スーパーキューブの耐故障性について

宮田 和佳　和田 幸一　陳 慰　川口 喜三男

名古屋工業大学　電気情報工学科

電子メール [kzmya/wada/chen/kawaguchi]@elcom.nitech.ac.jp

キーワード: 計算機網、路線割当、耐故障性、直径罹障度、生存路線グラフ、スーパーキューブ

要旨: 本稿では、計算機網を表すグラフに対する固定路線割当を取り扱う。ここで路線とは通信経路であり、固定路線割当とは一度決定した路線は変更されないことを意味する。グラフにおいて f 個以内の点が故障しても、グラフ上の任意の2点間を結ぶ長さ d 以下の路線列が存在するならばこの路線割当は $(d, f)-$耐性であるという。本稿では、超立方体グラフを任意の点数に対して定義できるように拡張したスーパーキューブと呼ばれるグラフ S_n(点数 $n(=2^s+h)$ で連結度は s) に対して、故障数が点連結度を越えた時もグラフが連結である場合には、(1) 辺のみが路線として定義されているならば $(s+3, s+B(h-1)-1)-$耐性となる。(2) 任意の全最短路線割当 (任意の2点間に路線が定義されており、路線として最短路が定義される) に対して $(7, s+B(h-1)-1)-$耐性となる。(3)$(5, s+B(h-1)-1)-$耐性となる最短路線割当が定義できることを示す。ここで、$B(h-1)$ は $h-1$ を2進数で表した時の1の個数を表す。また、S_n は任意の点に対して隣接する全ての点が故障しないならば、$s+B(h-1)-1$ 個の点が故障しても連結であることを示す。

Highly Fault-Tolerant Routings and Diameter Vulnerability for the Supercube

Kazuyoshi Miyata　Koichi Wada　Wei Chen　Kimio Kawaguchi
Nagoya Institute of Technology
Gokiso-cho,Showa-ku,Nagoya 466,JAPAN
E-mail[kzmya/wada/chen/kawaguchi]@elcom.nitech.ac.jp

keywords: networks,routing,fault-tolerance,diameter vulnerability,surviving route graph, supercube

Abstract: Consider a communication network G in which a limited number of link and/or node faults F might occur. A routing ρ for the network (a fixed path between each pair of nodes) must be chosen without knowing which components might become faulty . The diameter of the surviving route graph $R(F, \rho)/F$, where two nonfaulty nodes are connected by an edge iff there are no faults on the route between them, could be one of the fault-tolerant measures for the routing ρ. In this paper,we show that we can construct efficient and highly fault-tolerant routings on an n-node supercube S_n such that the diameter of the surviving route graph is bounded by a constant for the case that the number of faults is greater than the connectivity of S_n.

1 まえがき

計算機網における情報伝達の信頼性をいかに経済的に効率よく高めるかは重要な問題である。通常、計算機網は計算機を点、通信回線を辺としたグラフで表し、2点間の通信経路はグラフ上の路に対応させる。ここでは各2点 $\mathbf{x}$ から $\mathbf{y}$ への通信を行なうため路は予め高々1つ定めるものとし、$\mathbf{x}$ から $\mathbf{y}$ へのそれが定義されたならこれを路線$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ と呼ぶ。また路線を決定する事を路線割当 (*routing*) と呼ぶ。

本稿では、路線割当の耐故障性の尺度として、計算機網を表すグラフとその路線割当及び故障点と故障辺により定義される生存路線グラフ (*surviving route graph*) と呼ばれるグラフの直径を用いる [2][3]。生存路線グラフの直径は、故障が発生しているという条件のもとで、任意の2点間で通信を行なうために接続しなければならない路線の最小個数の最大を表す。f 個以下の任意の点や辺が故障した時、生存路線グラフの直径が d 以下となるような路線割当が存在するならば、この計算機網および路線割当は $(d, f)-$耐性であるという。

また、生存路線グラフの直径は直径罹障度 (*diameter vulnerability*) の一般化になっている。グラフ G の直径罹障度は G 中に故障が発生した時に G の直径の増加分で定義される。従って、直径罹障度は辺のみが路線として定義された路線割当 (このような路線割当を辺路線割当と呼ぶ) に対する生存路線グラフの直径と一致する。

通常、生存路線グラフの直径を議論する時、故障数はもとのグラフの連結度や辺連結度より小さいと仮定する。しかしながら、通常の計算機網においては、連結度以上の故障に対しても連結である事が多い。連結度を越える故障数に対する研究も行なわれている [4][5][6] [9]。ここでは、そのうちの一つとし

て $R-$連結度を考える [4]。グラフ G の $R-$連結度は点に隣接する全ての点は故障しないという条件のもとで、グラフを非連結にする為に取り除くべき点数の最小値である。

本稿では、超立方体グラフを拡張したスーパーキューブ (*Supercube*) と呼ばれるグラフに対する生存路線グラフの直径を議論する。超立方体グラフは通信効率も良く耐故障性にも優れており実用的にも利用されているが唯一の欠点は点数が 2 のベキ乗でしか定義できないことである。スーパーキューブは超立方体のグラフの長所を残したまま、任意の点数で定義できるように拡張されたものであり n 点スーパーキューブ $S_n(n = 2^s + h, 0 < h \leq 2^s)$ の直径は $s+1$、連結度は s であるなどいろいろな性質が調べられている [8]。

超立方体グラフとスーパーキューブに対して生存路線グラフの直径に関して以下のことが知られている。s 次元超立方体グラフ H_sに対しては、

1. 任意の全最短路線割当 (任意の 2 点間に路線が定義され定義される路線は最短路) は、$(3, s-1)-$耐性である [3]。
2. $(2, s-1)-$耐性となる最短路線割当が構成できる [3]。
3. 辺路線割当は $(s+1, s-1)-$耐性である。

また、H_sの $R-$連結度は $2s-2$ であり [7][11]、

1. 任意の全最短路線割当は、$(6, 2s-3)-$耐性である [10]。
2. $(5, 2s-3)-$耐性となる最短路線割当が構成できる [10]。
3. 辺路線割当は $(s+2, 2s-3)-$耐性である [10]。

さらに、n 点スーパーキューブ $S_n(n = 2^s + h, 0 < h \leq 2^s)$ に対しては、

1. 任意の最短路線割当は、$(5, s-1)-$耐性である[1] [1]。
2. $(2, 2s-3)-$耐性となる最短路線割当が構成できる [1]。
3. 辺路線割当は $(s+2, s-1)-$耐性である [1]。

本稿では、n 点スーパーキューブの $R-$連結度が $s+B(h-1)$ となることを示し ($B(h-1)$ は $h-1$ を 2 進数で表した時に含まれる 1 の個数)、$s+B(h-1)-1$ 以下の故障に対する生存路線グラフの直径に関して以下のことを示す。

1. 任意の最短路線割当は、$(7, s+B(n-1)-1)-$耐性である。
2. $(5, s+B(h-1)-1)-$耐性となる最短路線割当が構成できる。
3. 辺路線割当は $(s+3, s+B(h-1)-1)-$耐性である。

[1] 文献 [1] では $(4, s-1)-$耐性となることが示されているが誤りがある。

2 諸定義

2.1 定義

計算機網を、V を点集合、E を辺集合とした無向グラフ $G = (V, E)$ として表す。$|V|$ は V の要素数、すなわち点の総数を表す。

グラフ G 上の点列 $P = (v_0, \ldots, v_i, \ldots, v_p)$ において、$(v_i, v_{i+1}) \in E(0 \leq i \leq p-1)$ を満たすならば、Pを (v_0, v_p) 間の路 (*path*) という。路の中の点が全て異なるとき単純路 (*simple path*) という。点 x, y間の路で最短であるものを、点 x, y間の距離 (*distance*) といい、$dis_G(x, y)$ で表す。グラフ G 上で最大の距離を直径 (*diameter*) といい、$D(G)$ で表す。

グラフ上の点 **x,y** に関して、それぞれの点を 2 進数表示した時その相違桁数をハミング距離 (*Hamming distance*) といい、$Ham(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ で表す。

グラフ $G = (V, E)$ と $G' = (V', E')$ に対して、$V' \subseteq V$かつ $E' \subseteq E$が成立するならば、G'を G の部分グラフ (*subgraph*) という。また、グラフ G と点の部分集合 $V' \subseteq V$に対して、
$G' = (V', E'), E' = \{(u, v) | (u, v) \in E$かつ $u, v \in V'\}$ となる部分グラフ G'を V'に対する誘導部分グラフといい、$G' = I(V')$ で表す。

$Path(G)$ を G 上にある全ての単純路の集合としたとき、路線割当 (*routing*) は
$\rho(x, y) \in Path(G)$ となる部分関数$\rho : V \times V \to Path(G)$ である。$\rho(x, y)$ は、x から yへの路線である。任意の 2 点 x, yに対して$\rho(x, y)$ が最短となるときρは最短路線割当 (*minimal routing*) という。また任意の相異なる 2 点間に路線が定義されているならばρは全路線割当という。以下ではことわりのない限り全路線割当を取り扱う。ρが辺路線割当であるというのは $(x, y) \in E$なる x, yに対してのみ$\rho(x, y) = \rho(y, x)$ が定義されていることをいう。グラフ Gとその部分グラフ G'に対して、G 上の路線割当ρを G' に制限したものを$\rho[G']$ と表す。

グラフ G 上の路 $P = (u_0, u_1, \ldots, u_p)$,
$Q = (v_0, v_2, \ldots, v_q)$ としたとき、
$P \cdot Q = (u_0, u_1, \ldots, u_p = v_0, v_2, \ldots, v_q)$
である。P内の点を $V(P)$ で表したとき、
$V(P) \cap \{V(Q) - \{v_0, v_q\}\} = \phi$かつ、
$V(Q) \cap \{V(P) - \{u_0, u_q\}\} = \phi$ であるならば、Pと Q は点独立な路であるという。

点 $\mathbf{v}$ の隣接点の集合を $N(\mathbf{v})$ で表す。このとき $|N(\mathbf{v})|$ を点 $\mathbf{v}$ の次数 (*degree*) といいグラフの次数 $deg(G)$ はそれらの最小値と定義する。G の点の部分集合 Sに対して $G-S$が非連結または孤立点になる時 Sを分離集合と呼ぶ。G の連結度 (*node-connectivity*) $\kappa(G)$ は最小要素数をもつ分離集合の要素数と定義する。

$R = \{X \subseteq V|$ 任意の $\mathbf{v}$に対して, $N(\mathbf{v}) \not\subseteq X\}$ とする。G の分離集合 Sが Rの要素であるとき、$|S|$ の最小値を $R-$連結度 (*R-connectivity*) といい、$\kappa(G : R)$ であらわす [4]。G の $R-$連結度$\kappa(G : R)$ は、2 辺を分離するような要素数最小の分離集合 S_{min}が Rに属

するならば$\kappa(G:R) = |S_{min}|$が成り立つ[6]。従って、Rに属するような2辺を分離する分離集合Sが存在すれば、任意の2辺間に$|S|$本の点独立な路の存在がいえれば$\kappa(G:R) = |S|$が証明される。

$2^s \leq n < 2^{s+1}$とする。nの2進表現
$b_s, b_{s-1}, \ldots, b_0 (b_s = 1, b_i = \{0,1|0 \leq i \leq s\} (0 \leq i \leq s-1))$に対して、$B(n) = \sum_{i=0}^{s} b_i$ ただし、$B(0) = 0$とする。

2.2 生存路線グラフ

通信網の評価の基準の一つとなる**生存路線グラフ** (*surviving route graph*) を以下のように定義する[2][3]。

グラフ $G = (V, E)$、路線割当 ρ、故障の集合 $F \subset V \cup E$ が与えられた時、生存路線グラフ $R(G, \rho)/F = (V_R, E_R)$ は以下のように定義される。

なお$< x, y >$とは、xからyへの有向辺である。

$V_R = V - (F \cap V)$

$E_R = \{< x, y > | x, y \in V$かつ$\rho(x, y)$ にFの要素を含まない$\}$

生存路線グラフの直径とは、故障Fが存在するときの任意の2点間の通信のための接続すべき路線数の最大値である。また、生存路線グラフ上での2点$\mathbf{u}, \mathbf{v}$間の距離を$dis_{SR}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$と表す。

グラフG上の路線割当ρに対し故障がf以下であるとき生存路線グラフの直径をαであるとすると、路線割当ρは、$(\alpha, f)-$耐性 であるという。

2.3 スーパーキューブ

s次元超立方体 $H_s = (V, E)$ は、点数が$|V| = 2^s$であり、各点はs桁の2進数で表現され、0から$2^s - 1$までの整数値をとる。
$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E$となるのは、$Ham(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 1$のときである。$D(H_s) = s, \kappa(H_s) = s$である。また$\kappa(H_s : R) = 2s - 2$である[6]。

H_sの2点$\mathbf{u}, \mathbf{v}$間で、それぞれを2進表現し最上位桁から相違桁を一つずつ変化させていくような路を路線とする路線割当をλとする[3]。

定理 1 [3][10] H_s上の任意の最短路線割当ρは$(3, s-1)-$耐性であり$(6, 2s-3)-$耐性である。

定理 2 [3][10] H_s上の最短路線割当λは$(2, s-1)-$耐性であり$(5, 2s-3)-$耐性である。

定理 3 [10] H_s上の辺路線割当は$(s+1, s-1)-$耐性であり$(s+2, 2s-3)-$耐性である。

スーパーキューブ $S_n = (V, E)$ は以下のように定義される[8]。
$n = 2^s + h (0 < h \leq 2^s - 1)$とし、各点は$(s+1)$桁の2進数で表される。これは0から$(n-1)$の整数値をとる。$S_n$の2点を$\mathbf{u} = b_u\mathbf{u}', \mathbf{v} = b_v\mathbf{v}'$とする。
$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E$となるのは、以下の時である。

- $b_u \neq b_v$ かつ $\mathbf{u}' = \mathbf{v}'$ (水平辺 (*horizontal edge*) と呼ぶ)
- $b_u = b_v$ かつ $Ham(\mathbf{u}', \mathbf{v}') = 1$ (超立方体辺 (*hypercube edge*) と呼ぶ)
- $b_u \neq b_v$(ここで$b_u = 1$) かつ $Ham(\mathbf{u}', \mathbf{v}') = 1$ かつ $b_u\mathbf{v}' \notin V$
(斜辺 (*oblique edge*) と呼ぶ)

定義より $D(S_n) = s, \kappa(S_n) = s$ である。

S_nの点集合Vに対して以下の部分集合を定義する。

- $V_1 = \{0\mathbf{v}' | 1\mathbf{v}' \in V\}$
- $V_2 = \{0\mathbf{v}' | 1\mathbf{v}' \notin V\}$
- $V_3 = \{1\mathbf{v}' | 1\mathbf{v}' \in V\}$
- $V_4 = \{\mathbf{v} | \mathbf{v} \in \{0,1\}^{s+1}, v_s = 0\}$

VはV_1, V_2, V_3に分割される。

またこれらの定義より、$I(V_1 \cup V_2)$ と $I(V_2 \cup V_3)$ はs次元超立方体と同型となる。$2^{s-1} \leq h < 2^s$のとき、$I(V_4 \subset V_1 \cup V_3)$も$s$次元超立方体と同型である。

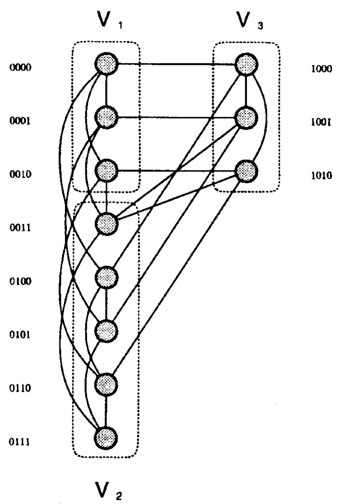

図.1 スーパーキューブ S_{11}

スーパーキューブを扱うために投影 (*projection*) を定義する[1]。まず、次の二つの関数を定義する。

- $P_j^V : \{0,1\}^{s+1} \rightarrow \{0,1\}^s$
  s.t. $\forall \mathbf{u} = u_s \cdots u_0 \in \{0,1\}^{s+1}$
  $P_j^V(\mathbf{u}) = u_s \cdots u_{j+1} u_{j-1} \cdots u_0$
- $P_j^E : \{0,1\}^{s+1} \times \{0,1\}^{s+1} \rightarrow \{0,1\}^s \times \{0,1\}^s$
  s.t. $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \{0,1\}^{s+1} \times \{0,1\}^{s+1}$
  もし$P_j^V(\mathbf{u}) \neq P_j^V(\mathbf{v})$ならば、
  $P_j^E((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = (P_j^V(\mathbf{u}), P_j^V(\mathbf{v}))$.

スーパーキューブ $S_n = (V, E)$ の j番目の構成要素に対するグラフ投影 $P_j(S_n) = (V', E')$ は以下のように定義される。

- $V' = \{\mathbf{x} | \exists \mathbf{u} \in V \ s.t.\ P_j^V(\mathbf{u}) = \mathbf{x}\}$;
- $E' = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) | \exists (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E$ $s.t.\ P_j^E((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})\}$.

以下表現の単純化のために $\mathbf{x} \in V'$を $\mathbf{x} \in P_j(S_n)$、$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E'$を $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in P_j(S_n)$ と表現する。

スーパーキューブ S_nに対する路線割当 ρ が与えられたとき、路線の投影 P_j^ρ は $P_j(S_n)$ 内の路線割当であり次のように定義する。

- $\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}, \mathbf{v}$ならば、
  $P_j^\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (P_j^V(\mathbf{u}), P_j^V(\mathbf{v_1}), \cdots$
  $, P_j^V(\mathbf{v_k}), P_j^V(\mathbf{v}))$

ここから循環している路を取り除いたものである。

定義 1 [1] 最短路線割当λ'を以下のように定義する。

function $\lambda'(\mathbf{u}, \mathbf{v})$: *route;*
{ $s-1, s-2, ..., 0, s$ 桁目の順に見ていき、
　k桁目に初めて相違桁があるとする。}
{ ここで、$\mathbf{u}' = u_{s-1}, ..., \overline{u_k}, ..., u_0$ とおく。}
　if u=v then return
　else if $k{=}s$ **then return** $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$
　　else if $u_s = v_s$ **then**
　　　　return $(\mathbf{u}, u_s\mathbf{u}')\lambda'(u_s\mathbf{u}', \mathbf{v})$
　　　else return $(\mathbf{u}, u_s\mathbf{u}')\lambda'(u_s\mathbf{u}', \mathbf{v})$

λ'は $I(V_1 \cup V_2), I(V_2 \cup V_3)$ 上ではλ と同じ路線割当となる。

定理 4 [1] S_n上の任意の最短路線割当ρは $(5, s-1)-$耐性である[2]。

定理 5 [1] S_n上の路線割当λ'は $(2, s-1)-$ 耐性である。

不完全超立方体 $IH_n = (V, E)$ を以下のように定義する。
点数 $|V|$ は任意の整数 n である。
$E = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) | \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, Ham(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 1\}$ である。

定義より IH_nは、スーパーキューブ S_nから斜辺を取り除いたものと同型である。IH_nに対しても、スーパーキューブと同様に V_1, V_2, V_3 を定義する。

[2] 文献 [1] では $(4, s-1)-$ 耐性であることが示されているが誤りがありそれを修正すると $(5, s-1)-$ 耐性になる。

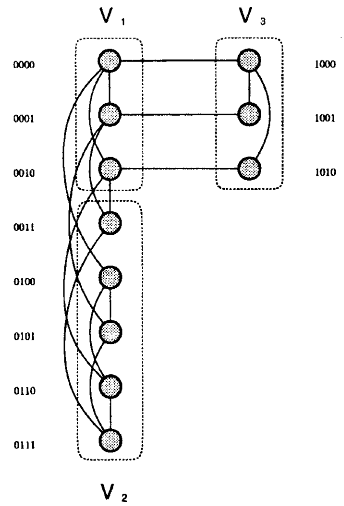

図.2 不完全超立方体 IH_{11}

$n = 2^s + h (0 < h \leq 2^s)$ とすると、
$deg(IH_n) = B(n-1), D(IH_n) = s + 1$ である。

定理 6 不完全超立方体 IH_nにおいて、
連結度$\kappa(IH_n) = B(n-1)$ である。

[証明] $deg(IH_n) = B(n-1)$ であるので、任意の 2 点間に $B(n-1)$ 本の点独立な路が存在することを $B(n)$ に関する帰納法で証明する。

1. $B(n) = 1$ のとき
   これは、超立方体と同型になる。よって、点連結度$\kappa(IH_n) = B(n-1) = s$ である。
2. $B(n) \geq 2$ のとき
   $n = 2^s + h (0 < h < 2^s)$ と書ける。$B(n) = B(h) + 1$ である。帰納法の仮定より
   $\kappa(IH_h) = B(h-1) (0 < h < 2^s)$ である。任意の 2 点 **u,v** 間の点独立な路の数を考える。

(a) $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_1 \cup V_2$のとき
　$I(V_1 \cup V_2)$ は、s 次元の超立方体と同型である。よって、点独立な路は $s (\geq B(n-1))$ 本存在する。

(b) $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_3$のとき
　$\mathbf{u}, \mathbf{v}$間には V_3内に $B(h-1)$ 本の点独立な路が存在する。さらに、V_1を通る路で $B(h-1)$ 本の路と点独立な路が存在する。よって、点独立な路は $B(h-1) + 1$ 本存在する。

(c) $\mathbf{u} \in V_1 \cup V_2, \mathbf{v} \in V_3$のとき
　$\mathbf{v}$ の V_1内の隣接点を $\mathbf{v}'$とおくと、

　i. $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}'$のとき
　　$\mathbf{u}, \mathbf{v}'$間には、s 本の点独立な路が存在する。$\mathbf{v}'$ の V_1内の隣接点はそれぞれ、$\mathbf{v}$ の V_3内の隣接点とつながっている。これは少なくとも $B(h-1)$ 本存在するので、**u,v** を結ぶ $B(h-1)$ 本の点独立な路が存在する。

また、$\mathbf{v}'$から、$\mathbf{v}'$の $V_1 \cup V_2$内の上の条件で使用していない隣接点を通って、$\mathbf{u}$ にいく路は上記の路とは点独立である。
よって $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ 間の点独立な路は $B(h-1)+1$ 本存在する。

ii. $\mathbf{u}=\mathbf{v}'$のとき
$\mathbf{u}$ の V_1内の隣接点と、$\mathbf{v}$ の V_3内の隣接点の間にはそれぞれ水平辺でつながれる。これは、$B(h-1)$ 本存在する。
また、$\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ 間も水平辺でつながれているので、点独立な路は、$B(h-1)+1$ 本存在する。

以上の事から、点連結度$\kappa(IH_n) \geq B(h-1)+1$ である。

$deg(IH_n)=B(n-1)$ であるから

$$\kappa(IH_n)=B(n-1) \square$$

定理 7 スーパーキューブ S_nに対する任意の最短路線割当をρとする。不完全超立方体 IH_nにおいて、$\rho[IH_n]$ は $(5, B(n-1)-1)-$ 耐性である。

[証明] $B(n)$ に関する帰納法で証明する。IH_n上の任意の 2 点を $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ とおく。

1. $B(n)=1$ のとき
IH_nは H_sと同型である。また、$B(n-1)=s$ である。よって、定理 1より

$$dis_{SR}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leq 3$$

である。

2. $B(n) \geq 2$ のとき
$n=2^s+h(0<h<2^s)$ と書ける。$B(n)=B(h)+1$ である。

(a) $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V_1 \cup V_2$のとき
$I(V_1 \cup V_2)$ は、s 次元超立方体と同型である。$B(n-1)-1 \leq s-1$ であるので、

$$dis_{SR}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leq 3$$

(b) $\mathbf{u} \in V_1 \cup V_2, \mathbf{v} \in V_3$のとき
$\mathbf{v}$ の V_1 内の隣接点を $\mathbf{v}'$とする。

i. $\mathbf{v}'$が無故障である時

$$dis_{SR}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leq dis_{SR}(\mathbf{u},\mathbf{v}')+1 \leq 4$$

ii. $\mathbf{v}'$が故障である時
$\mathbf{v}$ には $\mathbf{0x}$,$\mathbf{1x}$ が無故障となるような隣接点 $\mathbf{1x}$ が存在する。よって、

$$dis_{SR}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leq dis_{SR}(\mathbf{u},\mathbf{0x})+2 \leq 5$$

(c) $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V_3$のとき
$\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ の V_1 内の隣接点をそれぞれ $\mathbf{u}',\mathbf{v}'$とおく。

i. $|F_{V_3}| \leq B(h-1)-1$ のとき
$I(V_3)$ は IH_hと同型であるので、帰納法の仮定より

$$dis_{SR}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leq 5$$

ii. $|F_{V_3}|=B(h-1)=B(n-1)-1$ のとき $|F_{V_3}| \leq B(h-1)-1$ となる。$|F_{V_1 \cup V_2}|=0$ である。よって、

$$dis_{SR}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leq 3$$

である。

よってσは $(5, B(n-1)-1)-$ 耐性である。$\square$

定理 8 不完全超立方体 IH_nにおいて、$\lambda'[IH_n]$ は $(4, B(n-1)-1)-$ 耐性である。

[証明] IH_n上の任意の 2 点を $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ とおく。

1. $B(n)=1$ のとき
IH_nは H_sと同型である。また、$B(n-1)=s$ である。よって、定理 2より

$$dis_{SR}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leq 2$$

である。

2. $B(n) \geq 2$ のとき
$n=2^s+h(0<h<2^s)$ と書ける。$B(n)=B(h)+1$ である。

(a) $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V_1 \cup V_2$のとき
$I(V_1 \cup V_2)$ は、s 次元超立方体と同型である。$B(n-1)-1 \leq s-1$ であるので、

$$dis_{SR}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leq 2$$

(b) $\mathbf{u} \in V_1 \cup V_2, \mathbf{v} \in V_3$のとき
$\mathbf{v}$ の V_1内の隣接頂点を $\mathbf{v}'$とする。

i. $\mathbf{v}'$が無故障である時

$$dis_{SR}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leq dis_{SR}(\mathbf{u},\mathbf{v}')+1 \leq 3$$

ii. $\mathbf{v}'$が故障である時
$\mathbf{v}$ には $\mathbf{0x}$,$\mathbf{1x}$ が無故障となるような隣接点 $\mathbf{1x}$ が存在する。よって、

$$dis_{SR}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leq dis_{SR}(\mathbf{u},\mathbf{0x})+2 \leq 4$$

(c) $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V_3$のとき
$\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ の V_1 内の隣接点をそれぞれ $\mathbf{u}',\mathbf{v}'$とおく。

i. $|F_{V_3}| \leq B(h-1)-1$ のとき
仮定より

$$dis_{SR}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leq 4$$

ii. $|F_{V_3}|=B(h-1)=B(n-1)-1$ のときここで、$B(h-1)=B(n-1)-1$ である。また $|F_{V_3}| \leq B(h-1)-1$ となる。$|F_{V_1 \cup V_2}|=0$ である。よって、

$$dis_{SR}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leq 3$$

である。

$\lambda'[IH_n]$ は $(3, B(n-1)-1)-$ 耐性である。□

$\lambda'[IH_n]$ は全路線割当ではなく S_nの斜辺を利用している路線は$\lambda'[IH_n]$ では定義されない。$\lambda'[IH_n]$ を拡張してこれらの定義されていない 2 点間に対して IH_n上の路線を定義することによって IH_nに対して、$(3, B(n-1)-1)-$ 耐性となる路線割当は定理 8 の証明から容易に構成できる。

3 S_nの $R-$点連結度

定理 9 スーパーキューブ S_nの $R-$連結度は、$n = 2^s + h(0 < h \leq 2^s)$ とおくと、

$$\kappa(S_n : R) = s + B(h-1)$$

である。ただし、$n = 1$ のときは$\kappa(S_1 : R) = 0$ である。

証明

$R-$連結度を求めるために、Rに属する要素数 $s + B(h-1)$ の 2 辺を分離する点集合が存在するので、S_n上の任意の 2 辺間に $s + B(h-1)$ 本の点独立な路が存在することを示す。

$h = 2^s$のときは超立方体と同型になり明らかである。以下では、$0 < h < 2^s$の場合を考える。

任意の 2 辺を $(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2})$,$(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2})$ とする。

I. 2 辺を超立方体辺または斜辺から選ぶ場合

(a) $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \in V_1 \cup V_2$ のとき
$I(V_1 \cup V_2)$ は s 次元超立方体と同型である。よって、$I(V_1 \cup V_2)$ 内に $(2s-2)$ 本の点独立な路が存在する。また、以下の場合が考えられる。

i. $0 < h \leq 2^{s-1} - 1$ のとき
$s + B(h-1) \leq 2s-2$ であるので、$s + B(h-1)$ 本の点独立な路が存在する。

ii. $2^{s-1} - 1 \leq h \leq 2^s - 1$ のとき
$s + B(h-1) \leq 2s-1$ である。$(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2})$,$(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2})$ には V_3内にそれぞれ必ず隣接点 $\mathbf{u}', \mathbf{v}'$がある。$\mathbf{u}', \mathbf{v}'$間には $I(V_3)$ 内に路が存在する。よって、点独立な路は $s + B(h-1)$ 本存在する。

(b) $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{v_1} \in V_1 \cup V_2, \mathbf{v_2} \in V_3$のとき
$\mathbf{v_2}$の V_1内の隣接点を $\mathbf{v_2'}$とする。

i. $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \neq \mathbf{v_2'}$のとき
$(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2'})$ は辺である。$N(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}) \cap I(V_2 \cup V_3)$ はそれぞれ対応する $N(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2'}) \cap I(V_1 \cup V_2)$ に $I(V_1 \cup V_2)$ を通らずに点独立な路を通っていける。$(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}), (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2'})$ 間には $I(V_1 \cup V_2)$ 内に $(2s-2)$ 本の点独立な路が存在する。これより、$(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}), (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2})$ 間には $(2s-2)$ 本の点独立な路が存在する。

A. $0 < h \leq 2^{s-1} - 1$ のとき
$s + B(h-1) \leq 2s-2$ であるので、$s + B(h-1)$ 本の点独立な路が存在する。

B. $2^{s-1} - 1 \leq h \leq 2^s - 1$ のとき
$s + B(h-1) \leq 2s-1$ である。$N(\mathbf{v_2}) \cap (V_2 \cap V_3)$ の内の一つを $\mathbf{x}$ とおく。$(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2})$ には V_3内に必ず隣接点 $\mathbf{u}'$がある。上記の $(2s-2)$ 本の路の内 $\mathbf{x}$ を通るものを $\mathbf{v_2'}$を通るようにする。ここで、$\mathbf{v_2}, \mathbf{u}'$間には $N(\mathbf{v_2}) - \mathbf{x}$ を通らない路が内に存在する。よって、点独立な路は $s + B(h-1)$ 本存在する。

ii. $\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2'}$のとき
$\mathbf{u_1}, \mathbf{v_1}$間には $I(V_1 \cup V_2)$ 内に s 本の点独立な路がある。この路うち $\mathbf{u_2}, \mathbf{v_2'}$を通る路がある。いま、これは通れないものとすると $s-1$ 本の点独立な路が存在する。また、$N(\mathbf{u_2}) \cap V_1$と $N(\mathbf{v_2}) \cap V_3$ はそれぞれ水平辺で結ばれている。これらは $B(h-1)$ 本存在する。また $\mathbf{u_2}, \mathbf{v_2'}$間にも路がある。よって、点独立な路は $s + B(h-1)$ 本存在する。

(c) $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \in V_1 \cup V_2, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \in V_3$のとき
$\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$の V_1内の隣接点をそれぞれ $\mathbf{v_1'}, \mathbf{v_2'}$とする。

i. $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \neq \mathbf{v_1'}$,$\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \neq \mathbf{v_2'}$のとき
$N(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}) \cap (V_2 \cup V_3)$ は $N(\mathbf{v_1'}, \mathbf{v_2'}) \cap (V_1 \cup V_2)$ にそれぞれ点独立に行ける。ここで $N(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}) \cap (V_2 \cap V_3)$ の内 2 点を $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$とおく。これらの点を通らずに $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$自身を通って行く路を使うと $N(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}) \cap (V_2 \cup V_3)$ は $N(\mathbf{v_1'}, \mathbf{v_2'}) \cap (V_1 \cup V_2)$ に $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$ を通らずに点独立に行ける。$(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}), (\mathbf{v_1'}, \mathbf{v_2'})$ 間には $I(V_1 \cup V_2)$ 内に $2s-2$ 本の点独立な路が存在する。
また、$\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}$の V_3の隣接点をそれぞれ$\mathbf{u_1'}, \mathbf{u_2'}$とすると、$(\mathbf{u_1'}, \mathbf{u_2'})$,$(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2})$ 間には$\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$をそれぞれ通る路が 1 本ずつ存在する。$B(h-1) \leq s-1$ より、点独立な路は $s + B(h-1)$ 本存在する。

ii. $\mathbf{u_1} \neq \mathbf{v_1}, \mathbf{u_2} = \mathbf{v_2}$のとき
$N(\mathbf{v_1}) \cap (V_2 \cup V_3)$ は $N(\mathbf{v_1'}) \cap (V_1 \cup V_2)$ にそれぞれ点独立に行ける。$\mathbf{u_1}, \mathbf{v_1'}$間には $I(V_1 \cup V_2)$ 内に s 本の点独立な路がある。この路うち $\mathbf{u_2}, \mathbf{v_2'}$ を通る路がある。いま、これは通れないものとすると $s-1$ 本の点独立な路が存在する。また、$N(\mathbf{u_2}) \cap V_1$と $N(\mathbf{v_2}) \cap V_3$ はそれぞれ水平辺で結ばれている。これらは $B(h-1)$ 本存在する。また $\mathbf{u_2}, \mathbf{v_2'}$間にも路がある。よって、点独立な路は $s + B(h-1)$ 本存在する。

iii. $\mathbf{u_1} = \mathbf{v_1}, \mathbf{u_2} = \mathbf{v_2}$のとき
$N(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}) \cap (V_2 \cup V_3)$ は $N(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}) \cap (V_1 \cup V_2)$ にそれぞれ点独立に行ける。これらは $2s-2$ 本存在する。また、$\mathbf{v_1}, \mathbf{u_1}$ と $\mathbf{v_2}, \mathbf{u_2}$は水平辺で結ばれている。よって、点独立な路は $s + B(h-1)$ 本存在する。

II. 1 辺を水平辺から選ぶ場合
$(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}) = (0u, 1u)$ であるとする。

(a) もう一辺を斜辺または水平辺から選ぶ場合
$\mathbf{v}_1 \in V_1 \cup V_2, \mathbf{v}_2 \in V_3$であるとする。$V_1 \cup V_2$は

超立方体と同型なので $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1$ 間には s 本の点独立な路が存在する。

$\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2$には、$B(h-1)$ 本の点独立な路が存在する。

よって 2 辺間には $(s+B(h-1))$ 本の点独立な路が存在する。

(b) もう一辺を超立方体辺から選ぶ場合

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V_1 \cup V_2$ であるとする。

$\mathbf{x}_1 \in (N(\mathbf{u}_1) \cap V_1)$ とし、それに隣接する V_3内の点を $\mathbf{x}_2$とする。$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ は、水平辺である。

ここで、$h=1$ のときはこのような $\mathbf{x}_1$が存在しない。このとき、s 本の点独立な路が存在する。

V_3の点のみを通り $\mathbf{u}_2$から、$\mathbf{x}_2$への点独立な路は $B(h-1)$ 本は存在する。この路上の $((N(\mathbf{x}_2)-\mathbf{u}_2) \cap V_3)$ から $((N(\mathbf{x}_1)-\mathbf{u}_1) \cap V_1)$ には、それぞれ水平辺が存在する。これらは全部で $(B(h-1)-1)$ である。

さらに、$(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{x}_1)$ という路を通って、$(N(\mathbf{x}_1)-\mathbf{u}_1)$ 内の残りの点に行くことができる。

これによって、$V_1 \cup V_2$に影響を与えずに $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ の $(s+B(h-1))$ 個の隣接点がそれぞれ点独立な路を通って、$(\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_1)$ の $(V_1 \cup V_2)$ 内の隣接点に移動できたことになる。

よって、$V_1 \cup V_2$内で $(\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_1)$ と $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ の間にある点独立な路を考えればよい。

$V_1 \cup V_2$は s 次元超立方体と同型なので、$(2s-2)$ 本の点独立な路が存在する。

よって、$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ 間には最低 $(s+B(h-1))$ 本の点独立な路がある。

スーパーキューブ S_nにおいて任意の 2 辺間には $(s+B(h-1))$ 本の点独立な路が存在する。よって、

$$\kappa(S_n : R) = s + B(h-1)(0 < h \leq 2^s)$$

ただし、$n=1$ のときは$\kappa(S_1 : R) = 0$ である。□

4 S_nの生存路線グラフの直径

定理 10 $S_n(n = 2^s + h, 0 < h \leq 2^s)$ 上の最短路線割当ρに対して、$\rho[H_s]$ が $(\alpha(s), s-1)-$ 耐性かつ $(\beta(s), 2s-3)-$ 耐性、$\rho[IH_n]$ が $(\gamma(n), B(n-1)-1))-$ 耐性であるとすると、ρは $(max(\alpha(s)+3, \beta(s), \gamma(h)+2), s+B(h-1)-1)-$ 耐性である。

[証明]

S_nが、超立方体と同型になる時はすでに求められている。

$$dis_{SR}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq \beta(s)$$

ここではそれ以外の時を考える。即ち、$1 \leq h \leq 2^s - 1$ であるとする。

1. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_1 \cup V_2$のとき

$I(V_1 \cup V_2)$ は s 次元超立方体となる。

(a) $I(V_1 \cup V_2)/F$ が連結である場合

このとき、$I(V_1 \cup V_2)$ は、s 次元超立方体である。よって、

$$dis_{SR}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq \beta(s)$$

である。

(b) $I(V_1 \cup V_2)/F$ が非連結である場合

$\mathbf{v}$ が $I(V_1 \cup V_2)$ 内で孤立しているとして一般性を失わない。

i. $\mathbf{v} \in V_1$である場合

A. $\mathbf{u} \in V_1$のとき

$\mathbf{v}$ には、V_3内に無故障な隣接点 $\mathbf{x}$ がある。$\mathbf{u}$ の隣接点は、全部で $(s+1)$ 個存在する。この時、$\mathbf{v}$ との共通隣接点は高々2 個である。$\mathbf{v}$ の隣接点は s 個故障しているので、

$$(s + B(h-1) - 1) - s + 2 \leq s < s + 1$$

となり、$\mathbf{u}$ から高々2 で $V_2 \cup V_3$内の点 $\mathbf{w}$ にいける。また、$|F_{V_1}| \geq B(h-1)$ より、$|F_{V_2 \cup V_3}| \leq s-1$ であるので $dis_{SR}(\mathbf{w}, \mathbf{x}) \leq \alpha(s)$。従って、

$$dis_{SR}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq \alpha(s) + 3$$

である。

B. $\mathbf{v} \in V_2$のとき

同様に、$\mathbf{u}$ から高々2 で $V_2 \cup V_3$内の点 $\mathbf{w}$ にいける。また、$|F_{V_1}| \geq B(h-1)$ であるため、$|F_{V_2 \cup V_3}| \leq s-1$ となり連結である。よって、

$$\begin{aligned} & dis_{SR}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ & \leq dis_{SR}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + dis_{SR}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \\ & \leq \alpha(s) + 3 \end{aligned}$$

ii. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_2$である場合

この場合、$I(V_2 \cup V_3)/F$は必ず連結となる。$|F_{V_2 \cup V_3}| \leq s + B(h-1) - 1$ であるので、

$$dis_{SR}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq \beta(s)$$

また、$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_2 \cup V_3$ の場合も同様である。

2. $\mathbf{u} \in V_1, \mathbf{v} \in V_3$であるとき

(a) $|F_{V_1}| \geq B(h-1)$

$P_s(S_n)$ を考える。$|F_{V_2 \cup V3}| \leq s-1$ である。

i. $P_s(\mathbf{u})$ が、無故障である時

$\mathbf{u}$ には、V_3内に無故障の隣接点 $\mathbf{x}$ があるので、

$$\begin{aligned} & dis_{SR}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ & \leq dis_{SR}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) + dis_{SR}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \\ & \leq \alpha(s) + 1 \end{aligned}$$

ii. $P_s(\mathbf{u})$ が部分故障かつ、無故障である隣接点が存在する時

ここで、$P_{s+1}(\mathbf{u})$ の無故障点を、$\mathbf{x}$ とおくと、$\mathbf{u} \Longrightarrow 0\mathbf{x} \Longrightarrow 1\mathbf{x}$ は、無故障である。よって、

$$\begin{aligned} & dis_{SR}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ & \leq dis_{SR}(\mathbf{u}, 1\mathbf{x}) + dis_{SR}(1\mathbf{x}, \mathbf{v}) \\ & \leq \alpha(s) + 2 \end{aligned}$$

iii. $P_s(\mathbf{u})$ が部分故障かつ全ての隣接点が故障または部分故障である時
$P_s(\mathbf{u})$ の部分故障点を $\mathbf{x}$ とすると、$\mathbf{x}$ には、無故障な隣接点 $\mathbf{y}$ が存在する。よって、$\mathbf{u} \Longrightarrow 0\mathbf{x} \Longrightarrow 0\mathbf{y} \Longrightarrow 1\mathbf{y}$ は、無故障である。よって、

$$\begin{aligned} & dis_{SR}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \\ \le\ & dis_{SR}(\mathbf{u},1\mathbf{y}) + dis_{SR}(1\mathbf{y},\mathbf{v}) \\ \le\ & \alpha(s)+3 \end{aligned}$$

(b) $|F_{V_3}| \ge B(h-1)$ のとき
上と同様である。

(c) $|F_{V_1}| \le B(h-1)-1$ かつ $|F_{V_3}| \le B(h-1)-1$ のとき
$\mathbf{u},\mathbf{v}$ には V_1, V_3内にそれぞれ $B(h-1)$ 個の隣接点がある。このとき $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 自身も含めて最低 $2B(h-1)$ 個の $\mathbf{u}$ から V_3内の点または $\mathbf{v}$ から V_1内の点にいく長さ 2 以下の路が存在する。よって、

$$dis_R(\mathbf{u},\mathbf{v}) \le \gamma(h)+2$$

従って、$(max(\alpha(s)+3, \beta(s), \gamma(h)+2), s+B(h-1)-1)$ − 耐性である。□

定理 10とλ'及び H_sにおける点独立な路の性質を用いると以下の系を得る。

系 1 S_nに対する任意の最短路線割当は $(7, s+B(h-1)-1)$ − 耐性である。

系 2 S_nに対してλ'は $(5, s+B(h-1)-1)$ − 耐性である。

系 3 S_nに対する辺路線割当は $(s+3, s+B(h-1)-1)$ − 耐性である。

謝辞

本研究の一部は平成 8 年度文部省科学研究費補助金 (基盤研究 C:08680359) の補助を受けている。

参考文献

[1] V.Auletta,A.A.Rescigno and V.Scano, "Fault tolerant routing in the supercube," *Parallel Processing Letters*, 3, 4, pp. 393- 405 (1993).

[2] A.Broder,D.Dolev,M.Fischer and B.Simons, "Efficient fault tolerant routing in network," *Information and Computation* 75, 1, pp.52-64 (Oct.1987).

[3] D.Dolev,J.Halpern,B.Simons and H.Strong, "A new look at fault tolerant routing", *Information and Computation* 72, 3, pp. 180- 196 (Oct.1987).

[4] A.-H.Esfahanian and S.L.Hakimi, "On computing a conditional edge-connectivity of a graph." *Information Processing Letters*, 27, pp. 195- 199 (1988).

[5] A.M.Farley, "Networks immune to isolated failures," *Networks*, 11, pp. 255- 268 (1981).

[6] F.Harary, "Conditional conectivity," *Networks*, 13, pp. 346- 357 (1983).

[7] S.Latifi, "Combinatorial analysis of the fault-diameter of the n-cube," *IEEE Trans.on Computers*42, 1, pp. 27- 33 (1993).

[8] A.Sen, "Supercube:an optimally fault tolerant networks architecture," *Acta Inform.*, 26, 8, pp. 741- 748 (1989).

[9] D.B.Sillicorn and B.Kocay, "A global measures of network connectivity," *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 7, pp. 165- 177 (1989).

[10] K.Wada, T.Ikeo, K.Kawaguchi and W.Chen, "Highly fault-tolerant routings and diameter vulnerability for generalized hypercube graph," *Proc.of 21st Int. Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (LNCS 1017)*, pp. 197- 208 (1995).

[11] K.Wada, K.Kawaguchi and H.Fujishima, "A New Measure of Fault-Tolerance for Interconnection Networks," *Proceeding of 1990 BILLENT International Conference on New Trends in Communication, Control and Signal Processing*, pp. 111- 118 (1990).