アルゴリズム 67－3
（1999．3．15）

条件を緩和した安定結婚問題の複雑さ

盛田 保文　宮崎 修一　岩間 一雄
京都大学 大学院情報学研究科
{ymorita,shuichi,iwama}@kuis.kyoto-u.ac.jp

安定結婚問題とは，N 人ずつの男女と各個人が異性に対する好みの順を書いた希望リストが与えられたときに，安定な N 組のペアを求める問題である．本問題に対しては多項式時間アルゴリズムが存在することが知られている．また，この問題の希望リストに対する条件の緩和として，異性全員を書かなくてもよい場合や，異性の希望順位に同順位を許す場合などが考えられるが，これらの緩和を単独で用いた場合にも，解の存在を判定する多項式時間アルゴリズムが知られている．本稿ではこれらの緩和を同時に行った場合に問題がNP完全になることを示す．また，本問題にコストを導入した最適化問題に対して，近似度の良いアルゴリズムが存在しないことを示す．

Intractability of the stable marriage problem with some relaxations

Yasufumi Morita　Shuichi Miyazaki　Kazuo Iwama
Graduate School of Informatics, Kyoto University

An instance of the original stable marriage problem consists of N men and N women. Each person submits a preference list in which he/she writes all the members of the opposite sex in the strict order. The problem is known to be solved in polynomial time. Considering practical applications, two natural relaxations for the preference lists have been introduced. One is to allow the list to be incomplete, namely, one can exclude persons whom he/she does not want to accept. The other one is to allow the list including ties. Each of these relaxations does not make the problem complicated, i.e., both problems are still in the class P. In this paper, we show that the problem becomes NP-complete if both relaxations are allowed. We also show the inapproximability for the optimization version of the stable marriage.

1　はじめに

安定結婚問題 [1] の例題は，N 人ずつの男女と，各個人が異性 N 人全員を全順序で並べた希望リストからなる．男性と女性の1対1対応を**マッチング**といい，マッチング M において男性 m と女性 w がペアになっているとき，$M(m)=w$, $M(w)=m$ と書く．マッチング M において，男性 m と女性 w がペアになっておらず，m は自分の相手 $M(m)$ よりも w の方を好み，w は自分の相手 $M(w)$ よりも m の方を好むとき，(m,w) は blocking pair であるという．マッチング M に blocking pair が存在しないとき，M を**安定マッチング**または**安定結婚**という．安定結婚問題は，与えられた例題から安定なマッチングを求める問題である．この問題を最初に研究した Gale と Shapley は，全ての例題に対して少なくとも1つの安定なマッチングが存在し，多項式時間でそのようなマッチングを求めるアルゴリズム (Gale-Shapley アルゴリズム) を示した [2]．

安定結婚問題では，希望リストに異性 N 人全員を書かなければならず，さらにその N 人は全順序で並べなければならない．(本稿では，異性全員を書いたリストを**完全リスト**，全順序で並べられたリストを**全順序リスト**とよぶことにする．) しかし実際的な応用を考えたとき，希望リストに対するこのような制限は多くの場合厳しいものと思われる．そこで，希望リストに対する2つの自然な制限の緩和が考えられてきた．1つ目の緩和は異性全員を希

望リストに書く必要はなく, 異性の部分集合を希望リストに書いてもよいというもので, 2つ目の緩和は希望リストが全順序である必要はなく, 同順位を許すというものである [1]. (異性の部分集合を書いたリストを**不完全リスト**, 同順位を許したリストを**同順位リスト**とよぶ.) これらの緩和を考えることにより, 次の4種類の安定結婚問題 (SMP : Stable Marriage Problem) が考えられる.

- **SMP-CLTO:** 完全リスト, 全順序
(Complete List and Total Order)
- **SMP-CLT:** 完全リスト, 同順位
(Complete List and Ties)
- **SMP-ILTO:** 不完全リスト, 全順序
(Incomplete List and Total Order)
- **SMP-ILT:** 不完全リスト, 同順位
(Incomplete List and Ties)

これらの問題のうち, 上3つの問題, すなわち希望リストに対する前述の2つ緩和を全く用いない問題と, 単独で用いた問題は, 安定マッチングの存在を判定し, そのようなマッチングを求める多項式時間アルゴリズムが存在することが知られている [1, 2, 3]. (不完全リストを用いたときは安定マッチングが存在しない場合があることに注意されたい.) 本研究では, 希望リストに対する2つの緩和を同時に用いた場合 (すなわち問題 SMP-ILT) が NP 完全になることを示した. 2節でこの証明を与える.

また, 安定結婚問題ではマッチングに対して以下のようなコストを考えることにより, 最適化問題を考えることができる. ある男性 m が自分の希望リスト中の第 i 位の女性とペアになった場合, この男性のコストを i とする. 女性にも同様のコストを定義する. マッチングのコストは, $2N$ 人全員のコストの総和とする. 最適化問題は, 例題が与えられたときにコスト最小の安定マッチングを求める問題である. 最適化問題においても, 希望リストに対する条件の緩和を考える. ただし, 安定なマッチングの存在を保証するため不完全リストは考えないことにし, 同順位を許す緩和のみを考える. 希望リスト中に同順位を含む場合の順位は以下のように定義する. 例えば, 男性 m のリストが $w_3, (w_2, w_4, w_5), w_1$ となっており, w_2, w_4, w_5 は同順位であるとする. このとき, w_3, w_2, w_4, w_5, w_1 の順位はそれぞれ 1, 2, 2, 2, 5 とする. これにより, 次の2種類の最適化問題が考えられる.

- **MIN-SMP:** 完全リスト, 全順序
- **MIN-SMP-TIES:** 完全リスト, 同順位

MIN-SMP に対しては, 最適解を求める多項式時間アルゴリズムが存在することが知られている [1]. 本研究では P≠NP の仮定の元で MIN-SMP-TIES が, 近似度の良い多項式時間アルゴリズムを持たないことを示した. すなわち P=NP でない限り任意の $\epsilon > 0$ に対して $N^{1-\epsilon}$ よりも良い近似アルゴリズムを持たないことが分かった. 3節でこれを証明する.

2 SMP-ILT の NP 完全性

本節では SMP-ILT が NP 完全であることを示す.

定理 1. SMP-ILT は NP 完全である.

証明 SMP-ILT が NP に属すことは以下のような非決定性アルゴリズムを考えることにより容易に証明できる. マッチング M を推測し, 全てのペアに対して blocking pair かどうかを判定し, blocking pair がいないなら受理, いるなら非受理とする. このアルゴリズムは多項式時間で動作する. よって SMP-ILT は NP に属する.

次に SMP-ILT の NP 困難性を示すため, 以下の問題を考える.

問題: ONE-IN-THREE 3SAT
例題: 3CNF 論理式
質問: 各項3つのリテラルのうち, ちょうど1つを1にするような変数割り当ては存在するか?

3CNF 論理式が否定リテラルを含まなくても ONE-IN-THREE 3SAT は NP 完全である [4, 5]. そこで, 肯定リテラルのみからなる ONE-IN-THREE 3SAT の例題を SMP-ILT に変換する.

2.1 ONE-IN-THREE 3SAT から SMP-ILT への変換

ONE-IN-THREE 3SAT の例題 f が与えられたとき, SMP-ILT の例題 $T(f)$, すなわち (1) 同数の男女, (2) 各男性の希望リスト, (3) 各女性の希望リストを作る. 与えられた論理式 $f = C_1 \cdot C_2 \cdots C_l$ に出現する変数の数を n, 項数を l とする. 変数 x_i

の出現回数を t_i とし, $t = \max\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ とする.

2.1.1 男性集合と女性集合

まず初めに, $(9l + 3n + t + 3)$ 人の男性と $(9l + 3n + t + 3)$ 人の女性を用意する. 男性は以下の5つのグループからなっている.

グループ (A) : $t+3$ 人の男性 $m_{A,1}, \cdots, m_{A,t+3}$.

グループ (B) : $3l$ 人の男性 $m_{B,i,j}$ $(1 \le i \le l,$ $1 \le j \le 3)$. 3人の男性 $m_{B,i,1}$, $m_{B,i,2}$, $m_{B,i,3}$ は第 i 項 C_i に対応している.

グループ (C) : n 人 の 男 性 $m_{C,1}, \cdots, m_{C,n}$. $m_{C,i}$ は変数 x_i に対応している.

グループ (D) : $2n$ 人 の 男 性 $m^+_{D,1}, m^-_{D,1}, \cdots,$ $m^+_{D,n}, m^-_{D,n}$. $m^+_{D,i}$ と $m^-_{D,i}$ は変数 x_i に対応している.

グループ (E) : $6l$ 人の男性 $m^+_{E,i,j}, m^-_{E,i,j}$. 各 $1 \le i \le n$, $1 \le j \le l$ に対して, リテラル x_i が項 C_j 中に現れるとき, $m^+_{E,i,j}$ と $m^-_{E,i,j}$ を作る. (否定リテラル $\overline{x_i}$ は現れないことに注意されたい.) リテラルは $3l$ 個あるので, $6l$ 人の男性が作られる.

女性も同様に以下の5つのグループからなる.

グループ (a) $t+3$ 人の女性 $w_{a,1}, \cdots, w_{a,t+3}$.

グループ (b) $2n$ 人の女性 $w^0_{b,i}$, $w^1_{b,i}$ $(1 \le i \le n)$. 女性 $w^0_{b,i}$ と $w^1_{b,i}$ は変数 x_i に対応している.

グループ (c) n 人の女性 $w_{c,i}$ $(1 \le i \le n)$. 女性 $w_{c,i}$ は変数 x_i に対応している.

グループ (d) $6l$ 人の女性 $w^0_{d,i,j}$, $w^1_{d,i,j}$. 各 $1 \le i \le n$, $1 \le j \le l$ に対し, リテラル x_i が項 C_j 中に現れるとき, 女性 $w^0_{d,i,j}$ と $w^1_{d,i,j}$ を作る. リテラルは $3l$ 個あるので, 女性は $6l$ 人作られる.

グループ (e) $3l$ 人の女性 $w_{e,i,j}$. グループ (d) と同様に, リテラル x_i が項 C_j 中に現れるとき, 女性 $w_{e,i,j}$ を作る.

2.1.2 男性の希望リスト

男性の希望リストの生成法は例を用いて説明する. ここでは, 論理式 $f_0 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_3 + x_4)$ に対する例を用いる. 表2 は, この論理式から作られた例題 $T(f_0)$ の男性の希望リストを示している.

まず, グループ (A) の男性 $m_{A,i}$ は, グループ (a) の女性 $w_{a,i}$1人だけをリストに書く.

グループ (B) の3人の男性 $m_{B,i,1}$, $m_{B,i,2}$, $m_{B,i,3}$ は項 C_i に対応している. f_0 の項 $C_2 = (x_1 + x_3 + x_4)$ に対応する3人 $m_{B,2,1}$, $m_{B,2,2}$, $m_{B,2,3}$ に対する希望リストの作成法について述べる. 項 C_2 はリテラル x_1, x_3, x_4 を含んでいるので, グループ (d) の6人の女性 $w^0_{d,1,2}$, $w^1_{d,1,2}$, $w^0_{d,3,2}$, $w^1_{d,3,2}$, $w^0_{d,4,2}$, $w^1_{d,4,2}$ が作られている. $m_{B,2,1}$ はこのうち, $w^1_{d,1,2}$, $w^1_{d,3,2}$, $w^1_{d,4,2}$ を第1希望に同順位で書く. $m_{B,2,2}$ と $m_{B,2,3}$ は第1希望に $w^0_{d,1,2}$, $w^0_{d,3,2}$, $w^0_{d,4,2}$ を同順位で書く. 元の論理式との直観的な関係は, $m_{B,i,1}$ とペアになる女性に対応したリテラルに1が割り当てられ, $m_{B,i,2}$ と $m_{B,i,3}$ とペアになった女性に対応したリテラルに0が割り当てらる.

グループ (C) の各男性は $(t + 5)$ 人の女性をリストに書く. まず, 希望リストの第1位から第 $(t+3)$ 位には, 女性 $w_{a,1}, \cdots, w_{a,t+3}$ をこの順番で書く. すなわち, 第 i 位に女性 $w_{a,i}$ を書く. 男性 $m_{C,i}$ は, 女性 $w^0_{b,i}$ を第 $(t + 4)$ 位に, 女性 $w^1_{b,i}$ を第 $(t + 5)$ 位に書く. 直観的には, 男性 $m_{C,i}$ と女性 $w^0_{b,i}$ がペアになることを, 変数 x_i に値0を代入することと対応させ, 男性 $m_{C,i}$ と女性 $w^1_{b,i}$ がペアになることを, 変数 x_i に値1を代入することと対応させる.

グループ (D) の学生の希望リストの作り方は, $m^+_{D,1}$ と $m^-_{D,1}$ を例にとり説明する. これらの男性は変数 x_1 に対応している. 男性 $m^+_{D,1}$ は女性 $w_{c,1}$ を第2希望に書く. (これは, 元の論理式 f によらず, 常に第2希望である.) 次に $m^+_{D,1}$ は女性 $w^0_{b,1}$ を第 $t + 3(= 5)$ 位に書く. x_1 は項 C_1 と C_2 に現れているので, グループ (d) の女性 $w^1_{d,1,1}$ と $w^1_{d,1,2}$ が作られている. $m^+_{D,1}$ は $w^1_{d,1,1}$ と $w^1_{d,1,2}$ をそれぞれ第3希望, 第4希望に書く. 空白の場所には $w_{a,1}$ から $w_{a,5}$ の女性を書く. すなわち, 第 i 希望が空白になっていたら, そこには女性 $w_{a,i}$ を書く. 一般的には, 固定された i に対して, 変数 x_i に対応した女性 $w^1_{d,i,j}$ が t_i 人作られている. $m^+_{D,i}$ はこれらの女性を希望リストの第3位から第 (t_i+2) 位に書く.

男性 $m^-_{D,1}$ のリストも同様に作られる. $m^-_{D,1}$ は女性 $w_{c,1}$ を第1希望に, 女性 $w^1_{b,1}$ を第 $t + 3(=$ $5)$ 希望に書く. x_1 は項 C_1 と C_2 に現れているので, グループ (d) の女性 $w^0_{d,1,1}$ と $w^0_{d,1,2}$ が作られ

ている．$m^-_{D,1}$ は $w^0_{d,1,1}$ を第3希望に，$w^0_{d,1,2}$ を第4希望に書く． 空白は $m^+_{D,1}$ と同様に $w_{a,i}$ を使って埋める．

最後にグループ(E)の男性の希望リストを作る．ここでも具体例で示す．項 C_2 のリテラル x_1 に対応する男性 $m^+_{E,1,2}$ と $m^-_{E,1,2}$ の希望リストの作り方を述べる．男性 $m^+_{E,1,2}$ はグループ(e)の女性 $w_{e,1,2}$ を第2希望に書き，項 C_2 のリテラル x_1 に対応する女性 $w^1_{d,1,2}$ をグループ(D)の $m^+_{D,1}$ が書いたのと同じ順位に書く． 男性 $m^-_{E,1,2}$ は女性 $w_{e,1,2}$ を第1希望に，女性 $w^0_{d,1,2}$ を $m^-_{D,1}$ が書いたのと同じ順位に書く． グループ(D)の男性と同様に，空白は $w_{a,i}$ を使って埋める．

2.1.3 女性の希望リスト

次に女性の希望リストを作る．女性の希望リストは男性の希望リストから自動的に作られる．まず初めに，男性を全順序で一列に並べる．これを男性の**ランク**と呼ぶ．$T(f_0)$ の男性のランクは表2に示す通りである．すなわち，$m_{A,1}$ がランク最上位で，$m^-_{E,4,2}$ がランク最下位である．一般的に，男性のランクは添字の辞書順で決定される．$m^{\delta}_{\alpha,\beta,\gamma}$ に対して，α, β, γ, δ の順で優先順位が付けられる．α については，A, B, C, D, E の順で優先度が高く，β, γ では，値の小さい数字の方が優先度が高い．δ に関しては，$+$ の方が $-$ よりも優先度が高い．

男性のランクと男性の希望リストに基づいて，女性の希望リストを生成する． まず，男性 m が女性 w を希望リストに書いていなければ，女性 w は男性 m を希望リストに書かない． そこで，女性 w をリストに書いている2人の男性 m_i と m_j を考える． (i) m_i のランクが m_j よりも上であり，(ii) m_i のリスト中での w の順位が m_j のリスト中での w の順位と同じかそれ以上の時，およびその時に限り，w の希望リストでは m_i が m_j よりも上位に現れる． それ以外の時，w の希望リストでは m_i と m_j は同順位とする．このように女性のリストを作ることで，女性のリストが半順序になってしまうことも考えられるが，男性のリストの条件から女性のリストは同順位しか含まないことが分かる．

女性のリストをこのように作ることにより，マッチングがblocking pairを含んでいるかどうかを男性のリストのみから判定することができる．男性 m_i が女性 w_i と，男性 m_j が女性 w_j とペアになっているとする．このとき，(m_i, w_j) は以下の3つの条件を満たす時，およびその時に限り，blocking pairである．(i) m_i は w_i よりも w_j の方が好きである．(ii) m_i のランクは m_j のランクよりも上である．(iii) m_i のリストでの w_j の順位は m_j のリストでの w_j の順位と同じかそれより上である．上述の条件(ii)と(iii)を合わせたものが，w_j が m_j よりも m_i の方が好きだという条件になっている．

2.2 補題

本節では，変換の正当性を証明するために必要な補題をいくつか証明する．マッチング M で男性 m と女性 w がペアになっているとき，$M(m) = w$, $M(w) = m$ と書くことを思い出されたい．

補題1. マッチング M が $T(f)$ の解であるなら，各 i $(1 \leq i \leq t+3)$ に対して $M(m_{A,i}) = w_{a,i}$ である．すなわち，グループ(A)の男性は第1希望に書いた唯一の女性とペアになっている．

証明. $m_{A,i}$ の希望リストには $w_{a,i}$ しか書かれていないので，マッチングが1対1であるという条件から明らかである．□

補題2. マッチング M が $T(f)$ の解であるなら，各 i $(1 \leq i \leq n)$ に対して，$M(m_{C,i}) = w^0_{b,i}$ または $M(m_{C,i}) = w^1_{b,i}$ である．

証明. 補題1より女性 $w_{a,i}$ は男性 $m_{A,i}$ とペアになる．したがって，$m_{C,i}$ のリスト中で $m_{C,i}$ とペアになれるのは $w^0_{b,i}$ または $w^1_{b,i}$ のみである．□

補題3. マッチング M が $T(f)$ の解であるとする． このとき，各 i $(1 \leq i \leq n)$ に対して次の(i), (ii)が成り立つ．(i) $M(m_{C,i}) = w^0_{b,i}$ ならば $M(m^+_{D,i}) = w_{c,i}$ かつ $M(m^-_{D,i}) = w^1_{b,i}$ である．(ii) $M(m_{C,i}) = w^1_{b,i}$ であれば $M(m^+_{D,i}) = w^0_{b,i}$ かつ $M(m^-_{D,i}) = w_{c,i}$ である．

証明. (i)に対してのみ証明する．(ii)も同様に示せる． 女性 $w^1_{b,i}$ をリスト中に書いている男性は $m_{C,i}$ と $m^-_{D,i}$ のみである． $M(m_{C,i}) = w^0_{b,i}$ であるので，M が1対1であるため $M(m^-_{D,i}) = w^1_{b,i}$ である． 同様に，女性 $w_{c,i}$ をリスト中に書いている男性は $m^+_{D,i}$ と $m^-_{D,i}$ のみであるが，$M(m^-_{D,i}) = w^1_{b,i}$ なので $M(m^+_{D,i}) = w_{c,i}$ でしかあり得ない．□

補題4. マッチング M が $T(f)$ の解であるとする． このとき，各 i $(1 \leq i \leq n)$ に対して次の(i), (ii)が成り立つ． (i) $M(m_{C,i}) = w^0_{b,i}$ ならば，全ての j に対して $M(m^+_{E,i,j}) = w^1_{d,i,j}$ かつ $M(m^-_{E,i,j}) = w_{e,i,j}$ である．(ii) $M(m_{C,i}) = w^1_{b,i}$

$m_{B,j,1}$	$w^1_{d,j_1,j}$ $w^1_{d,j_2,j}$ $w^1_{d,j_3,j}$				
$m_{B,j,2}$	$w^0_{d,j_1,j}$ $w^0_{d,j_2,j}$ $w^0_{d,j_3,j}$				
$m_{B,j,3}$	$w^0_{d,j_1,j}$ $w^0_{d,j_2,j}$ $w^0_{d,j_3,j}$				

表 1: C_j に対応する男性の希望リスト

ならば，全ての j に対して $M(m^+_{E,i,j}) = w_{e,i,j}$ かつ $M(m^-_{E,i,j}) = w^0_{d,i,j}$ である．

証明. $T(f_0)$ の $i = 1$ の場合の例で，(i) についてのみ示す．$M(m_{C,1}) = w^0_{b,1}$ であると仮定する．すると補題 3 より $M(m^+_{D,1}) = w_{c,1}$, $M(m^-_{D,1}) = w^1_{b,1}$ となる． ここで，女性 $w_{e,1,1}$ を考える． この女性を希望リストに書いている男性は $m^+_{E,1,1}$ と $m^-_{E,1,1}$ のみなので，このどちらかが $w_{e,1,1}$ とペアにならなければならない． ここで $M(m^+_{E,1,1}) = w_{e,1,1}$ と仮定する． すると，$m^-_{E,1,1}$ のリストの中でまだ誰ともペアになっていない女性は $w^0_{d,1,1}$ なので $M(m^-_{E,1,1}) = w^0_{d,1,1}$ である． しかし，この場合 $m^-_{D,1}$ と $w^0_{d,1,1}$ が blocking pair になっているため，M が安定マッチングであることに矛盾する．したがって $M(m^+_{E,1,1}) = w^1_{d,1,1}$, $M(m^-_{E,1,1}) = w_{e,1,1}$ である． 同様に女性 $w_{e,1,2}$ を考えることにより，$M(m^+_{E,1,2}) = w^1_{d,1,2}$, $M(m^-_{E,1,2}) = w_{e,1,2}$ となることが分かる．このようなペアの作り方をすると，blocking pair ができないことに注意されたい．□

次にグループ (B) の男性の性質について考える．$C_j = (x_{j_1} + x_{j_2} + x_{j_3})$ を f の j 番目の項とすると，男性 $m_{B,j,1}$, $m_{B,j,2}$, $m_{B,j,3}$ がこの項に対応している． また，これら 3 つのリテラルに対応して女性 $w^0_{d,j_1,j}$, $w^1_{d,j_1,j}$, $w^0_{d,j_2,j}$, $w^1_{d,j_2,j}$, $w^0_{d,j_3,j}$, $w^1_{d,j_3,j}$ が作られており，項 C_j に対応する男性 3 人の希望リストは表 1 のようになる．

補題 5. マッチング M が $T(f)$ の解であるとする． このとき，各 $i \in \{j_1, j_2, j_3\}$ に対して，以下が成り立つ． $M(m_{B,j,1}) = w^1_{d,i,j}$ ならば，$m_{B,j,2}$, $m_{B,j,3}$ のどちらも $w^0_{d,i,j}$ とペアになっていない．すなわち，各 i, j に対して，$w^0_{d,i,j}$ と $w^1_{d,i,j}$ のうちどちらか一方がグループ (B) の男性とペアになり，もう一方はグループ (B) の男性とはペアにならない．

証明. 女性 $w^0_{d,i,j}$ と $w^1_{d,i,j}$ を考える． 補題 1〜3 より，グループ (A), (C), (D) の男性はこの 2 人の女性のどちらともペアにならない． 補題 4 より，$M(m_{C,i}) = w^0_{b,i}$ ならば $M(m^+_{E,i,j}) = w^1_{d,i,j}$ であり，$w^0_{d,i,j}$ はグループ (E) の男性とはペアにならずグループ (B) の男性とペアになる． また，$M(m_{C,i}) = w^1_{b,i}$ ならば $M(m^-_{E,i,j}) = w^0_{d,i,j}$ であり，$w^1_{d,i,j}$ はグループ (B) の男性とペアになる．□

補題 6. マッチング M が $T(f)$ の解であるとする． このとき，各 i, j に対して以下の (i), (ii), (iii) が成り立つ．

(i) $M(m_{B,j,1}) = w^1_{d,i,j}$ ならば $M(m_{C,i}) = w^1_{b,i}$.

(ii) $M(m_{B,j,2}) = w^0_{d,i,j}$ ならば $M(m_{C,i}) = w^0_{b,i}$.

(iii) $M(m_{B,j,3}) = w^0_{d,i,j}$ ならば $M(m_{C,i}) = w^0_{b,i}$.

証明. (i) についてのみ示す． $M(m_{B,j,1}) = w^1_{d,i,j}$ であるが $M(m_{C,i}) \neq w^1_{b,i}$ であると仮定する． すると，補題 2 より $M(m_{C,i}) = w^0_{b,i}$ となり，補題 4 より $M(m^+_{E,i,j}) = w^1_{d,i,j}$ となる． このとき，$w^1_{d,i,j}$ は 2 人の男性とペアになっているので矛盾である．(ii) および (iii) も同様に示せる．□

2.3 変換の正当性

本節では変換の正当性を証明する．項 C_j 中のリテラル x_i を x^j_i で表すことにする．ここで，f の変数やリテラルの値と $T(f)$ のマッチング M に対する以下の対応規則を考える． (1) 男性 $m_{C,i}$ と女性 $w^1_{b,i}$ がペアになっている時およびその時に限り変数 x_i に 1 を割り当てる． $m_{C,i}$ と $w^0_{b,i}$ がアになっている時およびその時に限り変数 x_i に 0 を割り当てる． (2) 男性 $m_{B,j,1}$ と女性 $w^1_{d,i,j}$ がペアになっている時およびその時に限りリテラル x^j_i に 1 を割り当てる．$m_{B,j,2}$ または $m_{B,j,3}$ が $w^0_{d,i,j}$ とペアになっている時およびその時に限りリテラル x^j_i に 0 を割り当てる． 次に，この対応規則の整合性，すなわち M が $T(f)$ の解になっているという条件の元で，$x_i = 1$ ならば全ての j に対して $x^j_i = 1$ であり，$x_i = 0$ ならばての j に対して $x^j_i = 0$ となっていることを証明する．

$x_i = 1$ とする． このとき，対応規則から

$M(m_{C,i}) = w^1_{b,i}$ となっている．ここで，$x^j_i = 0$ となっている j があるとする．このとき，対応規則から $m_{B,j,2}$ または $m_{B,j,3}$ が女性 $w^0_{d,i,j}$ とペアになっている．すると，補題6の (ii) または (iii) より，$M(m_{C,i}) = w^0_{b,i}$ となっている．これは，男性 $m_{C,i}$ が女性 $w^1_{b,i}$ と $w^0_{b,i}$ の両方とペアになっているため M が解であることに矛盾する．したがって，$x_i = 1$ ならば全ての j に対して $x^j_i = 1$ である．$x_i = 0$ の場合も同様に示すことができる．

$T(f)$ に解 M^* があるとする．すると，補題2より各 i に対して $M^*(m_{C,i}) = w^0_{b,i}$ または $M^*(m_{C,i}) = w^1_{b,i}$ となっている．ここで，上述の対応規則を用いて論理式 f の変数に0または1を割り当てる．すなわち，$M^*(m_{C,i}) = w^0_{b,i}$ ならば $x_i = 0$, $M^*(m_{C,i}) = w^1_{b,i}$ ならば $x_i = 1$ である．これが f に対する解になっていることを示す．

各 $1 \leq j \leq l$ に対して，f の j 番目の項を $C_j = (x_{j_1} + x_{j_2} + x_{j_3})$ とする．すると，C_j に対応する3人の男性の希望リストは表1のようになっている．これらの男性は補題5で書かれたようにマッチングされているはずである．補題5を満たす6通りのうち，$M^*(m_{B,j,1}) = w^1_{d,j_1,j}$, $M^*(m_{B,j,2}) = w^0_{d,j_2,j}$, $M^*(m_{B,j,3}) = w^0_{d,j_3,j}$ を考える．このとき，対応規則より $x^j_{j_1} = 1$, $x^j_{j_2} = 0$, $x^j_{j_3} = 0$ となっており，3つのうちちょうど1つのリテラルが1になっている．（他の5通りの場合もちょうど1つのリテラルが1になっていることは容易に分かる．）M^* は $T(f)$ の解であるので，先ほど示した整合性より，変数の値とリテラルの値の間には全く矛盾がない．したがってこの割り当ては f に対する解になっている．

逆に，ONE-IN-THREE 3SAT の例題 f に解があるとする．このとき，対応規則を用いてグループ (B), グループ (C) の男性のマッチングを決める．グループ (A), (D), (E) の男性のマッチングは補題1, 3, 4より一意に決まる．このマッチングが安定であることは，これまでの補題1から5より容易に分かる．□

3 最適化問題の複雑さ

本節では1節で述べたMIN-SMP-TIESの近似の困難性を示す．まず，一般の最小化問題に関して以下の定義を述べる．T を最小化問題 P に対する近似アルゴリズムとする．x を P に対する長さ N の入力とする．$opt(x)$ を x の最適値，$T(x)$ を T が x に対して出力する解のコストとする．任意の x に対して $T(x)/opt(x) \leq r(N)$ が成り立つとき，T は $r(N)$- 近似アルゴリズムであるという．P に対する多項式時間 $r(N)$- 近似アルゴリズムが存在するとき問題 P は $r(N)$ で近似可能であるという．

定理 2. P≠NP ならば，MIN-SMP-TIES はどんな $\epsilon > 0$ に対しても $N^{1-\epsilon}$ では近似できない．

証明. I を定理1の証明中で得られたSMP-ILTの例題とする．I の男性（および女性）の数を $K = 9l + 3n + t + 3$ とする．この I をMIN-SMP-TIESの例題 J に変換する．J は $2K^c$ 人ずつの男女からなっている．ただし c は定数である．まず最初に，K^c 人の男性 $m_{0,1}, m_{0,2}, \cdots, m_{0,K^c}$ からなる集合 M_U と，K^c 人の女性 $w_{0,1}, w_{0,2}, \cdots, w_{0,K^c}$ からなる集合 W_U を用意する．次に K^{c-1} 個の男性の集合 $M_1, M_2, \cdots, M_{K^{c-1}}$ を用意する．各 M_i はちょうど K 人ずつの男性の集合である．女性も同様に K^{c-1} 個の集合 $W_1, W_2, \cdots, W_{K^{c-1}}$ を用意する．各 W_i にはちょうど K 人ずつの女性がいる．したがって，$2K^c$ 人ずつの男女が用意された．ここで，M_i と W_i を I のコピーとみなす．すなわち，M_i の各男性を I の各男性と，W_i の各女性を I の各女性と1対1に対応付ける．

次に，各個人の希望リストを作成する．男性 $m_{0,i} \in M_U$ は第1希望に女性 $w_{0,i} \in W_U$ を書く．そして，その後ろに残り $2K^c - 1$ 人の女性を任意の順位で書く．女性 $w_{0,i} \in W_U$ も同様に男性 $m_{0,i} \in M_U$ を第1希望に書き，残り $2K^c - 1$ 人の男性をリストの後ろに任意の順序で追加する．任意の i に対して，男性 $m_{0,i}$ と女性 $w_{0,i}$ はお互い第1希望で書き合っているので，安定マッチングではこの2人は必ずペアになる．これで，M_U の男性と W_U の女性の希望リストは出来上がった．これから，M_i の男性および W_i の女性の希望リストを作成する．上述したように M_i の男性は I の男性と，W_i の女性は I の女性と対応付けられている．M_i の男性 m の希望リストは，I 中の m に対応する男性 m' のリストと同じである．（ただし，リスト中の女性は I のものではなく，W_i 中の女性で I に対応する女性である．）これらの女性を m にとって適正な女性であるという．m のリストはまだ不完全であるため，リストにいない女性を書いて完全にしなければならない．まず m のリストに W_U 中の女性 K^c 人を追加する．次に残りの女性を任意にリストに追加してリストを完全にする．女性の希望リストも同様に作る．W_i の女性 w のリストは，I 中

の w に対応する女性 w' のものと全く同じで，リスト中の男性はそれぞれ M_i の対応する男性である．同様にこれらの男性を w にとって適正な男性と呼ぶ．次に M_U の男性 K^c 人をリストに追加し，その後残りの男性を任意にリストに追加することで，リストを完全にする．これで変換は終了である．

前述したように，安定マッチングでは $1 \leq i \leq K^c$ の各 i に対して $m_{0,i}$ と $w_{0,i}$ がペアになる．これらの各人のコストは1ずつである．ここで I が安定マッチングを持つ場合と持たない場合の J のコストについて考える．

まず，I に安定マッチングが存在しない場合を考える．このとき，以下の理由により，各 i に対して，M_i 中に少なくとも1人の男性 m と W_i 中に少なくとも1人の女性 w がいて，m も w も適正な相手とペアにならない．仮に，M_i 中の全ての男性と W_i 中の全ての女性が適正な相手とペアになったとする．すると，これらのマッチングをそのまま使って，I に対する安定マッチングを作ることができ，I に安定マッチングがないことに矛盾する．したがって，少なくとも1人は適正な相手とは結婚しない．その人を P とする．J に対するマッチングでの P の相手を Q とする．一般性を失うことなく P が男性であると考えることができる．まず $Q \in W_i$ の場合を考える．適正さの定義より，w が m に対して適正であるとき，およびそのときに限り m は w に対して適正である．Q が P にとって適正でないので P は Q にとって適正でない．次に $Q \notin W_i$ の場合を考える．M_i 中の男性数と W_i 中の女性数は同じであるので，このとき，W_i 中に少なくとも1人の女性 R がいて，R の相手は M_i の男性以外とペアになっている．したがって，R の相手は R にとって適正ではない．このように，適正な相手とペアになっていない男性・女性をそれぞれ m^i，w^i とする．男性 m^i の希望リストには適正な女性が初めの方に書かれ，W_U の女性 $w_{0,j}$ が書かれ，最後に残りの女性が書かれている．m^i は W_U の女性とはペアにはならないので，m^i のコストは K^c よりも大きい．同様に女性 w^i のコストも K^c より大きい．したがって，どのような安定マッチングにおいても，m^i と w^i のコストの和は $2K^c$ よりも大きい．このような m^i，w^i は K^{c-1} 組いるので，安定マッチングのコストは $2K^c \cdot K^{c-1} = 2K^{2c-1}$ よりも大きいことになる．

次に，I に安定マッチングが存在する場合を考える．このとき，M_i の各男性，W_i の各女性を I のマッチングに従って，適正な相手とペアにすることができる．M_i の各男性に対する適正な女性は高々 $t+5$ 人である．ただし，t は f 中のリテラルの出現数の最大値である．よって，M_i 中の K 人の男性のコストの総和は高々 $K(t+5)$ である．よって，J 中の最適な安定マッチングの男性のコストの総和は高々 $K^c + K^{c-1} \cdot K(t+5) = K^c(t+6) \leq 7tK^c$ となる．$t \leq l$, $K = 9l + 3n + t + 3$ なので，$t < \frac{K}{10}$ であり，$7tK^c < \frac{7}{10}K^{c+1}$ となる．W_i 中の各女性には適正な男性は高々4人しかいない．よって，最適な安定マッチングでの女性のコストの総和は高々 $K^c + K^{c-1} \cdot 4K = 5K^c < \frac{3}{10}K^{c+1}$ である．よって，最適安定マッチングのコストは高々 $\frac{7}{10}K^{c+1} + \frac{3}{10}K^{c+1} = K^{c+1}$ となる．

上述のように，I に安定マッチングが存在する場合，J の最適コストは高々 K^{c+1} で，I に安定マッチングが存在しない場合には，J の最適コストは少なくとも $2K^{2c-1}$ である．したがって，多項式時間で動作する $(2K^{2c-1})/K^{c+1} = 2K^{c-2}$ 近似アルゴリズムが存在すれば，SMP-ILT を多項式時間で解けることになる．例題 J のサイズは $N = 2K^c$ であるので，$K = (\frac{N}{2})^{\frac{1}{c}}$ を代入すると，近似度の下限は $2K^{c-2} = \frac{2}{2^{1-\frac{2}{c}}}N^{1-\frac{2}{c}} > N^{1-\frac{2}{c}}$ となる．□

参考文献

[1] D. Gusfield and R. W. Irving, "The Stable Marriage Problems: Structure and Algorithms," MIT Press, Boston, MA, 1989.

[2] D. Gale and L. S. Shapley, "College admissions and the stability of marriage," *Amer. Math. Monthly*, Vol.69, pp.9-15, 1962.

[3] D. Gale and M. Sotomayor, "Some remarks on the stable matching problem," *Discrete Applied Mathematics*, Vol.11, pp.223-232, 1985.

[4] M. R. Garey and D. S. Johnson, "Computers and Intractability, A Guide to The Theory of NP-Completeness," Freeman, San Francisco, 1979.

[5] T. J. Schaefer, "The complexity of satisfiability problems," *Proc. STOC78*, pp.216-226, 1978.

$m_{A,1}$	$w_{a,1}$							
$m_{A,2}$	$w_{a,2}$							
$m_{A,3}$	$w_{a,3}$							
$m_{A,4}$	$w_{a,4}$							
$m_{A,5}$	$w_{a,5}$							
$m_{B,1,1}$	$w^1_{d,1,1}$	$w^1_{d,2,1}$	$w^1_{d,3,1}$					
$m_{B,1,2}$	$w^0_{d,1,1}$	$w^0_{d,2,1}$	$w^0_{d,3,1}$					
$m_{B,1,3}$	$w^0_{d,1,1}$	$w^0_{d,2,1}$	$w^0_{d,3,1}$					
$m_{B,2,1}$	$w^1_{d,1,2}$	$w^1_{d,3,2}$	$w^1_{d,4,2}$					
$m_{B,2,2}$	$w^0_{d,1,2}$	$w^0_{d,3,2}$	$w^0_{d,4,2}$					
$m_{B,2,3}$	$w^0_{d,1,2}$	$w^0_{d,3,2}$	$w^0_{d,4,2}$					
$m_{C,1}$	$w_{a,1}$	$w_{a,2}$	$w_{a,3}$	$w_{a,4}$	$w_{a,5}$	$w^0_{b,1}$	$w^1_{b,1}$	
$m_{C,2}$	$w_{a,1}$	$w_{a,2}$	$w_{a,3}$	$w_{a,4}$	$w_{a,5}$	$w^0_{b,2}$	$w^1_{b,2}$	
$m_{C,3}$	$w_{a,1}$	$w_{a,2}$	$w_{a,3}$	$w_{a,4}$	$w_{a,5}$	$w^0_{b,3}$	$w^1_{b,3}$	
$m_{C,4}$	$w_{a,1}$	$w_{a,2}$	$w_{a,3}$	$w_{a,4}$	$w_{a,5}$	$w^0_{b,4}$	$w^1_{b,4}$	
$m^+_{D,1}$	$w_{a,1}$	$w_{c,1}$	$w^1_{d,1,1}$	$w^1_{d,1,2}$	$w^0_{b,1}$			
$m^-_{D,1}$	$w_{c,1}$	$w_{a,2}$	$w^0_{d,1,1}$	$w^0_{d,1,2}$	$w^1_{b,1}$			
$m^+_{D,2}$	$w_{a,1}$	$w_{c,2}$	$w^1_{d,2,1}$	$w_{a,4}$	$w^0_{b,2}$			
$m^-_{D,2}$	$w_{c,2}$	$w_{a,2}$	$w^0_{d,2,1}$	$w_{a,4}$	$w^1_{b,2}$			
$m^+_{D,3}$	$w_{a,1}$	$w_{c,3}$	$w^1_{d,3,1}$	$w^1_{d,3,2}$	$w^0_{b,3}$			
$m^-_{D,3}$	$w_{c,3}$	$w_{a,2}$	$w^0_{d,3,1}$	$w^0_{d,3,2}$	$w^1_{b,3}$			
$m^+_{D,4}$	$w_{a,1}$	$w_{c,4}$	$w^1_{d,4,2}$	$w_{a,4}$	$w^0_{b,4}$			
$m^-_{D,4}$	$w_{c,4}$	$w_{a,2}$	$w^0_{d,4,2}$	$w_{a,4}$	$w^1_{b,4}$			
$m^+_{E,1,1}$	$w_{a,1}$	$w_{e,1,1}$	$w^1_{d,1,1}$					
$m^-_{E,1,1}$	$w_{e,1,1}$	$w_{a,2}$	$w^0_{d,1,1}$					
$m^+_{E,1,2}$	$w_{a,1}$	$w_{e,1,2}$	$w_{a,3}$	$w^1_{d,1,2}$				
$m^-_{E,1,2}$	$w_{e,1,2}$	$w_{a,2}$	$w_{a,3}$	$w^0_{d,1,2}$				
$m^+_{E,2,1}$	$w_{a,1}$	$w_{e,2,1}$	$w^1_{d,2,1}$					
$m^-_{E,2,1}$	$w_{e,2,1}$	$w_{a,2}$	$w^0_{d,2,1}$					
$m^+_{E,3,1}$	$w_{a,1}$	$w_{e,3,1}$	$w^1_{d,3,1}$					
$m^-_{E,3,1}$	$w_{e,3,1}$	$w_{a,2}$	$w^0_{d,3,1}$					
$m^+_{E,3,2}$	$w_{a,1}$	$w_{e,3,2}$	$w_{a,3}$	$w^1_{d,3,2}$				
$m^-_{E,3,2}$	$w_{e,3,2}$	$w_{a,2}$	$w_{a,3}$	$w^0_{d,3,2}$				
$m^+_{E,4,2}$	$w_{a,1}$	$w_{e,4,2}$	$w^1_{d,4,2}$					
$m^-_{E,4,2}$	$w_{e,4,2}$	$w_{a,2}$	$w^0_{d,4,2}$					

表 2: $T(f_0)$ の男性の希望リスト