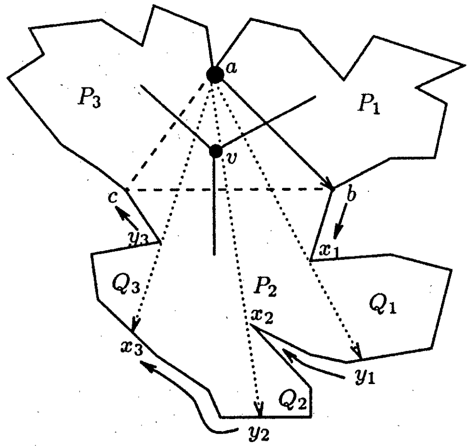

図 2: $DG(P)$ が (i) の場合.

(ii) の場合, avenue の各節点には avenue のパスの方向の branch を除き, 捜索者数が高々i の branch しか存在しない. 図 3 を参照せよ.

avenue の一方の端点から捜索をはじめる. avenue の端点は $(i+1)$-branch が 1 つと捜索者数が $i+1$ より小さい branch を高々2 つもつ. この 2 つの branch を (i) の操作 1 と操作 2 により捜索する.

avenue の内点は $(i+1)$-branch を 2 つと捜索者数が $i+1$ より小さい branch を高々1 つもつ. この 1 つの branch を (i) の操作 2 により捜索する.

avenue のもう一方の端点は (i) の操作 2 と操作 3 により捜索する.

以上より (ii) の場合も $i+1$ 人の捜索者で捜索できる.

したがって, $ps(P) \leq es(DG(P))$ である. □

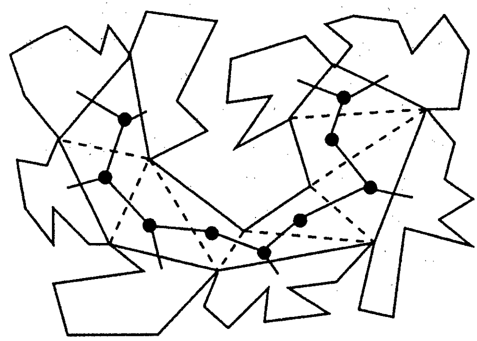

図 3: $DG(P)$ が (ii) の場合.

定理 5 単純 n 角形 P に対して $ps(P) \leq 1 + \lfloor \log_3(n-3) \rfloor$ である.

(証明) まず, $k \geq 2$ に対して, $es(T) = k$ である木 T は少なくとも 3^{k-1} の辺をもつことを $es(T)$ に関する数学的帰納法により示す.

$es(T) = 2$ のとき, 明らかに 3 つの辺が必要である.

$es(T) = i$ のとき, T は少なくとも 3^{i-1} の辺をもつと仮定する.

$es(T) = i+1$ のとき, 定理 3 から T には捜索者数 i 以上の branch を 3 つ以上もつような節点 v が存在するが, v には $(i+1)$-branch は高々2 つしかない.

任意の $(i+1)$-branch B_0 には $es(T') = i$ である部分木 T' が含まれていることを示すため, このような T' が含まれていないと仮定し, 矛盾を導く. B_0 の任意の葉を u, u と隣接する節点を w とする. このとき B_0 から u と辺 (u,w) をとり除いたグラフも連結した木となり, これを B_1 とすると, 明らかに $es(B_0) \leq es(B_1)+1$ である. B_0 の節点の数を j とする. B_1 に対して同じことを行ない B_2 を得, B_{j-1} に対して B_j を得るものとする. $es(B_{k-1}) \leq es(B_k)+1$. 仮定から $0 \leq k \leq j$ に対して $es(B_k) = i+1$ である. しかし, B_j は大きさ 1 の木であるので, $es(B_j) = 1$ となり矛盾する. したがって, $(i+1)$-branch には $es(T') = i$ である部分木 T' が含まれている.

よって $es(T) = i+1$ のとき, v には $es(T') = i$ である T' を含んでいる branch を 3 つ以上も

つので, T の辺の数は少なくとも $3\cdot 3^{i-1}=3^i$ である. したがって, $k\geq 2$ に対して $es(T)=k$ である木 T は少なくとも 3^{k-1} の辺をもつ.

次に, $es(T)=k$ である木 T の節点数を m とすると $m-1\geq 3^{k-1}$ だから,

$$es(T)=k\leq 1+\lfloor\log_3(m-1)\rfloor.$$

単純 n 角形を三角形分割して得られる双対グラフの節点数は $n-2$ である [6] ので,

$$\begin{aligned}ps(P)&\leq es(DG(P))\\&\leq 1+\lfloor\log_3(n-2-1)\rfloor\\&=1+\lfloor\log_3(n-3)\rfloor.\end{aligned}$$ □

3.1.2 捜索者数の下限

3.1.1節で求めた捜索者数の上限を評価するため, 必要となる捜索者数が多い多角形について検討する.

図 4(a) の図形を $P(1)$ とする. 図 4(b) のように $P(1)$ にさらに 3 つの $P(1)$ (右に付けた 1 つは $P(1)$ を裏返したもの) をくっつけた多角形を $P(2)$ とし, この操作を繰り返し $P(1)$ に 3 つの $P(i)$ ($P(2)$ と同様に 1 つは $P(i)$ を裏返したもの) をくっつけた多角形を $P(i+1)$ とする.

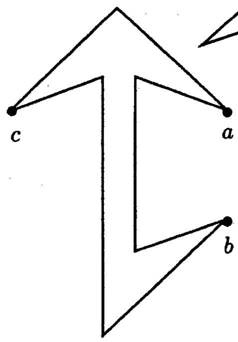

図 4(a): $P(1)$.

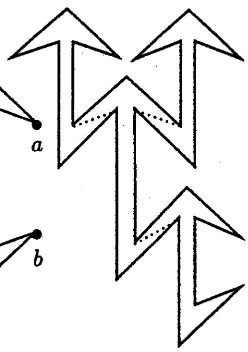

図 4(b): $P(2)$.

定理 6 任意の $i\geq 1$ に対して, $ps(P(i))=i+1$ である.

(証明) i に関する数学的帰納法により示す.

I) $i=1$ のとき, $P(1)$ に対して互いに分離不可能な 3 点 a,b,c が存在するので, 1 人の捜索者では捜索できない. しかし, 2 人の捜索者で捜索できることは明らかである. したがって, $ps(P(1))=2$ である.

II) $ps(P(i))=i+1$ を仮定し, $ps(P(i+1))=i+2$ を示す.

定理 4 より, $ps(P(i+1))\geq i+1$ である. そこで, $ps(P(i+1))=i+1$ と仮定し, 矛盾を導く. 存在すると仮定されているのは, $P(i+1)$ に対する $i+1$ 人の捜索スケジュールであり, これを $\mathcal{S}=\{(s_k,f_k)\mid 1\leq k\leq i+1\}$ とする.

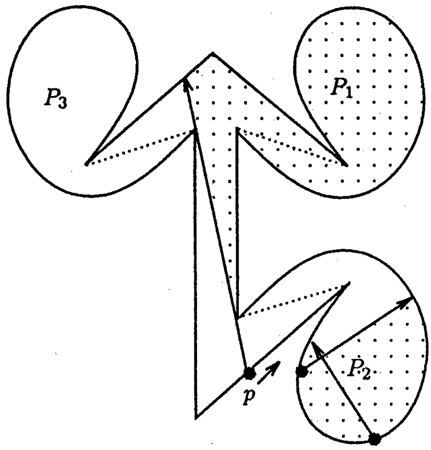

図 5: $P(i+1)$.

$P(i+1)$ の 3 つの $P(i)$ をそれぞれ P_1,P_2,P_3 とする (図 5 を参照せよ). 仮定から, $j=1,2,3$ に対して, $ps(P_j)=i+1$ である.

$j=1,2,3$ に対して, $S_j=\{t\in[0,t_T]\mid$ すべての捜索者は P_j の (真の) 内部をフラッシュライトで照らしている $\}$ とする. $ps(P_j)=i+1$ であるから, $S_j\neq\phi$, かつ, 明らかに S_1,S_2,S_3 は互いに交わらない. そこで, $S_1\cup S_2\cup S_3$ の区間を時刻の早い順に並べて, $[t_1,r_1],[t_2,r_2],\ldots,[t_m,r_m]$ とする. $0\leq t_1<r_1<t_2<r_2<\ldots<t_m<r_m\leq t_T$ である.

時刻 $t\in S_1\cup S_2\cup S_3$ において捜索されている $P(i)$ の複製を P_t とすると, $P(i+1)$ の定義から P_t 以外の 2 つの複製は, 共に既捜索か, 共に未捜索かのいずれかであることに注意せよ. 我々は, k に関する帰納法を用いて, どの t_k においても P_{t_k} 以外の 2 つの複製は常に未捜索であることを証明する. このことは, $\mathcal{S}$ が $P(i+1)$ に対するスケジュールであることに矛盾し, $ps(P(i+1))\geq i+2$ が証明されたことになる.

(i) $k=1$ の場合, 明らかに P_{t_1} 以外の 2 つの複製は未捜索である.

(ii) 一般性を失うことなく, $[t_k, r_k]$ で捜索される $P(i)$ を $P_1, [t_{k+1}, r_{k+1}]$ で捜索される $P(i)$ を P_2 と仮定する. t_k において, P_2, P_3 は未捜索であると仮定し, t_{k+1} において, P_1, P_3 が未捜索であることを証明する.

t_{k+1} において, P_1, P_3 は共に未捜索であるか, 共に既捜索であるかのいずれかである. P_3 は既捜索ではあり得ない. したがって, P_1, P_3 は共に未捜索である.

一方, 明らかに $i+2$ 人の捜索者で $P(i+1)$ が捜索できるので, $ps(P(i+1)) = i+2$ である. □

$P(i)$ の頂点の総数は $n = 3^{i+1} - 1$. したがって,

$ps(P(i)) = i + 1 = \lfloor \log_3(n+1) \rfloor$.

捜索者数の上限 $1 + \lfloor \log_3(n-3) \rfloor$ と比較すると最大でも 1 の差しかない.

3.2 直交多角形

垂直方向あるいは水平方向の直線だけから構成された多角形を直交多角形 (orthogonal polygon) と呼ぶ. 直交多角形に対して, それを捜索するのに必要な捜索者数の上限と下限を調べる.

まず, 直交多角形の四角形分割に関する Kahn ら [6] の結果を示す.

定理 7 [6] すべての直交多角形 P は (穴のあるなしにかかわらず) 凸四角形分割できる. □

3.2.1 捜索者数の上限

補題 4 直交多角形 P の凸四角形分割から得られる双対グラフの *1* つを $DG(P)$ とする. このとき, $ps(P) \leq es(DG(P))$ である. □

四角形分割から得られる双対グラフは, 三角形分割に対する双対グラフと同じようにして, 四角形集合を節点集合とし, 四角形どうしが対角線を共有しているなら節点間に辺を有するグラフである.

直交多角形は凸四角形に分割できるので, 補題 3の操作 2 が連続して 2 回用いられることを除いて補題 3と同じ要領で証明できるので証明は省略する.

定理 8 任意の直交多角形 P に対して, $ps(P) \leq 1 + \lfloor \log_3 \frac{n-4}{2} \rfloor$ が成立する. ここで, n は P の頂点の総数である.

(証明) 定理 5と同様にして, 木に対する捜索者数の上限は, $es(T) = k$ である木 T の節点数を m とすると

$es(T) = k \leq 1 + \lfloor \log_3 (m-1) \rfloor$.

直交多角形を四角形分割して得られる双対グラフの節点数は $\frac{n-2}{2}$ である [6] ので,

$$
\begin{aligned}
ps(P) &\leq es(DG(P)) \\
&\leq 1 + \lfloor \log_3 (\tfrac{n-2}{2} - 1) \rfloor \\
&= 1 + \lfloor \log_3 \tfrac{n-4}{2} \rfloor.
\end{aligned}
$$
□

3.2.2 捜索者数の下限

捜索者数の上限を評価するため, 図 6 の多角形について検討する.

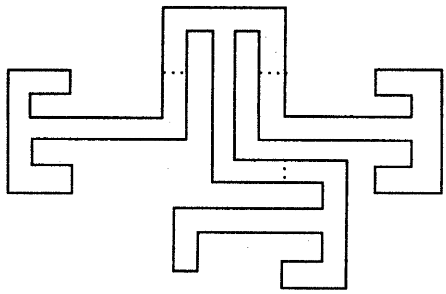

図 6: $P(2)$.

図 6 の多角形は図 4 の多角形と同じ性質をもっているので,

$ps(P(i)) = i + 1$

であり, 頂点の総数は

$n = 5 \cdot 3^i - 1$

であるので

$ps(P(i)) = i + 1 = 1 + \lfloor \log_3 \frac{n+1}{5} \rfloor$.

捜索者数の上限 $1 + \lfloor \log_3 \frac{n-4}{2} \rfloor$ と比較すると最大で 1 の差しかない.

4 穴のある多角形

多角形 P がいくつかの単純多角形 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_h$ を穴として含んでいる場合を考える.

4.1 捜索者数の上限

穴のある多角形 P に対して，各穴に 1 人の捜索者を固定することにより，$ps(P)$ の上限を求める．

定理 9 h 個の穴のある多角形 P に対して，$ps(P) \leq 1 + h + \lfloor \log_3 (n + 2h - 3) \rfloor$ が成立する．ここで，n は P の頂点の総数である．

(略証) 図 7 に示すように，h 人の捜索者を常駐させることで穴のある P を単純多角形 P'(図 8) に帰着することができる．

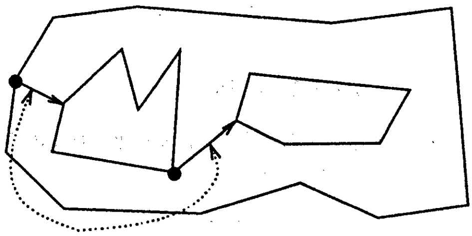

図 7: P ($h = 2$ の場合).

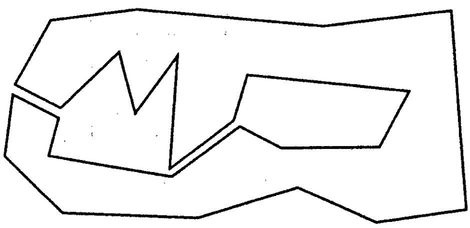

図 8: P'.

P' の三角形分割から得られる双対グラフの節点数は $n + 2h - 2$ である [6]．したがって，

$$ps(P) \leq 1 + h + \lfloor \log_3 (n + 2h - 2 - 1) \rfloor$$
$$= 1 + h + \lfloor \log_3 (n + 2h - 3) \rfloor . \qquad \square$$

5 おわりに

穴のない多角形については，一般の多角形，直交多角形に対して捜索者数の上限と下限を示した．どちらの場合も上限と下限の差は 1 で抑えられる．この差をつめることは，これからの検討課題である．

穴のある多角形については，捜索者を各穴に対して固定しないような方法で捜索者数の上限を下げること，さらに捜索者数の下限を求めることが今後の課題である．

参考文献

[1] W. -P. Chin and S Ntafos, "Optimum Watchman Routes," Information Processing Letters 28, 1988, pp. 39–44.

[2] D. Crass, I. Suzuki and M. Yamashita, "Searching for a Mobile Intruder in a Corridor – The Open Edge Variant of the Polygon Search Problem, " International J. Computational Geometry and Applications (to appear).

[3] D. T. Lee and A. K. Lin, "Computational Complexity of Art Gallery Problems," IEEE Trans. Information Theory, Vol. IT–32, No. 2, 1986, pp. 276–282.

[4] N. Megiddo, S. L. Hakimi, M. R. Garey, D. S. Johnson and C. H. Papadimitriou, "The Complexity of Searching a Graph," J. ACM, Vol. 35, No. 1, 1988, pp. 18–44.

[5] J. O'Rourke, "An Alternate Proof of the Rectilinear Art Gallery Theorem," J. Geometry, Vol. 21, 1983, pp. 118–130.

[6] J. O'Rourke, Art Gallery Theorems and Algorithms, Oxford University Press, New York, Oxford, 1987.

[7] T. D. Parsons, "Pursuit–Evasion in a Graph," in Theory and Applications of Graphs, Y. Alavi and D. Lick, eds., Lecture Notes in Mathematics 642, Springer-Verlag, Berlin, 1976, pp. 426–441.

[8] K. Sugihara, I. Suzuki and M. Yamashita, "The Searchlight Scheduling Problem," SIAM J. Computing, Vol. 19, No. 6, 1990, pp. 1024–1040.

[9] I. Suzuki and M. Yamashita , "Searching for a Mobile Intruder in a Polygonal Region," SIAM J. Computing, Vol. 21, No. 5, 1992, pp. 868–888.