

一般図形ボロノイ図の近似構成法とその改良

山田和公 杉原厚吉

東京大学大学院工学系研究科計数工学専攻

概要

線分, 円弧, スプライン曲線などの任意の図形を生成元とする一般図形ボロノイ図は複雑な境界を持つため, その構成及び取り扱いが困難である. これを解決する方法の一つとして, それぞれの図形の境界を十分多くの点に置きかえて, これらの点に対するボロノイ図で一般図形ボロノイ図を近似することが考えられる. この近似の精度は, 点をどのように配置するかに依存する. 本報告では, 一般図形ボロノイ図の近似を改良する反復方法を提案する. また, 実験によって, この方法の有効性を確認すると共に, 曲線上に点が分布している場合のボロノイ図の特徴とその利用法についても検討する.

Approximation of Voronoi Diagrams for Figures and Its Improvement

Kazuhiro Yamada and Kokichi Sugihara

Department of Mathematical Engineering and Information Physics,
Graduate School of Engineering, University of Tokyo

Voronoi diagrams for general figures are difficult to construct because Voronoi regions have complicated boundaries. One way to circumvent this difficulty is to approximate the Voronoi diagrams by the ordinary Voronoi diagrams for points located on the boundaries of the figures. The precision of the approximation depends on the locations of points on the boundaries. This paper proposes an iterative method for improving Voronoi diagrams for figures, and considers the performance of the method from both theoretical and experimental points of view.

1 背景

点ボロノイ図とは, 点集合 (この要素を生成元または母点と呼ぶ) $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ が

与えられたとき, 各生成元の領域

$$V(p_i) = \{p \mid p \in \mathbb{R}^2, d(p, p_i) < d(p, p_j), \\ j \neq i\} \quad (1)$$

とその境界に空間を分割するものである。ここで、 $d(\cdot, \cdot)$ は、ユークリッド距離を意味する。

ボロノイ図を効率良く構成する方法には、逐次添加法 [5]，分割統治法 [1, 3] などがあり、生成元数 n に対して、前者は $O(n^2)$ ，後者は $O(n \log n)$ の最悪計算時間でボロノイ図を構成することができる。さらに、バケットを利用することによって、生成元が一様分布している場合には、両者とも平均 $O(n)$ の時間で構成することができる。また、特に逐次添加法は、一様分布以外の多くの場合においても実用的には $O(n)$ に近い計算時間で実行できることが経験的にわかっている。数値誤差を含む環境で、安定して動作するように、これらの方法を改良する研究も成功している [4, 8]。

一般図形ボロノイ図とは、生成元を、一般の図形に拡張したもので、次のように定義される。図形の集合を、 $\Gamma = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ とする。

$$V_{\Gamma}(g_i) = \{p \mid p \in \mathbb{R}^2, d(p, g_i) < d(p, g_j), j \neq i\} \quad (2)$$

を生成元 g_i のボロノイ領域という。ただし、 $d(p, g_i)$ は点 p と図形 g_i の間の距離で、次のように定義される。

$$d(p, g_i) = \inf\{d(p, g) \mid g \in g_i\} \quad (3)$$

平面は $V_{\Gamma}(G_1), V_{\Gamma}(G_2), \dots, V_{\Gamma}(G_n)$ とその境界に分割される。この分割を g_1, g_2, \dots, g_n を生成元とする一般図形ボロノイ図という。明らかに、一般図形ボロノイ図の構成においては、各図形の境界のみを考えれば十分である。

点ボロノイ図の領域の境界が直線であるのに対して、一般図形ボロノイ図では、境界は複雑な曲線になるため、複雑な形状の生成元に対するボロノイ図の構成および取り扱いは困難である。実際、線分、円弧など特定の図形に対するボロノイ図のアルゴリズムが提案されているのみである [2]。これに対する対策の一つとして、各図形の境界を点で置きかえることによって、点ボロノイ図を用いて一般図形ボロノイ図の近似を得る方法が提案されている [7]。この近似の主な利点は以下のとおりである。

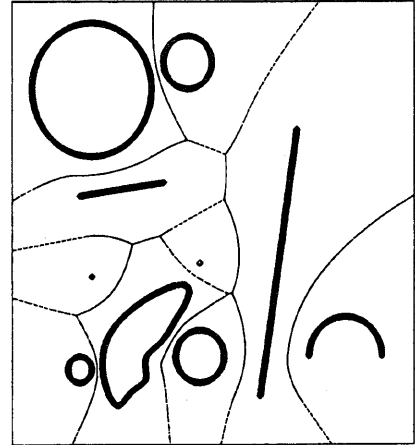


図 1. 一般図形ボロノイ図

- 各図形を点で近似するため、入力に様々な種類の図形を取り扱うことができる。
- 点ボロノイ図によって近似するため、実際には曲線である境界を、線分によって近似することができる。

今回は、入力される図形は、境界が、点、線分、円弧、3次の B-Spline 曲線で表わされる図形を扱う。

図 1 は、一般図形ボロノイ図の例である。

このような近似において、どのように各図形を点で近似するか、すなわち、どのように各図形の境界上に点を配置するか、という問題は重要な問題であり、以下では、反復によって近似を改良していく方法を提案する。また、以後は与えられた各図形を生成図形、生成図形の境界を構成する個々の線分、円弧、点などを生成要素と呼び、それらを近似する点集合の各点を母点と呼ぶ。ここで各要素の端点は、独立した一つの要素として扱う。

2 一般図形ボロノイ図の構成法

一般図形ボロノイ図の近似は、以下の手順によって得られる。

一般図形ポロノイ図の近似構成手続き

1. 各生成要素上に母点を配置する。
2. 配置された母点に対する点ポロノイ図を構成する。
3. 異なる生成図形の間境界になっているポロノイ辺だけを残し、同じ生成図形上の2点の間の境界になっているポロノイ辺を取り除く。
4. 十分精度の良い近似が得られたならば終了する。不十分なら母点の配置を改良して2に進む。

図2は図1の近似を母点数100で実際に構成した例である。上から一回目の点配置に対する点ポロノイ図、不要な辺を除いた近似ポロノイ図、さらに反復して得られた近似ポロノイ図である。

初期段階における母点の配置に関して、各生成要素上に点を配置する最も自然な方法は、生成要素上に等間隔に点を配置することである。今回提案する改良方法は、出来上がったポロノイ図の近似から得られる情報を用いて、点を再配置することによって、近似を改良していく方法である。

反復の終了の判定や再配置のために、得られたポロノイ図の近似精度の評価をするための指標が必要になる。このような指標としてポロノイ辺の長さに注目する。まず、ポロノイ辺、母点、生成要素の重みを次のように定義する。

定義 (ポロノイ辺の重み) 各ポロノイ辺の長さをその辺の重みとする。ただし、取り除かれるべきポロノイ辺の重みは、長さ0の辺と区別するために負の数(-1)に設定する。

定義 (母点の重み) 各母点に対して、周囲のポロノイ辺のうち、連続している非負の重みを持つポロノイ辺の重みの和の最大値をその母点の重みとする。ただし、生成要素の両側に境界が描かれる場合には、各母点毎により長い方の境界の長さを用いる。

定義 (生成要素の重み) 各生成要素に対して、生成要素上にある点の重みの和を、各生成要素の

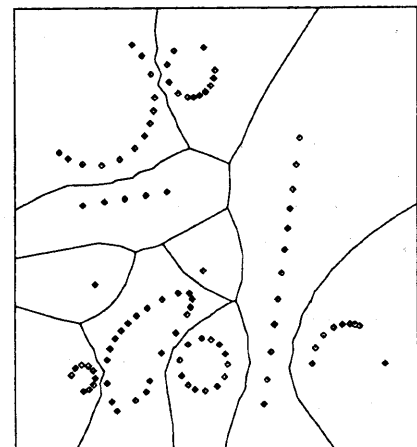
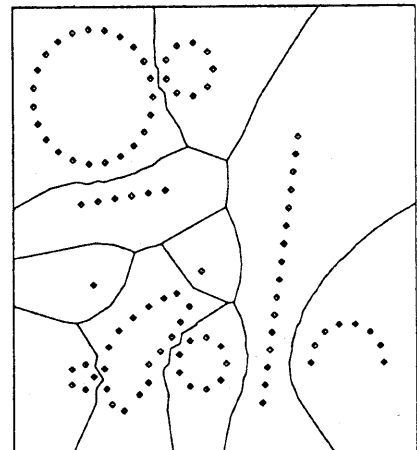
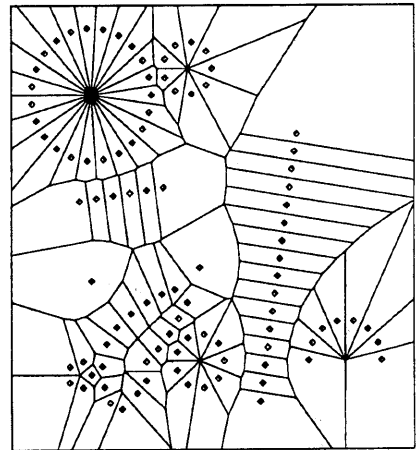


図2. 一般図形ポロノイ図の近似構成

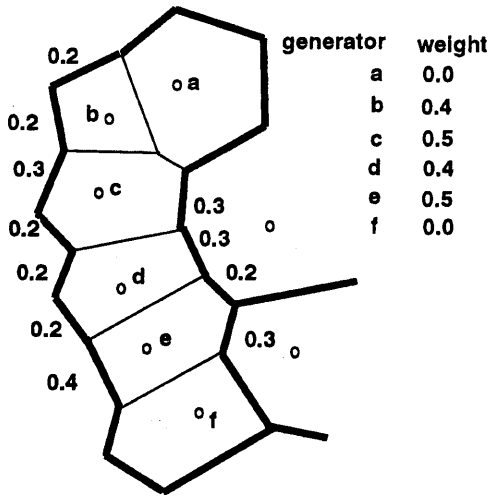


図 3. 母点の重み

重みとする。ただし、生成要素が点の場合、その重みは 0 とする。(点は近似でなく正確に表現できるため、反復による改良の余地がないため。)

これらの重みは、ボロノイ辺の長さ、母点の周りのボロノイ辺の長さ、生成要素の周りのボロノイ辺の長さに対応している。図 3 は母点の重みの例である。

ボロノイ図の近似の粗さを、母点の重みの最大値で評価する。以後、母点の重みの最大値を近似指標と呼ぶ。

具体的に点を再配置する方法について説明する。点の総数は固定されており、それらの点が最も有効に利用できるように配置を修正する。概要は次のとおりである。また、この手続きを適用した例を図 4 に示す。

母点の再配置手続き

1. 各ボロノイ辺、母点、生成要素の重みを計算する。
2. 各生成要素の上に配置する母点の数を、生成要素の重みに比例するように決定する。

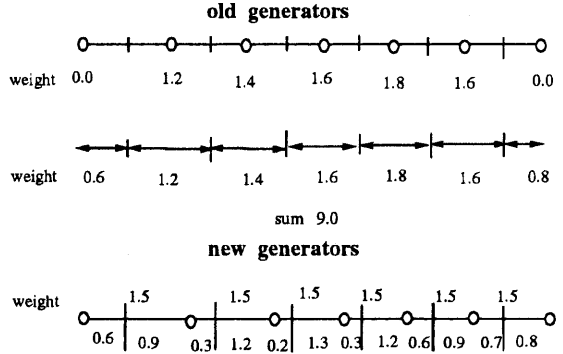


図 4. 母点の再配置

3. 各生成要素を、要素上の母点のボロノイ領域に含まれる区間に分割する。すなわち、隣接する母点の midpoint で生成要素を分割する(図 4 上)。各区間の重みは対応する母点の重みとし、両端点に対応する区間の重みは隣接する区間の重みの $\frac{1}{2}$ とする(図 4 中)。
4. 各母点同士の間隔に対する重み、すなわち隣接する 2 母点によって定まる区間の重みが均等になるように母点を配置する。各区間内の部分区間に対する重みは、区間全体との長さの比で定める(図 4 下)。

3 結果と問題点

このアルゴリズムを、以下に述べる環境の下で、いくつかの例に適用した。

- 初期分布として、母点は各生成要素上に、等間隔に配置する。
- 点ボロノイ図の構成には、逐次添加法を用いる。
- 単独の点及び各要素における端点に対応する母点を先にすべて添加する。
- 上記の添加順序以外は、一般の点ボロノイ図の構成アルゴリズムをそのまま用いる。

計算機は SPARCstation5 (85MHz) を使用した。このアルゴリズムをいくつかの例で実行した結果、次のような事実が判明した。

- 非単調性 同一母点数で反復させた場合、反復に対して近似指標が単調に減少しない。すなわち、必ずしも反復によって改良されない。
- 結果の誤り 配置する点の数が多すぎる場合、構造的に誤った結果を出力する。
- 計算時間 計算時間が入力図形に大きく依存し、母点数 n に対して、 $O(n)$ よりはるかに大きなオーダーの時間を要することがある。

以下では、これらについて詳しく考察する。

3.1 非単調性

図5は、図1の例に対して母点数を100に固定して反復した結果である。横軸は反復回数、縦軸は近似指標の値である。反復によって近似座標の値が振動している。また、図6は、同じ例に対して一回目の母点数を100から12800まで変化させ、二回目の母点数を100に固定して実験した結果である。横軸は一回目の母点数、縦軸は二回目の近似指標の値である。一回目の母点数を増やす方が反復によるより良い近似が得られることがわかる。また、図5とも比較すると、同一母点数で繰り返し反復するよりも、一回目の母点数を十分増やした方が、指標の値が小さくなることがわかる。

非単調性を生じる原因として、一つ前のデータのみ依存して点を再配置していることがあげられる。反復によって過去の結果が失われること、より正確である近似と点の再配置のためにより多くの情報を含んでいる近似とは必ずしも一致しないことから、反復に対して必ずしも結果が改良されるとは限らない。ただし、実際には、ある一定精度まで単調に改良された後は、ある一定区間で精度が振動するような変化を示しており、ある一定レベルまでの近似の改良が可能であることが推察される。これらを考慮すると、有効に反復を行なうためには、母点数の設定および終了の基準として、以下のようなものが考えられる。

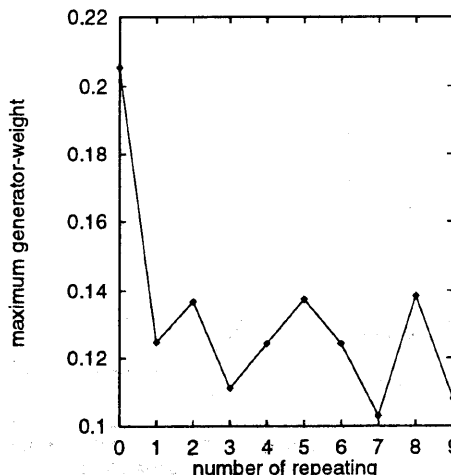


図5. 反復に対する指標の非単調性

- はじめに十分多くの母点を用いて近似ポロノイ図を構成し、この情報を用いて適当な母点数で反復する。
- 一定回数繰り返して最良のものを選ぶ。
- 近似指標がある値以下になるまで、母点数を変化させながら反復する。

前節で提案した反復による改良は、ある一定サイズ以下の母点で、極力精度の良い近似を得たい、という場合に適した改良法だと考えられる。一定サイズの母点を使って最も精度の良いものを得る方法という意味では、1番目にあげた方法がもっとも有効だと考えられる。このように、母点数の減少に対しても、適切な近似が得られるというのがこの反復による方法の大きな利点である。ただしこの方法は、ポロノイ図の構成の段階ではメモリ及び時間に十分な余裕があり、応用上の都合で出力だけが十分小さければ良い、という場合でないと用いることができない。また、次に述べる結果の誤りのために、母点数が多過ぎると反復が失敗するという問題がある。

そのような場合には、次善の方法として、反復を繰り返すという2番目の方法を用いることになる。この場合、精度の指標が振動をはじめたあたりで、反復を打ち切るのが適当であろう。近

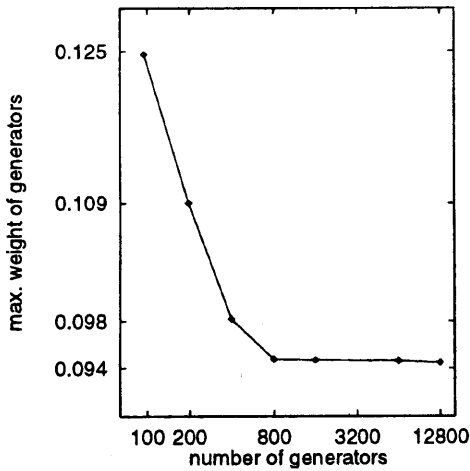


図 6. 初期母点数による効果

似精度に対する基準が設定されているような場合には、反復を行なうよりも、精度の劣る箇所に局所的に母点を追加する方法がより自然であると考えられる。3番目に挙げた方法で反復法を利用した場合は、僅かに母点数を変化させた場合でもポロノイ図を始めから構成しなければならないという欠点を持つ反面、全体の母点配置を変更することによってより小さい母点数で精度基準を達成することが期待されるという利点がある。母点数を変化させて反復させる場合、直前の結果を用いて反復すると現在の母点数だけでなく反復前の母点数にも依存した近似が得られ、現在の母点数における十分良い近似になっているとは限らない。このため、母点数を変化させて反復させる際には、初期段階で十分大きい母点数に対する近似を求めておき、常に初期段階での結果を用いて反復させた方が現在の母点数にのみ依存してより良い近似が得られると考えられる。

3.2 誤った結果

今回実験した例では、初期段階で数万点、反復後では1万点前後の母点数に対して巨視的に明らか結果の誤りを生じた。誤った結果は、計算誤差のために、必然的に生じ得ることである。た

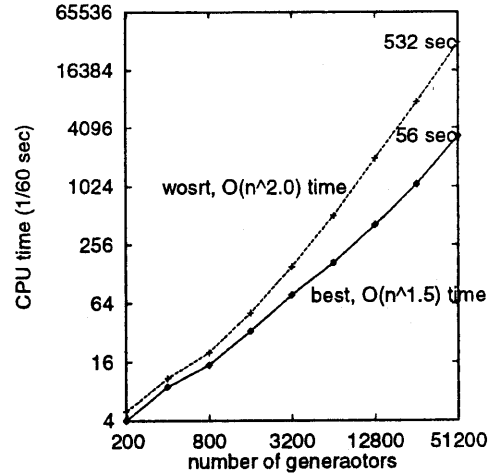


図 7. 母点数と計算時間

だし、今回のように母点が曲線上に分布している場合には、母点の数を増やすことによって、隣り合う母点同士の距離が0に近づいていくため、一般の母点の分布に対する点ポロノイ図の場合と比較しても、数値判定における桁落ちによる誤判定が生じやすく、そのためより小さい母点数に対して近似としての構造を乱すほどの結果の誤りが生じるものと考えられる。特に反復後は母点が偏って分布するために、より誤りを生じやすい。

3.3 計算時間

三つ目の、計算時間に関して考察する。計算時間のほとんどは点ポロノイ図の構成に費やされており、計算時間が $O(n)$ より多くかかっているのは、点ポロノイ図が $O(n)$ の時間で出来ないことによる。計算時間は生成図形によっても変化し、最悪の場合には $O(n^2)$ の時間がかかる。図7に、最も構成時間が短い例と、長い例における計算時間を示す。それぞれ10000点以上の段階において、 $O(n^{1.5})$ 、 $O(n^{2.0})$ の時間を要している。これらは全て反復を行っていない。また、結果が誤る前の段階では、反復後のポロノイ図の構成時間は初期段階の構成時間とほとんど変わらない。

$O(n)$ を越える計算時間がかかる原因として、

表 1. ボロノイ図構成における各パラメータの母点数 n に対するオーダー

項目	オーダー (データ全体)	オーダー (母点 10000 以上)
実際の計算時間	$O(n^{1.5})$	$O(n^{2.0})$
最も多くの母点を含むバケット内の母点数	$O(n^{0.5})$	$O(n^{0.5})$
最も多くの母点と隣接する母点の領域の角数	$O(n^{1.1})$	$O(n^{1.0})$
新しい領域に含まれないと判定されたボロノイ点の数の総和	$O(n^{1.9})$	$O(n^{2.0})$
新しい領域に含まれると判定されたボロノイ点の数の総和	$O(n^{1.0})$	$O(n^{1.0})$
新しく添加された時点での母点の領域の角数の総和	$O(n^{1.0})$	$O(n^{1.0})$
新しく添加する母点がどの母点の領域に含まれるかを求めるために、母点間の距離を調べた回数の総和	$O(n^{1.2})$	$O(n^{1.3})$

以下のようなものが考えられる。

- 各バケット内の母点数が $O(1)$ ではない。
- 各母点のボロノイ領域の辺の数が不均一で、 $O(n)$ 角形の領域を持つ母点が存在する。

バケット法について簡単に説明する。母点数が n 個のとき、全領域を $O(\sqrt{n}) \times O(\sqrt{n}) = O(n)$ 個のバケットに分割する。このとき今回の場合は、母点数の増加に対して各バケット内の生成要素の長さが、 $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$ になることから、 $O(\sqrt{n})$ 個の点が含まれているバケットが存在すると考えられる。

また、円とその中心点が入力に与えられた場合を考えれば明らかに、中心点は $O(n)$ 角形になっている。

各バケットには高々定数個の母点のみが含まれていること、各母点のボロノイ領域の辺の数がほぼ一定 (6 角形) になることが $O(n)$ 時間でボロノイ図が構成できることの基礎になっている。しかし、曲線上に点を分布させている今回の例ではこの両者がどちらも成り立たない。

逐次添加法の手順について簡単に説明する。母点の添加は、大きく次の 3 段階に分けられる。

1. 新しい母点がどのボロノイ領域に含まれているかを求める。

2. 新しい母点に切り取られる部分の木構造を抜き出す。

3. 新しい母点のまわりにボロノイ辺を張り、新しい母点の領域を作る。

第一段階において、バケットに $O(\sqrt{n})$ 個の点が含まれているため、定数時間で第一段階を終了することが困難になる。第二段階において、数値判定の信頼性を高めるために、新しい母点に隣接する全ての母点に対して、その周囲のボロノイ点が含まれるか否かの判定をおこなう方法を用いているため、 $O(n)$ 角形の領域の存在によって、定数時間で第二段階を終了することが困難になる。

このように、各母点の添加を定数時間でおこなうことが困難であるために、全体の構成時間が $O(n)$ 時間を越えるものと考えられる。

表 1 に図 7 で示した計算時間が最も長い例の、各パラメータの母点数 n に対するオーダーを示す。

実際の結果を見てみると、バケットが含む母点数の最大値は $O(\sqrt{n})$ になり、 $O(n)$ 角形の領域を持つ母点も存在している。これらによって生ずるとされる問題点のうち、実際に計算時間に最も大きく影響しているのはボロノイ点の内外判定に関わる部分である。また、新しい母点がどのボロノイ領域に含まれているかを求める段階の間も増す傾向がある。それ以外のパラメータは、

母点数に対して線形に変化している。また、内外判定においても、線形性を崩しているのは、新しい母点に含まれないと判定された母点である。この結果から、位相条件の強化などによって安定性を失わずに高速化をはかる余地があることが伺える。

4 おわりに

点、線分、円弧、スプライン曲線によって表わすことのできる図形を生成元とするボロノイ図を近似的に構成することができ、さらに反復によって全体的に改良をおこなった、ボロノイ図の近似を得ることができる。

曲線上に分布した点集合に対するボロノイ図の逐次添加構成法においては、計算時間は与えられた曲線にも依存し、実際的には $O(n)$ を越える時間を要すると共に、一般の場合と比較して母点数が小さい段階で明らかな結果の誤りを生じる。

今後の課題には次のようなものが残されている。

- 近似誤差の理論的評価と誤差評価を用いたより適切な近似精度の評価基準、及び反復のための重みの設定。
- 局所的な母点追加による改良法の検討。
- より高速で、より安定に曲線上の点のボロノイ図を構成する方法の確立。

点ボロノイ図構成法に関しては、これ以上の改良のためには、母点が与えられた曲線上に分布していることを用いた位相的な歯止めを確立させることが有効であるものと思われる。

参考文献

- [1] Guibas, L., and Stolfi, J. : Primitives for the manipulation of general subdivisions and the computation of Voronoi diagrams. *ACM Transactions on Graphics*, vol. 4 (1985), pp. 74-123.
- [2] Lee, D. T., and Drysdale III, R. L. Generalization of Voronoi diagrams in the plane. *SIAM Journal on Computing*, X vol. 10 (1981), pp. 73-87.
- [3] Lee, D. T., and Schachter, B. J. : Two algorithms for constructing a Delaunay triangulation. *International Journal of Computer and Information Sciences*, vol. 9 (1980), pp. 219-242.
- [4] 大石泰章, 杉原厚吉 : 数値的に安定な分割統治型 Voronoi 図構成算法, 情報処理学会論文誌, vol. 32 (1991), pp. 709-720.
- [5] Ohya, T., Iri, M., and Murota, K., : Improvement of the incremental method for the Voronoi diagram with computational comparison of various algorithms. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, vol. 27 (1984), pp. 306-336.
- [6] 杉原厚吉 : 計算幾何工学, アドバンスドエレクトロニクス シリーズ II-2, 培風館, 1994.
- [7] Sugihara, K. : Approximation of generalized Voronoi diagrams by ordinary Voronoi diagrams. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing — Graphical Models and Image Processing*, vol. 55 (1993), pp. 522-531.
- [8] Sugihara, K., and Iri, M. : A robust topology-oriented incremental algorithm for Voronoi diagrams. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, vol. 4 (1994), pp. 179-228.