二通貨間為替交換問題に対する
オンラインアルゴリズムの設計と解析

檀浦 詠介　　櫻井 幸一

九州大学 工学部 情報工学科
〒812-81 福岡市東区箱崎 6-10-1
Phone.092-641-1101 Fax.092-632-5204
sakurai@csce.kyushu-u.ac.jp

あらまし 文献 [R.El-Yaniv, A.Fiat, R.Karp, and G.Turpin, *Proc. of the 33rd FOCS,* pp.327-333 (1992).] において二通貨間為替交換問題に対するオンラインアルゴリズムが提案されている。これは円相場 (円 / ドル) の値が増加している区間と減少している区間に分割し、増加している区間ではドルから円、減少している区間では円からドルという方向に取引を行なう単一方向取引アルゴリズムを各々の区間毎に適用し、それを繰り返すという操作により, 双方向取引のアルゴリズムを実現している。さらに Karp らは、提案した単一方向アルゴリズムが、各々の区間では最適であることを示した。しかし、これを繰り返す双方向取引アルゴリズムはもはや最適でなくなり、二通貨間為替双方向取引に対する最適なオンラインアルゴリズムの設計は未解決問題である。我々は、いくつかに区間を分割したときに、ある限られた区間が悪い結果となっても全体が良い結果を得られるように、という考えに基づき、双方向取引への適用を意識した単一方向為替交換アルゴリズムを設計し、双方向取引において、この提案アルゴリズムが Karp らのものよりも優れた効率を示すことを、競争比を計算することで証明する。

キーワード : 経済ゲーム, オンラインアルゴリズム, 為替交換問題, 競争比

On designing on-line algorithms for money making

Eisuke DANNOURA *and* Kouichi SAKURAI

Department of Computer Science and Communication Engineering
Kyushu University
6-10-1 Hakozaki, Higashi-ku, Fukuoka 812-01, Japan
Phone.092-641-1101 Fax.092-632-5204
Corresponding to sakurai@csce.kyushu-u.ac.jp

Abstract: On-line algorithms for money-making trading problem are investigated in [R.El-Yaniv, A.Fiat, R.Karp, and G.Turpin, *Proc. of the 33rd FOCS,* pp.327-333 (1992).]. Their algorithms divide exchange rate(yen / dollar) run into upward runs and downward runs, then repeat unidirectional algorithms, in which players exchange dollars to yen if the exchange rate running upward, and yen to dollars if the rate running downward. Though the unidirectional algorithm is shown to be optimal, the bidirectional algorithm, which repeats unidirectional algorithm, is no longer optimal. We design the new unidirectional algorithm, in which the player obtains much money in some runs, even though he looses money in a run, and prove that this new bidirectional algorithm achieve better competitive performance than the Karp's algorithm.

Keywords: financial game, on-line algorithm, money-making trading problem, competitive ratio

1 はじめに

オンラインアルゴリズムとは外部から連続した要求を受けとり、各々に対して瞬時に反応するアルゴリズムである。これに対してオフラインアルゴリズムとは、あらかじめ全ての要求を受けとった上で、その要求全体に基づいて反応を起こすアルゴリズムである [Karp92]。これまでにオンラインアルゴリズムは、未来の情報がない状態で、即決断しなければならないような状況が生じる様々な問題に対して応用されている。タスクシステム [BLS92], ロボット操縦 [BRS91, FFKRRV91, PY91] がこうした例である。タスクシステムでは、外部から連続した要求を受けとり、各々に対応した処理、及びシステムの状態遷移にコストがかかるというモデルにおいて、いかにコストを小さくするか、ということについて考えられている。また、ロボット操縦においては、ロボットが移動する毎に新たな障害が見つかっていく、というモデルの下でのオンラインアルゴリズムについて考察がなされている。

また、最近ではこのような問題以外に、経済問題に対しての応用も研究されている。文献 [Cov91] では株式投資におけるポートフォリオ選択問題を取り扱っている。ここでは株式市場における複数の証券に対してどのように投資を分散させればよいかを示す簡単なオンラインアルゴリズムを示している。また、文献 [Ragh91] では統計的な敵 (価格の変動) に対するオンラインの投資アルゴリズムを解析している。このようなオンラインアルゴリズムの評価方法の一つとして competitive ratio と呼ばれるものがある [KMRS88]。これは、期間 T において得られた情報を基に何らかのコストがかかる行動をとる時に、オフラインアルゴリズムによる最適な行動の結果生じるコストを C_{OPT}、X というオンラインアルゴリズムを用いた結果を C_X とする。このとき $sup_T \frac{C_X(T)}{C_{OPT}(T)}$ を X の competitive ratio とし、それをどれだけ 1 に近付けることができるかでそのアルゴリズムの良さを表わすというものである。文献 [EFKT92] では、二通貨間為替交換問題において、円相場変動に関する仮定のもとで、利得に関する competitive ratio を有界にするオンラインアルゴリズムを設計している。二通貨間為替交換問題とは、変動相場制のもとで二つの通貨 (ドルと円) の間で交換を繰り返すことにより利益を得ることを目的とする問題である。ここで提案されているアルゴリズムは、円相場 (円 / ドル) の値が増加している区間と減少している区間に分割し、増加している区間ではドルから円、減少している区間では円からドルという方向に取引を行なう単一方向取引アルゴリズムを各々の区間毎に適用し、それを繰り返すという操作により実現されている。その際、competitive ratio を用いて単一方向取引アルゴリズムを最適に設計した。つまり、オフラインによる最適な取引と実際のオンラインの取引との比が一定値 (competitive ratio) を越えることがないように設計し、その一定値を最小になるように定めることで最適なオンラインアルゴリズムを構築した。しかしこれを繰り返して双方向アルゴリズム (円とドルの間でどちらの向きにも交換が可能なアルゴリズム) に適用すると、各区間は独立ではない (前の区間の最終値 = 次の区間の初期値、という関係がある) ので、部分的に最適なものを繰り返しても全体は最適にはならず、双方向の最適アルゴリズムの設計は未解決問題となっている。

これまでに我々は Karp の上下限が知られている連続的なモデルに注目し、仮定された相場変動範囲を越えて実際の変動が生じた場合の実行結果への影響を調べた [DS95a]。今回はこの解析をふまえて、いくつかに区間を分割したときに、ある限られた区間が悪い結果となっても全体が良い結果を得られるように、という考えに基づき、双方向への適用を意識した単一方向為替交換アルゴリズムを設計し、双方向においてこのアルゴリズムが Karp のアルゴリズムよりも優れた competitive ratio を示すことを証明する。以下、第 2 章では Karp らが [EFKT92] で示した二通貨間為替交換問題のモデル、単一方向アルゴリズム及びこのアルゴリズムの双方向への適用を説明する。第 3 章では、これらの結果に基づいて、双方向での competitive ratio を Karp よりも小さくするアルゴリズムを構築しこれを示す。

2 Karp による二通貨間為替交換アルゴリズム

2.1 二通貨間為替交換問題のモデル

二通貨間為替交換問題とは、変動相場制のもとで二つの通貨 (ドルと円) の間で交換を繰り返すことにより利益を得ることを目的とする問題である。これには大きく以下の二つのモデルに分類される。

1. 連続的モデル
   円相場 x が時刻 $t(t \in [m, M])$ の関数で表され、任意の t において取引可能。ただし、$x(t)$ は連続であるとは限らない。
2. 離散的モデル
   円相場 x が日付 $i(i = 0, 1, \cdots, n)$ の関数で表される。1 日 1 回の取引が可能。

2.2　二通貨間為替交換問題に対するアルゴリズム

[EFKT92] では、円相場変動に関する仮定のもとで、有界な competitive ratio を達成するオンラインアルゴリズムを設計している。これは最適なオフラインアルゴリズムを基準としているため、最適なオフラインでもあまり利益が得られないような相場の変動の際に不利益となる可能性がある。[CCEKL95] では、未来の円相場変動に関してある程度の情報が得られれば必ず利益をもたらす、というオンラインアルゴリズムを示している。ただしこれは、不利益にならないことを最優先としているので大きな利益は得られにくく、また、相場変動に関する情報 (実際は仮定) が誤った場合、不利益を受けることがある。

2.3　Karp のアルゴリズム

Karp の二通貨間為替交換アルゴリズムとは、円相場 x(円 / ドル) の値が増加している区間と減少している区間に分割し、増加している区間ではドルから円、減少している区間では円からドルという方向に取引を行なう単一方向取引アルゴリズムを各々の区間毎に適用し、それを繰り返すという操作により実現されている。
Karp による単一方向取引アルゴリズムは以下の 3 つのモデルのもとで実現されている。

1. 相場の上下限が知られている連続的モデル
2. 相場の上下限が知られている離散的モデル
3. 相場の上下限の比だけが知られている離散的モデル

これまでに我々の研究では 1. のモデルを採用し、仮定崩壊時の解析を行なった [DS95a]。この結果は Karp らが 2. のモデルに関して示した結果 [EFKT92] と同様のものであった。さらに我々は、第 4 のモデルとして、相場の上下限の比だけが知られている連続的モデルの設計も行なった [DS95b] 。

2.4　相場の上下限が知られている連続的モデル

取引を行なう期間 $[0,T]$ において、円相場 x ($m \leq x \leq M$) は時刻 $t(t \in [0,T])$ の関数として表わされ、$[0,T]$ 内の任意の時刻において取引可能である。ただし、関数 $x(t)$ には不連続点が存在し得るものとする。つまり、不連続点の発生に反応して取引を行なう場合、不連続点の発生した後の相場で取引は行なわれる。これは、現実世界においては急激な相場の変動に対して反応するのが間に合わないことが十分あり得るので、それを考えに入れたものである。(図 1 参照)
Karp のアルゴリズムは、アルゴリズムを実行する期間を、相場が増加している区間と減少している区間に分割し、それぞれの区間に対して以下に示す単一方向為替取引アルゴリズムを適用し、交換を行なうというものである。

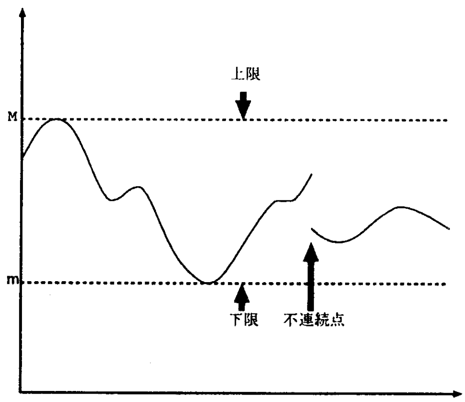

図 1

Karp の単一方向為替取引アルゴリズムとは、円相場関数 x(円／ドル) が増加している（ドルの価値が上がっている）区間ではドルを円に、減少している（円の価値が上がっている）区間では円をドルに、といういずれか一方向への取引のみを行なうアルゴリズムである。この二つの方向への取引をそれぞれ交互に繰り返して適用することで Karp の双方向の為替交換アルゴリズムは実現されている。

2.5　Karp による単一方向為替取引アルゴリズム

ある一定期間 T において、単一方向への取引を行なう (円売ドル買か円買ドル売のいずれかしか行なわない) ケースを考える。この際に、ある入力 (相場の変動) に対して最適な取引を行なった結果得られる金額を $P_{OPT}(T)$、A というオンラインアルゴリズムを用いた結果得られる金額をを $P_A(T)$ とする。このとき $sup_T \dfrac{P_{OPT}(T)}{P_A(T)}$ を A の competitive ratio と定義し、これを最小とするようにこのアルゴリズムは構築されている。

時刻 t ($t \in [0,T]$) における円相場を $x(t)$ ($m \le x(t) \le M$)、任意の t_1,t_2 ($t_1 \le t_2 < T$) において $x(t_1) \le x(t_2)$ を示すものとする。$t_2 = T$ の場合を含まないのは、時刻 T において不連続点が発生し、それによって単調増加区間が終了するケースがあり得るからである。また、m, M および $x(0)$ ($= a$) は知られているものとし、この3つの値から区間ごとに R という値を定め、各区間において $P_{OPT}(T)/P_A(T)$ が R 以下になるように取引を行なう。R の定義は以下の通りである。

$$R = \begin{cases} r & a \in [m, rm] \\ 1 + \frac{a-m}{a}\ln\frac{M-m}{a-m} \quad (\le r) & a \in [rm, M] \end{cases} \qquad (r = \ln\frac{\frac{M}{m}-1}{r-1})$$

これは、相場 x が a から M まで連続的に単調増加した場合 $x = M$ のときにちょうどドルがなくなるように定めたものである。R の最大値は r なので、このアルゴリズムは1区間ごとに r という competitive ratio を保証する。

このアルゴリズムは以下に示す規則に従って取引を行なう。以下の記述はドルから円への交換の場合である。相場が x の時のドルの額を $D(x)$、円の額を $Y(x)$ とし、初期値を $D = 1, Y = 0$ とする。

規則

1. 終了時には残っているドルを全て円に交換する
2. (1) のケース以外では、それまでよりも相場が上昇した場合に取引を行なう
3. (2) の条件で取引を行なう場合は、相場の変化に応じて以下の金額を所持するように円を買う

相場が連続的に増加している場合

$a \in [m, rm]$

$$\begin{cases} x \in [a, rm] & D(x) = 1 \\ & Y(x) = 0 \\ x \in [rm, M] & D(x) = 1 - \frac{1}{r}\ln\frac{x-m}{rm-m} \\ & Y(x) = \frac{x}{r} - m(1 - \frac{1}{r}\ln\frac{x-m}{rm-m}) \end{cases}$$

$a \in [rm, M]$

$$\begin{cases} x = a & D(a) = \frac{a(1-\frac{1}{R})}{a-m} \\ & Y(a) = \frac{a(\frac{a}{R}-m)}{a-m} \\ x \in [a, M] & D(x) = \frac{a(1-\frac{1}{R})}{a-m} - \frac{1}{R}\ln\frac{x-m}{a-m} \\ & Y(x) = \frac{x}{R} - m\left\{\frac{a(1-\frac{1}{R})}{a-m} - \frac{1}{R}\ln\frac{x-m}{a-m}\right\} \end{cases}$$

以下にこれらの式の考え方を示す。

相場が x の時点で、ドルは $D(x)$、円は $Y(x)$ 存在する。その時点で最悪でも $mD(x) + Y(x)$ の円を得ることができる。最適な取引により得られる円の額は x なので、$mD(x) + Y(x) = x/R$ を満たすように取引をおこなえばよい。また、$xD'(x) = -Y'(x)$ がなりたつので、この二つの式から微分方程式を解くことで上のアルゴリズムで示す式が得られる。ただし、$x < rm$ においては $mD(x) + Y(x) > x/R$ が常に成り立つので取引は行なわれない。

また、途中で不連続点が発生し、その前後で相場が増加した場合は、そのたびに $mD(x) + Y(x) = x/R$ にしたがって式の修正を行なうことが望ましいが、修正しなくてもドルと円のいずれか一方の式に従って操作を行なえば、もう一方の通貨は与式よりも大きな額を得ることができるのでここでは省略する。

2.6 Karp のアルゴリズムの双方向への適用

Karp は双方向のアルゴリズムを、円相場 x(円 / ドル) の値が増加している区間と減少している区間に分割し、単一方向取引アルゴリズムを各々の区間毎に適用し、それを繰り返すという操作により実現している。これによって得られる competitive ratio は以下のようになる。

定理 2.1 [EFKT92] 相場の変動が、アルゴリズム内で仮定された範囲 $[m, M]$ を越えなかった場合、このアルゴリズムは k 区間で r^k という *competitive ratio* を満たす。

このような結果をもたらす入力は、右図のように上限と下限の間を連続的に往復するケースである。

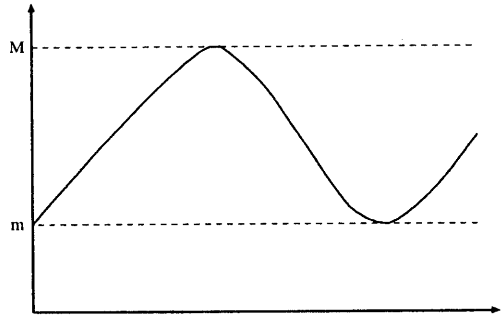

図 2

3 上下限の知られたモデルでの改良したアルゴリズム

3.1 Karp のアルゴリズムの問題点

Karp のアルゴリズムは、アルゴリズムを実行する期間を、相場が増加している区間と減少している区間に分割し、それぞれの区間に対して r という competitive ratio を満たす単一方向為替取引アルゴリズムを適用し、交換を行なうというものである。これによって、区間数が k の期間アルゴリズムを適用した場合の全体の competitive ratio は r^k となる。

Karp は単一方向為替取引アルゴリズムを最適に (r が最小になるように) 設計したが、各区間は独立ではない (前の区間の最終値 = 次の区間の初期値という関係がある) ので、部分的に最適なものを繰り返しても全体は最適にはならない。以下に具体例を示す (図 3 参照)。
円相場 x が rm 以上の値まで増加した後、不連続点によって m まで減少するという区間について考える。このとき、この区間では $P_{OPT}(T)/P_A(T)$ は r になる。しかし、次の区間は $P_{OPT}(T)/P_A(T)$ は 1 になる。つまり、前の区間にとって不利な変動が、次の区間にとっては有利な変動となる。

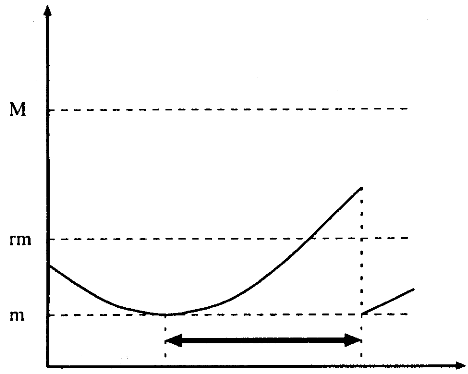

図 3

今回はこの点に注目し、前後の区間との関係を考慮に入れ、ある区間で r よりも悪い結果になっても別の区間で取り戻せばよい、という考えを用いることで、r の値をこれまでよりも小さく定めることが出来る単一方向為替取引アルゴリズムを構築したので以下に示す。

3.2 改良した単一方向為替取引アルゴリズム

今回改良した単一方向為替取引アルゴリズム (増加区間の場合) は k 区間 (k は任意の自然数、ただし k 番目の区間の終了時において円相場 $x(t)$ は連続である) に適用したときに competitive ratio が $\tilde{r}^k$ になるように設計されている。また、1 区間での competitive ratio は $\tilde{r}^2$ である (証明は後述)。

区間の始点での x の値が a、アルゴリズムが区間の終了を認識した瞬間の x の値が $\tilde{r}m$ 以上であるとき $P_{OPT}(T)/P_A(T)$ を $\tilde{R}$ 以下にする。

$$\tilde{R} = \begin{cases} \tilde{r} & a \in [m, \tilde{r}^2 m] \\ 1 + \frac{a - \tilde{r}m}{a} \ln \frac{M - \tilde{r}m}{a - \tilde{r}m} \quad (\leq \tilde{r}) & a \in [\tilde{r}^2 m, M] \end{cases} \qquad (\tilde{r} = \ln \frac{\frac{M}{\tilde{r}m} - 1}{\tilde{r} - 1})$$

アルゴリズムを以下に示す。
規則

1. 終了時には残っているドルを全て円に交換する
2. (1) のケース以外では、それまでよりも相場が上昇した場合に取引を行なう
3. (2) の条件で取引を行なう場合は、相場の変化に応じて以下の比率で円とドルを所持するように円を買う。

$$\begin{cases} x \in [m, \tilde{r}^2 m] & D(x) : Y(x) = 1 : 0 \\ x \in [\tilde{r}^2 m, M] & D(x) : Y(x) = \ln \dfrac{M - \tilde{r}m}{x - \tilde{r}m} : x - \tilde{r}m \ln \dfrac{M - \tilde{r}m}{x - \tilde{r}m} \end{cases}$$

Karp のアルゴリズムにおいて、$r = \ln \dfrac{\frac{M}{m} - 1}{r - 1}$ という式が成り立ち、今回のアルゴリズムにおいて $\tilde{r} = \ln \dfrac{\frac{M}{\tilde{r}m} - 1}{\tilde{r} - 1}$ である。この二つの式から、

$$\frac{M}{m} = 1 + (r-1)e^r = \tilde{r}\left\{1 + (\tilde{r}-1)e^{\tilde{r}}\right\}$$

r, $\tilde{r}$, $\frac{M}{m} > 1$ なので、$r > \tilde{r}$ である。
このアルゴリズムの構築方針を以下に示す。Karp [EFKT92] のアルゴリズムは $\frac{M}{m}$ の値を小さく設定すれば competitive ratio を小さく定めることができる。しかし $\frac{M}{m}$ を小さく設定したことで、$[m, M]$ を越える範囲の変動が発生してしまうと逆に悪い結果となることはこれまでに知られている [DS95a] のでこれを以下に示す (証明は付録に追記)。

定理 3.1 相場の変動範囲が、アルゴリズム内で仮定された範囲 $[m, M]$ を越えて、$x \in [m/\alpha, \beta M]$ *(*$\alpha, \beta \geq 1$*)* に及んだとき *(*図 *4* 参照*)*、このアルゴリズムは以下のような *competitive ratio* を保証する。ただし、r は範囲を $[m, M]$ と仮定して、その仮定が正しかった場合の *competitive ratio* である。

1. *1* 区間 *(*増加区間 *or* 減少区間*)* において

$$max[\alpha r, \beta r]$$

2. 期間 $[0, T]$ 内に $2k$ 区間 *(*k の増加区間と k の減少区間*)* が存在し、$t = T$ において円相場関数 $x(t)$ が連続な場合

$$\alpha^k \beta^k r^{2k}$$

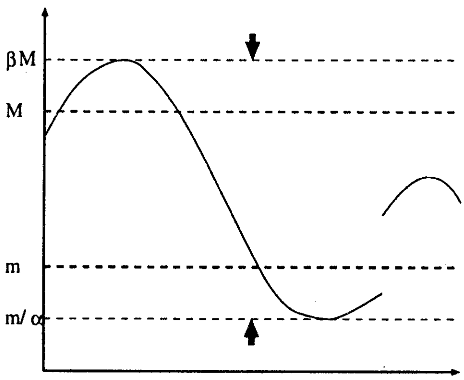

図 4

ここで $\alpha^k \beta^k r^{2k}$ という competitive ratio が得られるような ($[m/\alpha, \beta M]$ において最悪な) 相場の変動の際の動作について考えたところ、相場が増加している区間では上限、相場が減少している区間では下限の影響を受けていることがわかった。逆にいえば、増加区間での下限、減少区間での上限はあまり悪影響は及ばさないので、うまく区間毎に範囲を狭めに考えればより良い結果を得ることができる。このことを利用した単一方向アルゴリズムが上に示されたものである。

このアルゴリズムは、$x \geq \tilde{r}m$ において、次の瞬間に x が $\tilde{r}m$ になった場合に P_{OPT}/P_A(最適な取引との利得の比) が $\tilde{R}$ になるように設計されている。つまり、$x \in [m, \tilde{r}m]$ では相場が上昇しても取引は行なわず、$x \in [\tilde{r}m, M]$ では下限を $\tilde{r}m$ とみなしたときの Karp のアルゴリズムと同じ動作をおこなう。

つまり、$\tilde{r}m$ よりも小さな値にまで不連続点によって減少した場合、P_{OPT}/P_A は $\tilde{r}$ よりも大きくなる (最大 $\tilde{r}^2$) が、それ以上に次の区間の P_{OPT}/P_A が小さくなるようになっている。

定理 3.2 この単一方向アルゴリズムの 1 区間での *competitive ratio* は $\tilde{r}^2$ である。

証明. このアルゴリズムは $[\tilde{r}m, M]$ においては Karp のアルゴリズムと同じ動作を行ない、$\tilde{r}$ という competitive ratio が得られる。しかし実際の変動範囲が $[m, M]$ であることから、定理 3.1 の 1 区間での解析において、m を $\tilde{r}m$、α を $\tilde{r}$、β を 1、r を $\tilde{r}$ に置き換えればよい。ゆえにこのアルゴリズムの 1 区間での competitive ratio は $max[\tilde{r}^2, \tilde{r}] = \tilde{r}^2$ である。

3.3 改良した単一方向為替取引アルゴリズムの双方向への適用

定理 3.3 連続する k 区間 *(ただし、k 番目の区間の終了時に $x(t)$ は連続)* において、今回のアルゴリズムは $\tilde{r}^k$ という *competitive ratio* を保証する。

証明. アルゴリズムを適用する期間を $[0, T]$、$x(t)$ が極値をとる時刻を $t_i(t_i < t_{i+1}, t_0 = 0, t_k = T)$ とし、以下の証明は、i が偶数のとき $x(t_i)$ が極小になるものとして行なう。

t_i が極値であることをアルゴリズムが認識するのにはごくわずかな時間が必要なので、この時刻を $t_i + 0$ と表し、$x(t_i + 0) = x_i$ とする。

単一方向アルゴリズムの中で定義されていた $\tilde{R}$ を、区間毎に定義するために、以下のように定義し直す。

$$\tilde{R}(x) = \begin{cases} \tilde{r} & x \in [m, \tilde{r}^2 m] \\ 1 + \dfrac{x - \tilde{r}m}{x} \ln \dfrac{M - \tilde{r}m}{x - \tilde{r}m} \quad (\leq \tilde{r}) & x \in [\tilde{r}^2 m, M] \end{cases}$$

$$\tilde{R}_n(x) = \begin{cases} \tilde{R}(x) & n \text{ が偶数のとき} \\ \tilde{R}(\dfrac{mM}{x}) & n \text{ が奇数のとき} \end{cases}$$

また、n 番目の区間における最適な取引と実際の取引の利得の比を $R_n{}^*$ と定義すると、以下の式が成り立つ。

$$R_n{}^* \leq \tilde{r}\alpha_n(x_n)\beta_{n-1}(x_{n-1}) \quad (n = 1, 2, \cdots, k)$$

ただし、$\alpha_n(x), \beta_n(x)$ は以下のように定義される。

$$\alpha_n(x) = \begin{cases} 1 & n = k \\ max[1, \dfrac{\tilde{r}x}{M}] & n \neq k \text{ かつ } n \text{ が偶数のとき} \\ max[1, \dfrac{\tilde{r}m}{x}] & n \neq k \text{ かつ } n \text{ が奇数のとき} \end{cases} \quad (\geq 1)$$

$$\beta_n(x) = \frac{R_n(x)}{\tilde{r}} (\leq 1)$$

また、$\alpha_n(x), \beta_n(x)$ の間には以下のような関係がある。

$$\alpha_n(x)\beta_n(x) \leq 1 \quad (n = 1, 2, \cdots, k-1)$$

上の二つの式より以下の式が導かれる

$$\prod_{n=1}^{k} R_n{}^* \leq \tilde{r}^k \beta_0(x_0)\alpha_k(x_k) \prod_{n=1}^{k-1} \{\alpha_n(x_n)\beta_n(x_n)\} \leq \tilde{r}^k$$

ゆえに k 区間での competitive ratio は $sup \prod_{n=1}^{k} R_n{}^* = \tilde{r}^k$ である。 **(証明終)**

ただし、このアルゴリズムも最適ではない。これは $R_n{}^* \leq \tilde{r}\alpha_n(x_n)\beta_{n-1}(x_{n-1})$ $(n = 1, 2, \cdots, k)$ において等号が成立する条件がごく限られているので、等号が成立しない (良い結果が得られる) 条件下でのリスクをより高めることで、$\tilde{r}$ の値をさらに小さくすることが可能だからである。このことを以下に示す。

今回のアルゴリズムは以下のような相場の変動のときに最悪の結果 (1 区間あたりの competitive ratio が $\tilde{r}$) を示すように設計されている (図 5 参照)。

1. 区間 1,2 のように相場が $\tilde{r}^2 m$ ($\frac{M}{\tilde{r}^2}$) まで上昇 (減少) した後不連続点によって m (M) まで減少 (増加) した場合 (区間 1 は $\tilde{r}^2$, 区間 2 は 1)

2. 区間 3,4 のように m から M (M から m) まで単調に増加 (減少) した場合 (区間 3,4 ともに $\tilde{r}$)

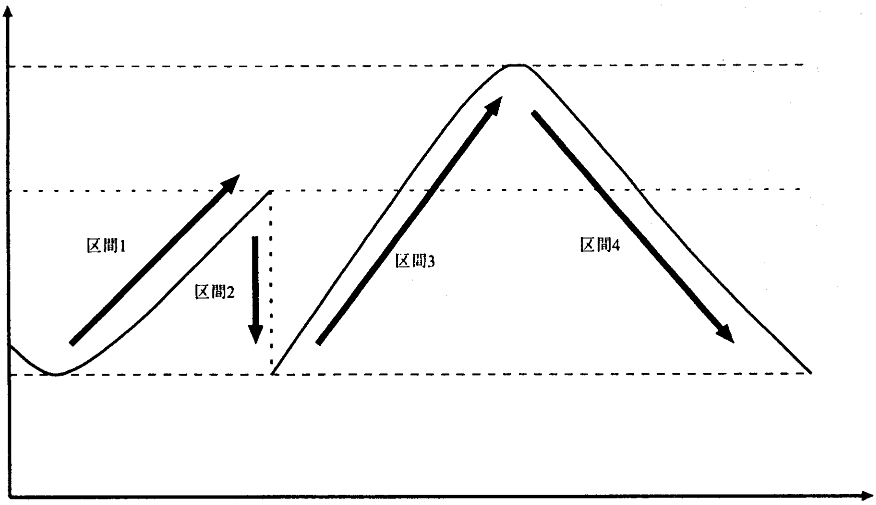

図 5

しかし、図 6 のように $\tilde{r}^2 m$ より大きな値から m まで不連続に変化した場合には、すでに一部のドルを円に変えているので、最適な取引との比率は $\tilde{r}^2$ よりも小さくなる。これを可能な限り $\tilde{r}^2$ またはそれにに近い値になるように設計することで $\tilde{r}$ の大きさを小さくすることができる。

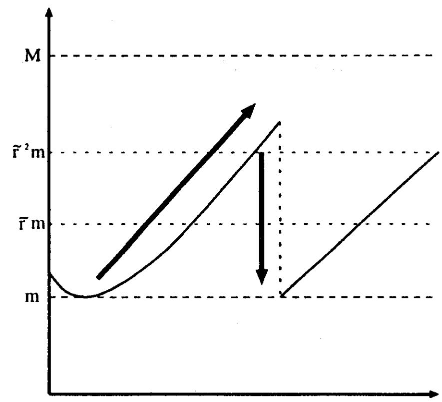

図 6

4 おわりに

文献 [CCEKL95] において、二通貨間為替交換問題に対するアルゴリズムが提案されている。ここでは、Karp ら [EFKT92] のアルゴリズムの問題点が指摘されている。つまり、オフラインでの最適な取引を基準としているため、最適な取引でもあまり利益が得られないような相場の変動の際には不利益を受けてしまうことがある、というものである。そこで [CCEKL95] においては、元の金額を基準にした評価に基づいてオンラインアルゴリズムが設計されている。

このような不利益は、我々が今回提案したアルゴリズムにも発生し得る。そこで、[CCEKL95] での評価方法に基づけば、Karp らのアルゴリズムと我々のアルゴリズムはどちらの方が優れているのか、という議論が考えられる。現在、我々のアルゴリズムの方が優れているという予想はあるものの、厳密な解答は得られていない。今後は、最適アルゴリズムの設計と並行して、このような別の評価方法に関しても考察を進めてみたい。

参考文献

[BLS92] A.Borodin, N.Linial, and M.Saks. An optimal online algorithm for metrical task system. Journal of the ACM, 39:745-763, 1992.

[BRS91] A.Blum, P.Raghavan, and B.Schieber. Navigating in unfamiliar geometric terrain. In Proceeding of the 23rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing, pages 494-504, 1991.

[Cov91] T.M.Cover. UNIVERSAL PORTFORIOS, In Journal of Mathematical Finance, Vol.1, No.1, pages1-29, January 1991.

[CCEKL95] Andrew Chou, Jeremy Cooperstock, Ran El-Yaniv, Michael Klugerman and Tom Leighton. The Statistical Adversary Allows Optimal Money-Making Trading Strategies. In Proceeding of SODA'95, 1995.

[DS95a] 檀浦詠介, 櫻井幸一. オンライン為替交換アルゴリズムにおける予想外相場変動時の効率解析, 平成7年度電気関係学会九州支部連合大会講演論文集, pages713. Sep, 1995.

[DS95b] 檀浦詠介, 櫻井幸一. Karp のオンライン為替交換アルゴリズムにおける異常相場変動時の効率解析, 平成7年度京都大学数理解析研究所研究集会『最適化の数理における離散と連続構造』,Nov,1995.

[EFKT92] R.El-Yaniv, A.Fiat, R.Karp and G.Turpin. Competitive Analysis of Financial Games. In Proceeding of the 33rd Annual Symposium on Foundations of Computer Science, pp.327-333, 1992.

[EK93] Ran El-Yaniv and Richard M.Karp. The Mortgage Problem. Proceedings of the 2nd Israel Symposium on Theory and Computing Systems, 1993.

[FFKRRV91] A.Fiat, D.P.Foster, H.J.Karloff, Y.Rabani, Y.Ravid andS.Vishwanathan. Competitive algorithms for layered graph traversal. In Proceeding of the 32nd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, pages 288-297, 1991.

[Karp92] Richard M.Karp. On-Line Algorithms Versus Off-Line Algorithms: How Much is it Worth to know the Future?, In Proceeding of IFIP, 1992.

[KMRS88] A.R.Karlin, M.S.Manasse, L.Rudolph, and D.D.Sleator. Competitive snoopy caching. Algorithmica,3(1):70-119,1988.

[PY91] C.H.Papadimitriou and M.Yanakakis. Shortest paths without a map. Theoretical Computer Science, 84:127-150, 1991.

[Ragh91] P.Raghavan. A statistical adversary for on-line algorithms. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 7;79-83, 1991.

[RS94] P.Raghavan and M.Snir. Memory versus randomization in on-line algorithms. IBM Journal of Research and Development, 38:683-707, 1994.

付録. 定理 3.1 の証明

証明. まずは、このアルゴリズムが、仮定の範囲外でどのような動作を行なうかを示す。

$$\begin{cases} x \leq m & \text{終了時以外には操作を行なわない} \\ x \geq M & \text{全てのドルを円に変える} \end{cases}$$

これより、相場が a から b まで連続的に増加するケースを考える。最適な操作により得られる円の額は $Y = b$ である。また、$x = b$ で終了するので、competitive ratio は $b/\{bD(b) + Y(b)\}$ の最大値で表わすことができる。

次に、Karpのアルゴリズムで得られる金額を示す。$x \in [m/\alpha, rm], [rm, M], [M, \beta M]$ で動作が各々違ってくるので、a, b が各々どの範囲に当てはまるかによって場合分けして表す。

Case.1 $a \in [m/\alpha, rm]$

$$\begin{cases} b \in [a, rm] & D(b) = 1, Y(b) = 0 \text{ より } bD(b) + Y(b) = b \\ b \in [rm, M] & bD(b) + Y(b) \geq mD(b) + Y(b) = b/r \\ b \in [M, \beta M] & D(b) = D(M) = 0\ ,\ Y(b) = Y(M) = M/r \\ & \text{より } bD(b) + Y(b) = M/r \end{cases}$$

Case.2 $a \in [rm, M]$

$$\begin{cases} b \in [a, M] & bD(b) + Y(b) \geq mD(b) + Y(b) = b/R \\ b \in [M, \beta M] & D(b) = D(M) = 0\ ,\ Y(b) = Y(M) = M/R \\ & \text{より } bD(b) + Y(b) = M/R \end{cases}$$

Case.3 $a \in [M, \beta M]$

$$bD(b) + Y(b) = a$$

以上のことよりcompetitive ratioは $b = \beta M$ のときに最大値 βr をとる。次に、相場が a から b まで連続的に増加し、b になった瞬間に不連続点が発生し、相場が $c(c \leq b)$ になるケースを考える。

最適な操作により得られる円の額は $Y = b$ である。また、$x = c$ で終了するので、competitive ratioは $b/\{cD(b) + Y(b)\}$ の最大値となる。

$$\begin{cases} b \in [m/\alpha, rm] & D(b) = 1, Y(b) = 0 \text{ より } cD(b) + Y(b) = c \\ b \in [rm, M] & cD(b) + Y(b) \geq c \\ b \in [M, \beta M] & D(b) = D(M) = 0\ ,\ Y(b) = Y(M) = M/r \\ & \text{より } cD(b) + Y(b) = M/r \end{cases}$$

となり、competitive ratioは $max[\alpha r, \beta r]$ となる。

ここで、上限および下限が広がったことによりそれらがcompetitive ratioを大きくするのはどのようなケースであるかを考えると以下のようになる。

a. ドルがなくなった(x が M に達した)あとも相場が上昇した場合

(最適な取引により得られる結果が最大 β 倍になる)

b. ドルがなくならないうちに不連続点により相場が(m より小さい値まで)暴落した場合

(実際に得られる結果が最大 α^{-1} になる)

また、この二つのケースが同じ区間内で共に発生することはあり得ない(bのケースが発生したら、その時点でその区間が終了する)。このことより、1の結果が導かれる。ところがbのケースで αr という結果が出るためには不連続点によって相場が暴落しなければならないが、これは次の区間をoptimalに近付けてしまう。

次の減少区間のcompetitive ratioは $c/(\alpha m)$ なので(逆方向のアルゴリズムにとっては c は上限を超えているから),二区間でのcompetitive ratioは αr^2 ということになるが、これよりは連続な場合の $\alpha\beta r^2$ の方が大きい。ゆえに2の結果が導かれる。

(証明終)

これは相場の変動範囲を $[m/\alpha, \beta M]$ と正しく仮定した場合のcompetitive ratioよりも大きくなり悪い結果となる。