MAX 3-SAT に対する高性能近似アルゴリズム

小野 孝男* 平田 富夫* 浅野 孝夫**
* 名古屋大学 工学部 ** 中央大学 理工学部
電子メール: takao@hirata.nuee.nagoya-u.ac.jp

最近, Goemans と Williamson によって MAX 2-SAT に対する画期的な近似アルゴリズムが提案された. このアルゴリズムは MAX 2-SAT の条件を緩和して凸計画問題に帰着させるという手法を用いており, 0.878 という近似度を実現している. この手法は MAX CUT や MAX DICUT にも適用され新しいアルゴリズムが得られているが, その他の問題に対してこの手法が適用できるかどうかについて興味がもたれていた. 本論文ではこの手法が MAX 3-SAT に対しても適用可能であり, その結果 0.770-近似アルゴリズムが得られることを示す.

An Approximation Algorithm for MAX 3-SAT

Takao Ono* Tomio Hirata* Takao Asano**
* School of Engeneering, Nagoya University
** Depertment of Information and System Engineering, Chuo University
E-mail: takao@hirata.nuee.nagoya-u.ac.jp

Goemans and Williamson recently presented a new approximation algorithm for MAX 2-SAT. Their algorithm achieves 0.878-approximation by reducing MAX 2-SAT to a convex programming problem with relaxation. They used this reduction to make new algorithms for MAX CUT and MAX DICUT, and it was interesting whether this reduction is applicable to other problems. In this paper we present a 0.770-approximation algorithm for MAX 3-SAT using this reduction.

1 はじめに

充足最大化問題 (MAX SAT) とは, 節の集合と各節の重みが与えられたとき, 充足する節の重みの総和を最大にするような真理値の割り当て方を求める問題である. MAX SAT は各節がたかだか 2 つのリテラルからなる場合 (MAX 2-SAT) に限定しても NP-完全問題であることが知られている.

そこで, 近似解を多項式時間で求めるアルゴリズムが考えられてきた. 特に, どのような入力に対しても, 最適値の少なくとも $\alpha(\alpha < 1)$ 倍以上の解が得られる多項式時間アルゴリズムは α-近似アルゴリズムと呼ばれる. MAX 2-SAT に対しては 0.75-近似アルゴリズムが知られている [Y92, GW94b]. ところで MAX 2-SAT は MAX SNP-完全な問題であり [PY88], P = NP でない限り, 任意の α に対して α-近似アルゴリズムが存在するというわけではない. したがって近似度 α をどこまで 1 に近づけることができるかに理論的な興味がある.

最近, Goemans と Williamson によって MAX 2-SAT に対する 0.878-近似アルゴリズムが提案された [GW94a]. このアルゴリズムは MAX 2-SAT を多項式の最大化問題とみなし, さらに条件を緩和して凸計画問題に帰着させて解くというものである. この手法は無向および有向グラフの最大カット問題 (MAX CUT, MAX DICUT) にも適用されて, 新しい近似アルゴリズムが得られている.

本論文では MAX 2-SAT に対する 0.878-近似アルゴリズムを MAX 3-SAT に拡張する. 得られたアルゴリズムは 0.770-近似である. 従来のアルゴリズムでは一般的な MAX SAT に対して 0.75-近似 [Y92, GW94b] または 0.755-近似 [GW94a] が得られている. したがって MAX 3-SAT に限定することにより近似度が改善できたことになる. なお, MAX 3-SAT に関しては, 最適値の 112/113 倍以上で近似する問題は NP-完全であることが知られている [BGLR93].

本論文は以下のように構成される. まず, 2 章で問題の定義を行い, 3 章で近似アルゴリズムを提案する. 次に, 4 章でこのアルゴリズムが 0.770-近似を達成していることを示す. 最後に, 5 章でまとめと今後の課題を述べる.

2 定義

論理式にあらわれる変数を $x_1, \ldots, x_n$ とする. リテラルは, 変数か変数の否定である. 節はリテラルの集合である.

MAX 3-SAT とは, たかだか 3 つのリテラルからなる節の集合 $C_1, C_2, \ldots, C_L$ と各節 C_l の重み $w_l(w_l > 0)$ が与えられたときに, 充足する節の重みの総和を最大にするような真理値の割り当て方を求める問題である. なお, 1 つの変数は 1 つの節にたかだか 1 度しかあらわれない, つまり $\{x_1, \bar{x}_1, x_2\}$ のような節は存在しないとする.

MAX 3-SAT に対するアルゴリズム A が α-近似である (近似度が α である) とは, MAX 3-SAT のどの問題例 I に対してもアルゴリズム A の出力する割り当てによって充足される節の重みの総和 $W_A(I)$ が, 最適な割り当てによって充足される節の重みの総和 $W_{OPT}(I)$ の α 倍以上であることをあらわす.

3 近似アルゴリズム

この章では, MAX 3-SAT に対する近似アルゴリズムを提案する. 本アルゴリズムは Goemans と Williamson のアルゴリズムと同じように MAX 3-SAT を次の手順に従って解く.

1. 入力される論理式を算術式に変換する. つまり, MAX 3-SAT を算術式の最大化問題に変換する.
2. 得られた最大化問題の条件を緩和し, 凸計画問題に帰着して解く.
3. 凸計画問題の解を元の MAX 3-SAT の解に変換する.

以下, 上の各手順を順に説明する.

3.1 入力される論理式の算術式への変換

MAX 3-SAT の入力の節集合を次のように算術式に変換する. まず, 各節 C_l に対応する算術式の項 c_l を次の 2 段階で構成する.

(i) C_l に含まれるリテラルの数に応じ, C_l が 1 つのリテラル v_1 からなるならば, $c_l = v_1'$ とする. C_l が

2つのリテラル v_1, v_2 からなるならば $c_l = 1-(1-v_1')(1-v_2')$ とする. C_l が3つのリテラル v_1, v_2, v_3 からなるならば $c_l = 1-(1-v_1')(1-v_2')(1-v_3')$ とする.
(ii) v_i が変数 x_k であれば $v_i' = (1+y_k)/2$, 変数の否定 $\bar{x}_k$ ならば $v_i' = (1-y_k)/2$ とする.

次に, 算術式を $f(y_1,\ldots,y_n) = \sum_{l=1}^{L} w_l c_l$ と定義する.

このとき $x_i = \mathrm{true}$ ならば $y_i = +1$, $x_i = \mathrm{false}$ ならば $y_i = -1$ と対応させることによって, $C_l = \mathrm{true}$ ならば, かつそのときにかぎり $c_l = 1$ であり, また $C_l = \mathrm{false}$ ならば, かつそのときにかぎり $c_l = 0$ である. したがって MAX 3-SAT は $|y_i| = 1 (i = 1, \ldots, n)$ という条件のもとで $f(y_1,\ldots,y_n)$ を最大化する問題であるとみなすことができる.

ところで, 項 c_l を展開すると $1 \pm y_i$, $1 \pm y_i y_j$, $1 \pm y_i y_j y_k$ という形の項の, 係数がすべて正であるような線型結合であらわすことができる. したがって MAX 3-SAT は次の最適化問題と等価である. ただし, 以下では簡単のために $a_i^+(1+y_i) + a_i^-(1-y_i) = a_i^{\pm}(1 \pm y_i)$ などと略記する.

問題 P: $|y_i| = 1$ のときに $f(y_1,\ldots,y_n) = \sum_i a_i^{\pm}(1 \pm y_i) + \sum_{i<j} b_{ij}^{\pm}(1 \pm y_i y_j) + \sum_{i<j<k} c_{ijk}^{\pm}(1 \pm y_i y_j y_k)$ を最大化せよ. ただし $a_i^{\pm}$, $b_{ij}^{\pm}$, $c_{ijk}^{\pm}$ はすべて 0 以上の実数である.

凸計画問題に緩和するため, 目的関数をさらに変形する. まず, y_i に関して1次の項を消すために y_i をあらたに $y_0 y_i$ で置き換える. ただし, $|y_0| = 1$ という条件を付けておく.

このようにすると $y_0^2 = 1$ だから

$$\begin{aligned} 1 \pm y_i &\Rightarrow 1 \pm y_0 y_i \\ 1 \pm y_i y_j &\Rightarrow 1 \pm y_i y_j \\ 1 \pm y_i y_j y_k &\Rightarrow 1 \pm y_0 y_i y_j y_k \end{aligned}$$

となる. よって $f(y_1,\ldots,y_n)$ は $a_{ij}^{\pm} \geq 0$, $b_{ijkl}^{\pm} \geq 0$ として次の形に書き直すことができる.

$f(y_0,\ldots,y_n) = \sum_{i<j} a_{ij}^{\pm}(1 \pm y_i y_j) + \sum_{i<j<k<l} b_{ijkl}^{\pm}(1 \pm y_i y_j y_k y_l)$.

さらに すべての $i (i = 0, 1, \ldots, n)$ に対して $|y_i| = 1$ であるから条件を緩和したときに凸計画問題となるように $1 \pm y_i y_j y_k y_l$ を $2-(y_i y_j \mp y_k y_l)^2/2$ と書き換える. これらを代入すると問題 P は次の問題と等価である.

問題 P': $|y_i| = 1$ のときに $f(y_0,\ldots,y_n) = \sum_{i<j} a_{ij}^{\pm}(1 \pm y_i y_j) + \sum_{i<j<k<l} b_{ijkl}^{\pm}(2-(y_i y_j \mp y_k y_l)^2/2)$ を最大化せよ. ただし, $a_{ij}^{\pm}$, $b_{ijkl}^{\pm}$ はすべて 0 以上である.

ここで, $f(y_0,\ldots,y_n)$ の係数 $b_{ijkl}^{\pm}$ については以下の補題がなりたつ.

補題 1 $\sum_{i<j<k<l}(b_{ijkl}^+ + b_{ijkl}^-) = W_3/8$. ただし, W_3 は入力において *3* つのリテラルを含む節の重みの総和である.

証明 $1 \pm y_i y_j y_k y_l$ の項は入力において3つのリテラルを含む節からしか生成されない. 節 C_l が3つのリテラル v_1, v_2, v_3 からなるとすると, この節に対応する項は $c_l = 1-(1-v_1')(1-v_2')(1-v_3')$ であり, c_l における $1 \pm y_i y_j y_k$ の係数は v_i' の置き換え方から 1/8 である. したがって $\sum_{i<j<k<l}(b_{ijkl}^+ + b_{ijkl}^-)$ は3つのリテラルを含むすべての節の重みの総和の 1/8 になる. つまり $\sum_{i<j<k<l}(b_{ijkl}^+ + b_{ijkl}^-) = W_3/8$ である. □

3.2 条件を緩和して解く

上の問題 P' をそのままの形で解くことはできないので, 条件を緩和して解くことを考える. ここではスカラー y_i の代りに $n+1$ 次元のベクトル $\boldsymbol{v}_i (\|\boldsymbol{v}_i\| = 1)$ を用いる. その際, $y_i y_j$ のように2変数の積になっている部分は内積 $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j$ とみなす. このように問題 P' を緩和すると次の問題 Q になる.

問題 Q: $\|\boldsymbol{v}_i\| = 1$ のときに $\sum_{i<j} a_{ij}^{\pm}(1 \pm \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j) + \sum_{i<j<k<l} b_{ijkl}^{\pm}(2-(\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j \mp \boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{v}_l)^2/2)$ を最大化せよ.

ここで, 内積 $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j$ を新たな変数 y_{ij} とみなすと行列 (y_{ij}) は $(\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)^T(\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ と書けるから半正定値対称行列である. したがって問題 Q は次の問題と等価である.

問題 Q': (y_{ij}) が半正定値対称行列で $y_{ii} = 1$ のときに$\sum_{i<j} a_{ij}^{\pm}(1 \pm y_{ij}) + \sum_{i<j<k<l} b_{ijkl}^{\pm}(2-(y_{ij} \mp y_{kl})^2/2)$ を最大化せよ.

この問題は以下に示すように凸計画問題であり, したがって絶対誤差 ϵ 以内の近似最適解 $\bar{y}_{ij}$ を多項式時間で求めることができる [V89]. 問題 Q' の近似解 $\bar{y}_{ij}$ から問題 Q の近似解 $\bar{\boldsymbol{v}}_i$ を求めるには,

行列 $(\bar{y}_{ij})$ を Cholesky 分解すればよい．したがって MAX 3-SAT を緩和した問題である Q の近似解が多項式時間で求まる．

補題 2 半正定値対称行列の集合は凸集合である．

証明 半正定値対称行列の集合を X とする．任意の A, $B \in X$ と実数 $t(0 \le t \le 1)$ に対して $tA+(1-t)B \in X$ であればよい．

A, B は半正定値対称行列だからすべての $\boldsymbol{x}$ に対して $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} \ge 0, \boldsymbol{x}^T B\boldsymbol{x} \ge 0$ である．したがって $\boldsymbol{x}^T(tA+(1-t)B)\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}+(1-t)\boldsymbol{x}^T B\boldsymbol{x} \ge 0$. これより $tA+(1-t)B$ は半正定値対称行列なので $tA+(1-t)B \in X$. よって X, つまり半正定値対称行列の集合は凸集合である． □

補題 3 $f(y_{00},\ldots,y_{nn}) = \sum_{i<j} a_{ij}^{\pm}(1 \pm y_{ij}) + \sum_{i<j<k<l} b_{ijkl}^{\pm}(2-(y_{ij} \mp y_{kl})^2/2)$ は凸関数である．

証明 凸関数 $f(\boldsymbol{x})$ の正の定数 a 倍は $af(t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{x}') \ge a(tf(\boldsymbol{x})+(1-t)f(\boldsymbol{x}')) = t(af(\boldsymbol{x}))+(1-t)(af(\boldsymbol{x}'))$ より凸関数である．また，2 つの関数 $f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x})$ が凸関数であればその和 $h(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})$ は $h(t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{x}') = f(t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{x}')+g(t\boldsymbol{x}+(1-t)\boldsymbol{x}') \ge (tf(\boldsymbol{x})+(1-t)f(\boldsymbol{x}'))+(tg(\boldsymbol{x}) + (1-t)g(\boldsymbol{x}')) = t(f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})) + (1-t)(f(\boldsymbol{x}')+g(\boldsymbol{x}')) = th(\boldsymbol{x})+(1-t)h(\boldsymbol{x}')$ より凸関数である．$1 \pm x$, $2-(x \pm x')^2/2$ という形の関数は明らかに凸関数であるから $f(y_{00},\ldots,y_{nn})$ は凸関数である． □

定理 1 問題 Q' は凸計画問題である．

証明 最適化問題が凸計画問題であることを示すにはその問題の可能領域が凸集合であることと目的関数が凸関数であることを示せばよい．問題 Q' の場合，前者は補題 2で，後者は補題 3でそれぞれ示した．したがって問題 Q' は凸計画問題である． □

3.3 MAX 3-SAT の近似解を作る

問題 Q の近似解 $\bar{\boldsymbol{v}}_i$ から問題 P' の近似解 $\bar{y}_i$ を求めるためには Goemans と Williamson のアルゴリズムと同様の確率的な方法を用いる．この方法はランダムに $n+1$ 次元のベクトル $\boldsymbol{r}(\|\boldsymbol{r}\| = 1)$ をとり，$\bar{\boldsymbol{v}}_i$ と $\boldsymbol{r}$ との内積が正ならば $\bar{y}_i = +1$, 負ならば $\bar{y}_i = -1$ とするものである．このようにして決定した $\bar{y}_0,\ldots,\bar{y}_n$ に対する問題 P' の目的関数の期待値を求め，その値よりよい値になるような $\boldsymbol{r}$ を使うものとする．4 章でこのように $\boldsymbol{r}$ を選ぶと 0.770-近似解が得られることを示す．

なお [GW94a] と同様に本アルゴリズムにおいてもこの確率的な方法を決定性アルゴリズムに変換することができる．

4 近似精度の解析

ここでは上のようにして得られた解の近似の精度を解析する．簡単のため，以下の記号を用いる．

リテラルを $k(k = 1, 2, 3)$ 個含む節の重みの総和を W_k であらわすことにする．問題 P' の最適値を Z_P^*, 近似解を代入して得られる目的関数の値を $\bar{Z}_P$, その第 1 項および第 2 項の部分和をそれぞれ $\bar{Z}_{P2}$, $\bar{Z}_{P4}$ とする．問題 Q' に対してもその最適値を Z_Q^*, 近似解を目的関数に代入して得られる値を $\bar{Z}_Q$ とし，その第 1 項および第 2 項の部分和をそれぞれ $\bar{Z}_{Q2}$, $\bar{Z}_{Q4}$ であらわす．また，問題 Q の近似解 $\bar{\boldsymbol{v}}_i, \bar{\boldsymbol{v}}_j$ のなす角を θ_{ij}, 確率変数 X の期待値を $E[X]$ であらわす．

3 章のアルゴリズムの近似度を次のようにして求める．求めたいのは $E[\bar{Z}_P]/Z_P^*$ である．問題 Q' は問題 P を緩和した問題であるから $Z_Q^* \ge Z_P^*$ であり，また $\bar{Z}_Q$ は問題 Q' の絶対誤差 ϵ 以内の近似解を代入して得られる値であるから $\bar{Z}_Q \ge Z_Q^* - \epsilon$ である．したがって $E[\bar{Z}_P]/Z_P^* \ge E[\bar{Z}_P]/Z_Q^* \ge E[\bar{Z}_P]/(\bar{Z}_Q + \epsilon)$ である．よって $E[\bar{Z}_P]/\bar{Z}_Q$ を考える．ところで $E[\bar{Z}_P] = E[\bar{Z}_{P2}] + E[\bar{Z}_{P4}]$, $\bar{Z}_Q = \bar{Z}_{Q2} + \bar{Z}_{Q4}$ であるから $E[\bar{Z}_{P2}] \ge \alpha\bar{Z}_{Q2}$, $E[\bar{Z}_{P4}] \ge \beta\bar{Z}_{Q4}$, $\bar{Z}_{Q4} \le \gamma\bar{Z}_Q$ となる定数 $\alpha, \beta, \gamma(\alpha > \beta)$ が見つかれば $E[\bar{Z}_P]/\bar{Z}_Q = (E[\bar{Z}_{P2}] + E[\bar{Z}_{P4}])/\bar{Z}_Q \ge (\alpha\bar{Z}_{Q2} + \beta\bar{Z}_{Q4})/\bar{Z}_Q \ge \alpha(1-\gamma) + \beta\gamma$ となるので $E[\bar{Z}_P]/Z_P^*$ の下界が求まる．そのため，以下 α, β, γ を求めることにする．

補題 4から 6までは [GW94a] と同じであるが，正確を期すためここに証明をあげておく．

補題 4 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$, $\|\boldsymbol{y}\| = 1$ とする．$\boldsymbol{r}$ を $\|\boldsymbol{r}\| = 1$ であるランダムベクトルであるとすると次の式が

なりたつ．

$$\Pr\{\mathrm{sign}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{x})\neq\mathrm{sign}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{y})\}=\arccos(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})/\pi.$$

証明 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が平行のときと平行でないときにわけて考える．$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が平行のとき，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ ならば補題は明らかになりたつ．$\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{y}$ のときはすべての $\boldsymbol{r}$ に対して $\mathrm{sign}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{x})\neq\mathrm{sign}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{y})$ がなりたつ．$\arccos(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})=\pi$ だから $\Pr\{\mathrm{sign}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{x})\neq\mathrm{sign}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{y})\}=1=\arccos(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})/\pi$．よって補題はなりたつ．

次に $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が平行でないときを考える．補題は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ について対称なので，$\Pr\{\mathrm{sign}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{x})\neq\mathrm{sign}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})\}=2\Pr\{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{x}>0$ かつ$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{y}<0\}$．そこで $\Pr\{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{x}>0$ かつ$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{y}<0\}$ について考える．なお，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が張る平面上に $\boldsymbol{r}$ を 正射影したベクトルを $\boldsymbol{p}$ とすると，角度に関しては $\boldsymbol{p}$ の分布は $\boldsymbol{r}$ と同じであり，$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{y}$ なので，以下では$\boldsymbol{p}$ について考える．

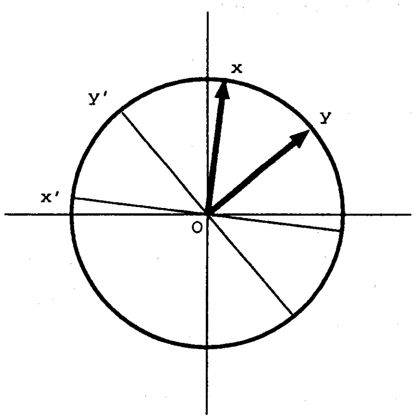

図 1: 補題 4の証明

図 1において，$\angle xOx'=\pi/2$, $\angle yOy'=\pi/2$ である．$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}>0$ かつ $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{y}<0$ であるような $\boldsymbol{p}$ は扇型 $x'Oy'$ 上に存在する．扇型 $x'Oy'$ の中心角は扇型 xOy の中心角 $\arccos(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})$ に等しいので扇型 $x'Oy'$ の面積は $\arccos(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})/2$ である．全円の面積は π だからランダムなベクトル $\boldsymbol{p}$ が $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}>0$ かつ $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{y}<0$ を満たす確率は $\arccos(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})/(2\pi)$．である．したがって

$$\begin{aligned}
&\Pr\{\mathrm{sign}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{x})\neq\mathrm{sign}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{y})\}\\
&= 2\Pr\{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{x}>0 \text{ かつ} \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{y}<0\}\\
&= 2\Pr\{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}>0 \text{ かつ} \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{y}<0\}\\
&= 2\arccos(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})/(2\pi)\\
&= \arccos(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})/\pi.
\end{aligned}$$

よって補題はなりたつ． □

注: $\bar{y}_i=(\boldsymbol{r}\cdot\bar{\boldsymbol{v}}_i)/|\boldsymbol{r}\cdot\bar{\boldsymbol{v}}_i|$, $\bar{y}_j=(\boldsymbol{r}\cdot\bar{\boldsymbol{v}}_j)/|\boldsymbol{r}\cdot\bar{\boldsymbol{v}}_j|$ なのでこの補題から $\Pr\{\bar{y}_i\bar{y}_j=-1\}=\Pr\{\bar{y}_i\neq\bar{y}_j\}=\theta_{ij}/\pi$, $\Pr\{\bar{y}_i\bar{y}_j=1\}=\Pr\{\bar{y}_i=\bar{y}_j\}=1-\theta_{ij}/\pi$ であることがわかる．

補題 5, 6 から α の値を決めることができる．

補題 5 $E[(1-\bar{y}_i\bar{y}_j)/2]=\theta_{ij}/\pi$, $E[(1+\bar{y}_i\bar{y}_j)/2]=1-\theta_{ij}/\pi$.

証明

$$\frac{1-\bar{y}_i\bar{y}_j}{2}=\begin{cases}1 & \bar{y}_i\neq\bar{y}_j \text{ のとき}\\ 0 & \bar{y}_i=\bar{y}_j \text{ のとき}\end{cases}$$

したがって補題 4の注より

$$\begin{aligned}
E[(1-\bar{y}_i\bar{y}_j)/2] &= \Pr\{\bar{y}_i\neq\bar{y}_j\}\\
&= \theta_{ij}/\pi.
\end{aligned}$$

一方,

$$\frac{1+\bar{y}_i\bar{y}_j}{2}=\begin{cases}0 & \bar{y}_i\neq\bar{y}_j \text{ のとき}\\ 1 & \bar{y}_i=\bar{y}_j \text{ のとき}\end{cases}$$

だから同様にして

$$\begin{aligned}
&E[(1+\bar{y}_i\bar{y}_j)/2]\\
&= \Pr\{\bar{y}_i=\bar{y}_j\}\\
&= 1-\theta_{ij}/\pi.
\end{aligned}$$ □

補題 6 $\alpha=\min_{0\le\theta\le\pi}(\theta/\pi)/((1-\cos\theta)/2)=0.878\ldots$ とすると

$$\begin{aligned}
\theta/\pi &\geq \alpha(1-\cos\theta)/2,\\
1-\theta/\pi &\geq \alpha(1+\cos\theta)/2.
\end{aligned}$$

証明 $\alpha=\min_{0\le\theta\le\pi}(\theta/\pi)/((1-\cos\theta)/2)$ より $(\theta/\pi)/((1-\cos\theta)/2)\geq\alpha$．したがって $\theta/\pi\geq\alpha(1-\cos\theta)/2$.

また，$\theta=\pi-\phi$ とすると $0\leq\phi\leq\pi$ かつ $\cos\theta=-\cos\phi$ だから

$$\begin{aligned}
1-\theta/\pi &= (\pi-\theta)/\pi=\phi/\pi\\
&\geq \alpha(1-\cos\phi)/2\\
&= \alpha(1+\cos\theta)/2.
\end{aligned}$$ □

補題 7 補題 6の α を使えば $E[\bar{Z}_{P2}] \geq \alpha \bar{Z}_{Q2}$.

証明 補題 5, 6 より $E[\sum_{i<j} a_{ij}^{+}(1+\bar{y}_i\bar{y}_j)] = 2\sum_{i<j} a_{ij}^{+}\theta_{ij}/\pi \geq \alpha \sum_{i<j} a_{ij}^{+}(1+\cos\theta_{ij}) = \alpha\sum_{i<j} a_{ij}^{+}(1+\bar{y}_{ij})$, $E[\sum_{i<j} a_{i<j}^{-}(1-\bar{y}_i\bar{y}_j)] = 2\sum_{i<j} a_{ij}^{-}(1-\theta/\pi) \geq \alpha \sum_{i<j} a_{ij}^{-}(1-\cos\theta_{ij}) = \sum_{i<j} a_{ij}^{-}(1-\bar{y}_{ij})$. したがって
$E[\bar{Z}_{P2}] = E[\sum_{i<j} a_{ij}^{+}(1+\bar{y}_i\bar{y}_j)] + E[\sum_{i<j} a_{ij}^{-}(1-\bar{y}_i\bar{y}_j)] \geq \alpha\sum_{i<j} a_{ij}^{\pm}(1\pm\bar{y}_{ij}) = \alpha\bar{Z}_{Q2}$. □

次に, 補題 8, 9から β の値を求める.

補題 8 $E[1-(\bar{y}_i\bar{y}_j+\bar{y}_k\bar{y}_l)^2/4] = (\theta_{ij}+\theta_{kl})/\pi - 2\theta_{ij}\theta_{kl}/\pi^2$, $E[1-(\bar{y}_i\bar{y}_j-\bar{y}_k\bar{y}_l)^2/4] = 1-(\theta_{ij}+\theta_{kl})/\pi + 2\theta_{ij}\theta_{kl}/\pi^2$.

証明

$$1-\frac{(\bar{y}_i\bar{y}_j+\bar{y}_k\bar{y}_l)^2}{4} = \begin{cases} 0 & \bar{y}_i\bar{y}_j = \bar{y}_k\bar{y}_l \text{ のとき} \\ 1 & \bar{y}_i\bar{y}_j \neq \bar{y}_k\bar{y}_l \text{ のとき} \end{cases}$$

であるから補題 4の注より

$$\begin{aligned} & E[1-(\bar{y}_i\bar{y}_j+\bar{y}_k\bar{y}_l)^2/4] \\ &= \Pr\{\bar{y}_i\bar{y}_j \neq \bar{y}_k\bar{y}_l\} \\ &= \Pr\{\bar{y}_i\bar{y}_j = 1 \text{ かつ} \bar{y}_k\bar{y}_l = -1\} \\ &\quad + \Pr\{\bar{y}_i\bar{y}_j = -1 \text{ かつ} \bar{y}_k\bar{y}_l = 1\} \\ &= (1-\theta_{ij}/\pi)\theta_{kl}/\pi + \theta_{ij}/\pi(1-\theta_{kl}/\pi) \\ &= (\theta_{ij}+\theta_{kl})/\pi - 2\theta_{ij}\theta_{kl}/\pi^2. \end{aligned}$$

同様にして

$$1-\frac{(\bar{y}_i\bar{y}_j-\bar{y}_k\bar{y}_l)^2}{4} = \begin{cases} 0 & \bar{y}_i\bar{y}_j \neq \bar{y}_k\bar{y}_l \text{ のとき} \\ 1 & \bar{y}_i\bar{y}_j = \bar{y}_k\bar{y}_l \text{ のとき} \end{cases}$$

であるから

$$\begin{aligned} & E[1-(\bar{y}_i\bar{y}_j-\bar{y}_k\bar{y}_l)^2/4] \\ &= \Pr\{\bar{y}_i\bar{y}_j = \bar{y}_k\bar{y}_l\} \\ &= 1-\Pr\{\bar{y}_i\bar{y}_j \neq \bar{y}_k\bar{y}_l\} \\ &= 1-(\theta_{ij}+\theta_{kl})/\pi + 2\theta_{ij}\theta_{kl}/\pi^2. \end{aligned}$$ □

補題 9

$$\min_{\substack{0\leq\theta\leq\pi \\ 0\leq\phi\leq\pi}} \frac{(\theta+\phi)/\pi - 2\theta\phi/\pi^2}{1-(\cos\theta+\cos\phi)^2/4} = \frac{1}{2},$$

$$\min_{\substack{0\leq\theta\leq\pi \\ 0\leq\phi\leq\pi}} \frac{1-(\theta+\phi)/\pi + 2\theta\phi/\pi^2}{1-(\cos\theta-\cos\phi)^2/4} = \frac{1}{2}.$$

証明 両方とも同じように示すことができるのでここでは前者のみを示す. $(\cos\theta+\cos\phi)^2 \geq 4(1-2\theta/\pi)(1-2\phi/\pi)$ であれば $1-(\cos\theta+\cos\phi)^2/4 \leq 2((\theta+\phi)/\pi - 2\theta\phi/\pi^2)$ より $((\theta+\phi)/\pi-2\theta\phi/\pi^2)/(1-(\cos\theta+\cos\phi)^2/4)$ だから補題はなりたつ. したがって

$$(\cos\theta+\cos\phi)^2 \geq 4(1-2\theta/\pi)(1-2\phi/\pi) \quad (1)$$

を示せばよい. $(1-2\theta/\pi)(1-2\phi/\pi) \leq 0$ のときは自明であるので $(1-2\theta/\pi)(1-2\phi/\pi) > 0$ と仮定する. $1-2\theta/\pi > 0$ のときは $\theta < \pi/2$ かつ $\phi < \pi/2$ なので $\cos\theta \geq 1-2\theta/\pi > 0$ および $\cos\phi \geq 1-2\phi/\pi > 0$. したがって $(1-2\theta/\pi)(1-2\phi/\pi) \leq \cos\theta\cos\phi \leq (\cos\theta+\cos\phi)^2/4$ より 式 (1) はなりたつ. $1-2\theta/\pi < 0$ ならば $\theta > \pi/2$ かつ $\phi > \pi/2$ より $\cos\theta \leq 1-2\theta/\pi < 0$, $\cos\phi \leq 1-2\phi/\pi < 0$ なので $(1-2\theta/\pi)(1-2\phi/\pi) \leq \cos\theta\cos\phi \leq (\cos\theta+\cos\phi)^2/4$. したがってこのときも式 (1) はなりたつから $0\leq\theta\leq\pi$, $0\leq\phi\leq\pi$ でつねに式 (1) はなりたつ. □

補題 10 $E[\bar{Z}_{P4}] \geq (1/2)\bar{Z}_{Q4}$.

証明 補題 8, 9 より $E[1-(\bar{y}_i\bar{y}_j+\bar{y}_k\bar{y}_l)^2/4] = (\theta_{ij}+\theta_{kl})/\pi - 2\theta_{ij}\theta_{kl}/\pi^2 \geq (1/2)(1-(\cos\theta_{ij}+\cos\theta_{kl})^2/4) = (1/2)(1-(\bar{y}_{ij}+\bar{y}_{kl})^2/4)$, $E[1-(\bar{y}_i\bar{y}_j-\bar{y}_k\bar{y}_l)^2/4] = 1-(\theta_{ij}+\theta_{kl})/\pi+2\theta_{ij}\theta_{kl}/\pi^2 \geq (1/2)(1-(\cos\theta_{ij}-\cos\theta_{kl})^2/4) = (1/2)(1-(\bar{y}_{ij}-\bar{y}_{kl})^2/4)$. したがって $E[\bar{Z}_{P4}] = E[\sum_{i<j<k<l} b_{ijkl}^{\pm}(2-(\bar{y}_i\bar{y}_j\pm\bar{y}_k\bar{y}_l)^2/2)] \geq (1/2)\sum_{i<j<k<l} b_{ijkl}^{\pm}(2-(\bar{y}_{ij}\mp\bar{y}_{kl})^2/2) = (1/2)\bar{Z}_{Q4}$. □

よって $\beta = 1/2$ とすればよい.

最後に, 補題 11, 12でγ を求める.

補題 11 $Z_P^* \geq W_1/2 + 3W_2/4 + 7W_3/8$.

証明 充足最大化問題に対する [J74] の証明を, 重みを考慮して拡張する.

$f(y_1,\ldots,y_n) = \sum_{l=1}^{L} w_l c_l$ とおく. どの変数に関しても $f(y_1,\ldots,y_n)$ は 1 次式であるので任意の $i (i = 1,\ldots,n)$ について $f(y_1,\ldots,y_{i-1},-1,y_{i+1},\ldots,y_n) + f(y_1,\ldots,y_{i-1},+1,y_{i+1},\ldots,y_n) = 2f(y_1,\ldots,y_{i-1},0,y_{i+1},\ldots,y_n)$ がなりたつ. したがって

$$Z_P^* = \max_{y_1,\ldots,y_n\in\{-1,+1\}} f(y_1,\ldots,y_n)$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \max_{y_2,\ldots,y_n\in\{-1,+1\}} f(0,y_2,\ldots,y_n)\\
&\cdots\\
&\geq \max_{y_n\in\{-1,+1\}} f(0,\ldots,0,y_n)\\
&\geq f(0,0,\ldots,0).
\end{aligned}
$$

すべての y_i を 0 とすると，各項 c_l の値は対応する節 C_l に含まれるリテラルが 1 個ならば 1/2, 2 個ならば 3/4, 3 個ならば 7/8 となる．したがって $Z_P^* \geq f(0,0,\ldots,0) = W_1/2 + 3W_2/4 + 7W_3/8$.□

補題 12 充分小さな ϵ に対して $\bar{Z}_{Q4}/\bar{Z}_Q \leq 2/7 + 3\epsilon/(7W_3)$.

証明 まず，補題 1より

$$
\begin{aligned}
\bar{Z}_{Q4} &= \sum_{i<j<k<l} b^{\pm}_{ijkl}(2-(\bar{y}_{ij}\mp\bar{y}_{kl})^2/2)\\
&\leq \sum_{i<j<k<l} 2b^{\pm}_{ijkl}\\
&= 2\sum_{i<j<k<l}(b^{+}_{ijkl}+b^{-}_{ijkl}) = W_3/4.
\end{aligned}
$$

一方，問題 Q' は問題 P を緩和した問題なので補題 11から $Z_Q^* \geq Z_P^* \geq W_1/2 + 3W_2/4 + 7W_3/8$. したがって $\bar{Z}_Q \geq W_1/2 + 3W_2/4 + 7W_3/8 - \epsilon$.

これらの結果から

$$
\begin{aligned}
&\bar{Z}_{Q4}/\bar{Z}_Q\\
&\leq (W_3/4)/(W_1/2+3W_2/4+7W_3/8-\epsilon)\\
&\leq (W_3/4)/(7W_3/8-\epsilon)\\
&= (2W_3)/(7W_3-8\epsilon)\\
&= 2/7+16\epsilon/(49W_3)+\cdots\\
&\leq 2/7+3\epsilon/(7W_3). \qquad \square
\end{aligned}
$$

最後に，アルゴリズムの近似度を求める．

定理 2 このアルゴリズムは 0.770-近似である．

証明 補題 7, 10から $E[\bar{Z}_{P2}] \geq \alpha\bar{Z}_{Q2}$, $E[\bar{Z}_{P4}] \geq (1/2)\bar{Z}_{Q4}$ である．また，補題 12から $\bar{Z}_{Q4}/\bar{Z}_Q \leq 2/7 + 3\epsilon/(7W_3)$. したがって

$$
\begin{aligned}
E[\bar{Z}_P] &= E[\bar{Z}_{P2}] + E[\bar{Z}_{P4}]\\
&\geq \alpha\bar{Z}_{Q2} + (1/2)\bar{Z}_{Q4}\\
&= \alpha(\bar{Z}_Q - \bar{Z}_{Q4}) + (1/2)\bar{Z}_{Q4}\\
&= \alpha\bar{Z}_Q - (\alpha-1/2)\bar{Z}_{Q4}\\
&= (\alpha-(\alpha-1/2)\bar{Z}_{Q4}/\bar{Z}_Q)\bar{Z}_Q\\
&\geq (\alpha-(\alpha-1/2)(2/7+3\epsilon/(7W_3)))\\
&\qquad \times (Z_Q^*-\epsilon)\\
&= (5\alpha/7+1/7-3\epsilon(\alpha-1/2)/(7W_3))\\
&\qquad \times (Z_Q^*-\epsilon)\\
&= (5\alpha/7+1/7-3\epsilon(\alpha-1/2)/(7W_3))\\
&\qquad \times (1-\epsilon/Z_Q^*)Z_Q^*\\
&\geq (5\alpha/7+1/7-3\epsilon(\alpha-1/2)/(7W_3))\\
&\qquad \times (1-8\epsilon/(7W_3))Z_Q^*\\
&\geq (5\alpha/7+1/7-(11\alpha/(7W_3))\epsilon)Z_Q^*\\
&\geq (5\alpha/7+1/7-(11\alpha/(7W_3))\epsilon)Z_P^*
\end{aligned}
$$

であり，ϵ は任意に小さくすることができるのでこのアルゴリズムは $5\alpha/7 + 1/7 = 0.770$-近似である． □

5 結論

凸計画法に基づく MAX 2-SAT の 0.878-近似アルゴリズムを拡張することにより，MAX 3-SAT に対する 0.770-近似アルゴリズムを得ることができた．従来のアルゴリズムでは一般的な MAX SAT に対して 0.75-近似 [Y92, GW94b] または 0.755-近似 [GW94a] であるので，MAX 3-SAT に限定することにより近似度を改善することができたことになる．

しかし MAX 3-SAT に関しては，最適値の 112/113 倍以上の解を求める問題が NP-完全であることが知られている [BGLR93]．本アルゴリズムの保証する 0.770 という近似の精度はこの値とひらきがある．したがって，よりよい近似解を求めるアルゴリズムを開発する必要があると考えている．

参考文献

[BGLR93] M. Bellare, S. Goldwasser, C. Lund and A. Russel, *Efficient Probabilistically Checkable Proofs and Applications to Approximation*, In *Proc. 25th STOC*, pp. 294–304, 1993.

[GW94a] Michel X. Goemans, David P. Williamson, *.878-Approximation Algorithms for MAX CUT and MAX 2SAT*, In *Proc. 26th STOC*, pp. 422–431, 1994.

[GW94b] Michel X. Goemans, David P. Williamson, *New 3/4-Approximation Algorithms for the Maximum Satisfiability Problem*, In *SIAM J. of Discrete Math.*, 7(1994), pp. 656–666.

[J74] David S. Johnson, *Approximation Algorithms for Combinatorial Problems*, In *Journal of Comput. and Sys. Sci.*, 9(1974), pp. 256–278.

[PY88] Christos H. Papadimitriou, Mihalis Yannakakis, *Optimization, Approximation, and Complexity Classes*, In *Proc. 20th STOC*, pp. 229–234, 1988.

[V89] Pravin M. Vaidya, *A new algorithm for minimizing convex functions over convex sets*, In *Proc. 30th FOCS*, pp. 338–343, 1989.

[Y92] Mihalis Yannakakis, *On the Approximation of Maximum Satisfiability*, In *Proc. 3rd SODA*, pp. 1–9, 1992.