アルゴリズム 56－2
(1997. 3. 14)

単純多角形のサーチライトスケジューリング

服部 伯洋　中野 眞一　西関 隆夫
東北大学大学院情報科学研究科

概要. 多角形領域内のいずれかの点に潜む盗賊を，領域内のいくつかの点に固定されたサーチライトを用いて捜したい．ただし，サーチライトは一つの方向しか監視できないし，監視する方向は連続的にしか変えることができないとする．どのように盗賊が移動しても必ず盗賊を発見できるようにするためには，どのようにサーチライトの方向を変えればよいかというスケジュールを求める問題をサーチライトスケジューリング問題という．本論文では，与えられた単純な n 角形領域とサーチライトの配置とに対して，サーチライトスケジューリング問題を解く $O(n)$ 時間アルゴリズムを与える．

Searchlight schedulings in simple polygons

Norihiro Hattori　Shin-ichi Nakano　Takao Nishizeki
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

Abstract. We consider the problem of searching robbers moving in a simple polygon by searchlights. Each of the searchlights is a point in the polygon, emits a single ray, and can change the direction of the ray continuously. This problem is known as the *searchlight scheduling problem.* In this paper, we present a linear time algorithm to find a searchlight scheduling for a given polygon with searchlights on the boundary.

1 まえがき

多角形領域内のいずれかの点に盗賊が潜んでおり，連続的に移動するとする．領域内のいくつかの点に固定されたサーチライトを用いて盗賊を捜したい．ただし，サーチライトは一つの方向しか監視できないし，監視する方向は連続的にしか変えることができないとする．どのように盗賊が移動しても必ず盗賊を発見できるようにするためには，何個のサーチライトをどこに配置したらよいかという問題をサーチライト問題といい，サーチライトの配置が与えられた時，実際に盗賊を発見するためにはどのようにサーチライトの方向を変えればよいかというスケジュールを求める問題をサーチライトスケジューリング問題という [5][6]．これらの問題は，TV カメラによる防犯対策などに応用できる．

これらの問題は，いわゆる美術館問題と関連がある [1][4]．美術館問題とは，多角形領域内のいくつかの点に警備員を配置し，領域の任意の点がいずれかの警備員から見えるようにするためには，何人の警備員をどこに配置したらよいかという問題である．美術館問題は盛んに研究されており，どの単純な n 角形領域に対しても，高々 $\lfloor n/3 \rfloor$ 人の警備員からなる美術館問題の解が存在することが知られている [1]．

明らかにサーチライト問題の解は美術館問題の解でもあるが，美術館問題の解であっても，サーチライト問題の解でない例がある．例えば Fig.1 において，サーチライトの光線を常に後ろから追うように動く盗賊は発見できない．しかし，全ての警備員が多角形の境界に配置されて

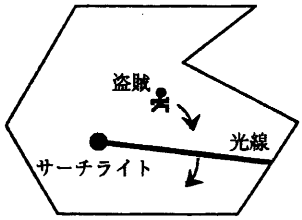

Fig.1: 美術館問題の解であるがサーチライト問題の解でない例

いる美術館問題のどの解も，サーチライト問題の解であることが知られている [6]．但し，サーチライトスケジューリング問題については効率の良いアルゴリズムは知られていない．

本論文では，与えられた単純な n 角形領域とサーチライトの配置とに対して，サーチライトスケジューリング問題を解く $O(n)$ 時間アルゴリズムを与える．このアルゴリズムはこれまでに知られているアルゴリズム [6] よりも単純で高速である．

2 準備

本章では用語と問題を定義する．

本文では単純な多角形のみを扱う．単純な多角形 P を定義する線分上の点の集合を $b(P)$ と書く．$b(P)$ は多角形の境界である．

点 v, w が多角形 P 内にあり，線分 vw が P に含まれるとき，v は w から見えるという．与えられた多角形 P と P 内のいくつかの点からなる集合 S とに対して，P 内の任意の点が S のいずれかの点から見えるとき，S は P の**警備集合**であるという．与えられた P に対して，警備集合 S を求める問題を**美術館問題**という．美術館問題の警備員は常に全方向を監視することになる．これに対し，一度にひとつの方向だけしか監視しないサーチライトで多角形の部屋を警備する問題がサーチライト問題とサーチライトスケジューリング問題である．これらの問題を次のように定義する．

多角形領域のいずれかの点に盗賊が潜んでおり，盗賊は領域内を連続的に動き回るとする．領域内のいくつかの点に固定されたサーチライトを用いて盗賊を捜したい．サーチライトは配置された点を端点とする半直線の光線を出す事ができ，光線を出す向きは連続的にしか変えられないとする．ただし光線は領域の境界を貫通できないとする．また，同一点には高々1つのサーチライトしか配置できないものとする．盗賊が光線上にいた時，盗賊は発見されたという．

盗賊を捜すためにサーチライトを動かし始める時刻を時刻0とする．各サーチライトの光線が時刻 $t \geq 0$ でどの方向を向いているか，即ちサーチライトの光線の動きを，各サーチライトのスケジュールという．各スケジュールの実行によってどのように盗賊が移動しても必ず盗賊が発見されるとき，そのようなスケジュールの組み合わせを**サーチスケジュール**という．与えられた多角形 P とサーチライトを配置するいくつかの点からなる集合 S とに対してサーチスケジュールが存在するならば，S は P の**サーチライト集合**であるという．与えられた P に対

してサーチライト集合 S を求める問題をサーチライト問題という．サーチライト集合 S が与えられた時，サーチスケジュールを求める問題をサーチライトスケジューリング問題と呼ぶ．

時刻 t において，$b(P)$ 上の点や $|S|$ 本の光線上の点を通らない曲線分で P 内の2点 u,v を結ぶ事ができるとき，時刻 t において点 u と v とは連結であるという．

次のように**疑惑点**と**安全点**を定義する．各時刻 t において P 内の各点は疑惑点と安全点のいずれかである．時刻0においてサーチライトの光線上にない点は時刻0において疑惑点である．時刻 $t_1 \geq 0$ において疑惑点であり，かつ時刻 $t_2 \geq t_1$ までどのサーチライトの光線上にもない点は時刻 t_2 でも疑惑点である．時刻 $t_1 > 0$ で2点 v,w が連結であり，かつ w が疑惑点であるとき，時刻 t_1 において v は疑惑点である．時刻 $t_1 \geq 0$ で疑惑点でない点は時刻 t_1 において安全点であるという．また，次のように**疑惑領域**と**安全領域**を定義する．時刻 t_1 において互いに連結した点からなる極大な領域 $R \subseteq P$ が疑惑点を含むなら，定義より R の全ての点は疑惑点であり，時刻 t_1 において R を疑惑領域という．疑惑領域でない P 内の連結した点からなる極大な各部分領域を安全領域という．すなわち，疑惑領域には盗賊がいるかもしれないが，安全領域には盗賊はいないということである．例えば Fig.2 において，$t < 0$ の (a) では多角形全体が疑惑領域である．時刻 $t = 0$ からサーチライト l_1 の光線を時計回りに回し始めると，(b) のように安全領域が生じる．ここで (b) の状態からさらに l_1 の光線を時計回りに回し続けると再び全体が疑惑領域に戻るが $((c1))$，(b) の状態から l_2 の光線を反時計回りに回すことで全体を安全領域にすることができる $((c2))$．

サーチスケジュールとは，P 全体を安全領域にするような各サーチライト l のスケジュールの組み合わせであると言える．

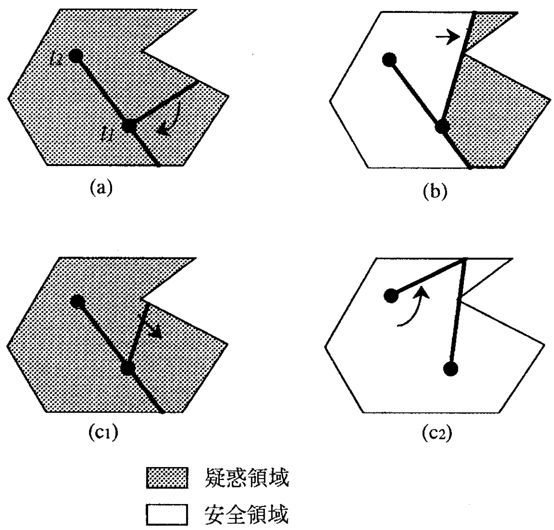

Fig.2: 安全領域 と 疑惑領域

次に，サーチライトの配置すなわちサーチライト集合を求める手法について述べる．全ての

警備員が多角形の境界に配置される警備集合はサーチライト集合でもあることが知られている [6]．また多角形の境界上の点のみからなる警備集合については次のことが知られている．まず，警備集合の点数が少なくとも $\lfloor n/3 \rfloor$ 個であるような単純 n 角形が存在する [1]．また，任意の単純 n 角形 P に対して，$\lfloor n/3 \rfloor$ 個の多角形の頂点からなる警備集合が存在することが P の三角形分割を用いて証明されている [1][3]．このような警備集合は文献 [2] の三角化アルゴリズムを用いて $O(n)$ 時間で求めることができる．

3　サーチライトスケジューリングアルゴリズム

この章では，前章で述べた方法で得られるサーチライトの配置に対して，サーチスケジュールを求めるアルゴリズムを与える．すなわち，次の定理を証明する．

定理 3.1 単純な n 角形 P は高々 $\lfloor n/3 \rfloor$ 個の境界上の点からなるサーチライト集合 S を持つ．S に対して，各々のサーチライトの光線を高々 360 度しか回転させない P のサーチスケジュールが存在する．また，そのようなスケジュールを $O(n)$ 時間で求めることができる．

証明　$|S|=1$ の場合は，ただ 1 つのサーチライトを高々 360 度回転させることで P を安全領域にすることができる．よって，$|S| \geq 2$ とする．

まず，次のように P の分割を作る．サーチライト集合 S は P を三角化したグラフ G_P を用いて作られる [1][3]．両端点のいずれもサーチライト集合に含まれないような G_P の対角線を分割線分と呼ぶ．$b(P)$ と分割線分に囲まれた高々 $\lfloor n/3 \rfloor$ 個の領域に P は分割される．これらを分割領域と呼ぶ．この各分割領域はサーチライト集合中の点をちょうど 1 つ含む (Fig.3参照)．

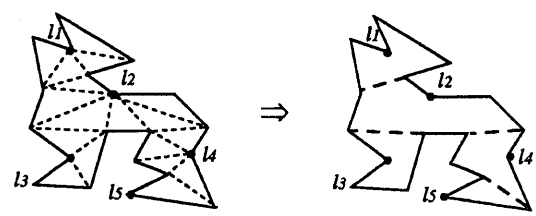

Fig.3: 分割の例

この P の分割から次のような木 T を作る．T の点集合は S とする．2 点 $l_1, l_2 \in S$ を含む 2 つの分割領域がある分割線分で隣接するときかつそのときのみ，T の点 l_1, l_2 を辺で結ぶ．T の例を Fig.4 に示す．T の任意の一点 l_r を選び，T の根とする．T の根以外の各点 l_i と根 l_r とを結ぶ道に含まれる辺の本数を点 l_i のレベルという．l_r のレベルは特に 0 とする．

本アルゴリズムでは，レベルが偶数であるサーチライトは光線を反時計回りに回転させ，そうでないサーチライトは光線を時計回りに回転させる．そのため，最初はレベルが偶数であるサーチライトは光線を多角形の境界に接するまでできるだけ時計回りに回した方向に向けさせ，そうでないサーチライトの光線はできるだけ反時計回りに回した方向に向けさせておく (Fig.4 参照)．

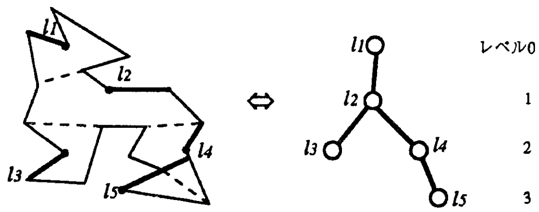

Fig.4: 木 T

T においてレベルが偶数であるサーチライト l_a のスケジュールについて説明する．レベルが奇数の場合は時計回りと反時計回りとを入れ換えることで適用できる．サーチライト l_a を含む分割領域を P_a とする．T における点 l_a の次数を $d(l_a)$ と書く．$b(P_a)$ は $d(l_a)$ 本の分割線分を含む．これらの分割線分を $b(P_a)$ 上で点 l_a から反時計回りに現れる順に $a_1b_1, a_2b_2, \cdots, a_{d(l_a)}b_{d(l_a)}$ とする．$b(P_a) \cap b(P_c) = a_ib_i, 1 \leq i \leq d(l_a)$ であるような分割領域 P_c を P_{a_i} とする (Fig.5参照).

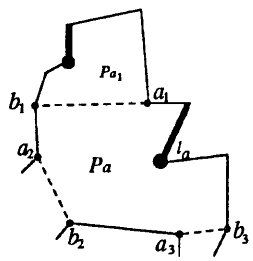

Fig.5: レベル偶数の分割領域 P_a の例

次にサーチライト l_a の方向の動かし方 $SLMS$ (Search Light Moving Scheduling) を与える．

$SLMS(l_a, P_a)$
begin

1. **for** $i = 1$ **to** $d(l_a)$ **do**

   begin

2. サーチライト l_a の光線を点 a_i を通るまで反時計回りに回す；

3. P_{a_i} 内のサーチライト l_{a_i} の光線が点 a_i を通るまで，l_a の光線を a_i を通る方向に向けたまま静止させておく；

4. l_{a_i} の光線が a_i を通る方向を向いたら，光線の交点が常に分割線分 a_ib_i 上にあるように l_a の光線を反時計回りに，l_{a_i} の光線を時計回りに回していき，l_a と l_{a_i} の光線が点 b_i を通るところで回転を止める (Fig.6参照)

   end；

5. l_a の光線を境界 $b(P_a)$ に接するまで反時計回りに回して終了する

end.

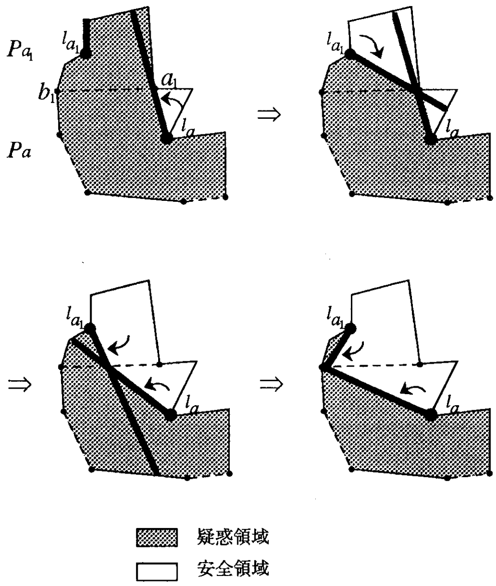

Fig.6: サーチライト l_a , l_{a_1} の動き

上の $SLMS$ を用いてサーチスケジュールを求める方法を説明する．

$SLMS$ では高々 360 度しかサーチライトの光線を回転させないようにするために，2つのサーチライトを用いて分割線分を安全領域にしている．以下では，$SLMS$ を用いればどの分割線分も安全領域にできることを証明し，分割線分を安全領域にする順番を求める方法を与える．$SLMS$ ではサーチライトの光線を一定の方向にしか回転させないので，どの分割線分から安全領域にしていくかという順番が求められれば，サーチスケジュールは容易に求められる．

前述した木 T の各辺は分割線分に対応する．T の各辺 $e = (l_a, l_b)$ に次のように2つのラベル $\alpha(e, l_a)$ と $\alpha(e, l_b)$ を付ける．辺 $e = (l_a, l_b)$ が領域 l_a において分割線分 a_ib_i , $1 \leq i \leq d(l_a)$, に対応するとき $\alpha(e, l_a) = i$ とし，e が領域 l_b において分割線分 a_jb_j , $1 \leq j \leq d(l_b)$, に対応するとき $\alpha(e, l_b) = j$ とする．ラベル付けの例を Fig.7 に示す．

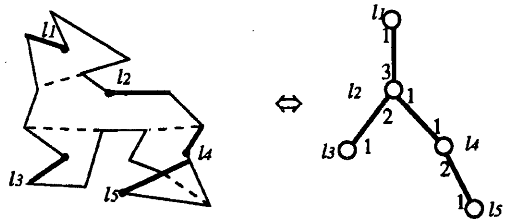

Fig.7: ラベル付けされた T

ラベルは T の点に対応するサーチライトの光線が，辺に対応する分割線分を何番目に通るのかを表している．例えば $\alpha(e,l_a)=i$ であれば，サーチライト l_a の光線は e に対応する分割線分を分割領域 P_a において i 番目に通るということを表している．よって，２つのラベルが共に１である辺に対応する分割線分は，２つのサーチライトを用いて安全領域にできる．このような辺を安全可能辺と呼ぶ．

ラベル付けされたどのような T にも，安全可能辺が一本以上あることを示す．まず，任意に選んだ T の根 $l_r=l_a$ に接続している辺から $\alpha(e_a,l_a)=1$ である辺 e_a を選ぶ．$e_a=(l_a,l_b)$ であるとすると，$\alpha(e_a,l_b)=1$ であれば e_a が安全可能辺である．$\alpha(e_a,l_b)\neq 1$ であれば $\alpha(e_b,l_b)=1$ である辺 e_b を選び，同様にもう１つのラベルを調べていく．途中で安全可能辺が無ければ木の葉に辿り着くが，木の葉にあたるどの点にも辺は一本しか接続していないのでその辺のラベルは共に１であり，安全可能辺である．よって，T には安全可能辺が必ず一本以上存在する．

T の任意の安全可能辺を $e_s=(l_a,l_b)$ とする．e_s に対応する分割線分を安全領域にした状態，すなわち，その分割線分に沿ってハサミを入れて P を２つの多角形に分割した状態に対応させるため，T から辺 e_s を除去し２つの木を作る．これらの２つの木に新たにラベル付けを行う．新たに得られた木の各々にも，辺が１本以上存在すれば安全可能辺があるので，同様に安全可能辺の除去とラベルの付け直しを繰り返すことでどの辺もいつかは安全可能辺になる．即ち，どの分割線分もいつかは安全領域にできる．

このことから，次のような手法でサーチスケジュールを求めることができる．

1. （全ての）木にラベル付けを行う．

2. 任意に木とその根を選び，根から辺を辿って安全可能辺を探す．

3. 安全可能辺を除去する．

4. 全ての辺が除去されれば終了．そうでなければ 1. に戻る．

実際には，再帰と深さ優先探索を用いることによってラベルの付け直しや木の選び直しを行わずに $O(n)$ 時間でサーチスケジュールを求めることができる（割愛）．木 T の作成とラベル付けに要する時間は $O(n)$ である．よって，P のサーチスケジュールは $O(n)$ 時間で求まる．□

以上により，与えられた単純な n 角形領域とサーチライトの配置とに対して，サーチライトスケジューリング問題を解く $O(n)$ 時間アルゴリズムが得られた．

本論文と同様の手法を用いることで，次の定理に示すように，より一般的なサーチライト集合に対するサーチスケジュールも求めることができる．

定理 3.2 単純な n 角形 P が，$b(P)$ 上の 2 点を結ぶ互いに交差しない $k-1$ 本の線分により k 個の部分領域 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ に分割されており，かつ各部分領域 P_i が $|S_i| = 1, S_i \subseteq b(P) \cap b(P_i)$ を満たす警備集合 S_i を持つとき，$\cup S_i$ は P のサーチライト集合であり $O(k)$ 時間でサーチスケジュールが求められる．

証明 略． □

4 結論

本論文では，与えられた単純な n 角形領域とサーチライトの配置とに対して，サーチライトスケジューリング問題を解く $O(n)$ 時間アルゴリズムを与えた．穴のある多角形領域など，より一般的な場合についてサーチライト集合やサーチスケジュールを求めることが今後の課題である．

参考文献

[1] V. Chvátal, *A combinatorial theorem in plane geometry*, J. Combinatorial Theory(B), 18(1975), 39-41.

[2] B. Chazelle, *Triangulating a simple polygon in linear time*, Disc. Comput. Geom., 6(1991), 485-524.

[3] S. Fisk, *A short proof of Chvátal's watchman theorem*, J. Combinatorial Theory(B), 24(1978), 374.

[4] J. O' Rourke, *Art Gallery Theorems and Algorithms*, Oxford University Press, New York, (1987).

[5] K. Sugihara, I. Suzuki and M. Yamashita, *The searchlight scheduling problem*, SIAM J. Comput., 19(1990), 1024-1040.

[6] 山下雅史，捜索問題－移動する対象を探索する，離散構造とアルゴリズム III, (1994), 115-162.