アルゴリズム 69−9
(1999. 9. 2)

単連結完備多様体におけるボロノイ図のファセット数の評価

大西 建輔*, 伊藤 仁一†

* 電気通信大学大学院情報システム学研究科, † 熊本大学教育学部

概要

本稿では, 全ての点で非正の曲率を持ち, 完備単連結多様体であるアダマール多様体上での近接関係であるボロノイ図の構造が双曲型ボロノイ図を用いることにより, 部分的に決定できることを述べる. また, 一般の単連結完備多様体に置いても, 点集合がある種の条件を満たしていれば, 同様の定理が成立する.

Complexity of facet of Voronoi diagram on simply connected complete manifold

Kensuke Onishi*, Jin-ichi Itoh†

* Graduate School of Information Systems, University of Electro-Communications,
† Faculty of Education, Kumamoto University

Abstract

In this paper we deal with Voronoi diagram on simply connected complete manifold with non-positive curvature, called *Hadamard manifold*. We prove that Voronoi region of the diagram can be characterized by hyperbolic Voronoi diagram. Voronoi diagram on simply connected complete manifold is also characterized by Euclidean if a given set of points satisfies a condition.

1 始めに

リーマン多様体上には, 計量が導入されているため, 距離を定義することが可能である [3]. すなわち, $d(\cdot,\cdot)$ をリーマン多様体 $\mathcal{S}$ 上での距離とし, n 点からなる点集合 $P_i (i=1,\ldots,n)$ が与えられているとき, 個々のボロノイ領域は,

$$\mathrm{Vor}(P_i) = \bigcap_{j\neq i} \{p \in \mathcal{S} | d(p,p_i) \leq d(p,p_j)\}$$

と定義でき, 点集合全体に対するボロノイ領域の全体をボロノイ図と定義する. しかしながら, その距離を用いたボロノイ図の構成に関する研究は, あまりおこなわれていない. 球面 [5] や双曲型空間 [1, 6] などの特殊なリーマン多様体上での研究がいくつかあるだけである. また, [2] や [4] などでも特殊な多様体上でのボロノイ図の研究が行われている. この現状は, 一般のリーマン多様体には特殊な座標系を必ずしも取ることが出来ず, 距離を実際に計算することが難しいためと考えられる.

*〒 182-8585 調布市調布ヵ丘 1-5-1 電気通信大学大学院情報システム学研究科, E-mail: onishi@hol.is.uec.ac.jp
†〒 860-8555 熊本市黒髪 2-40-1 熊本大学教育学部, E-mail: j-itoh@gpo.kumamoto-u.ac.jp

本稿では，完備単連結な多様体であり，任意の点で曲率が非正のアダマール多様体や曲率が正の多様体上でのボロノイ図の構造に関して言及する．これらの多様体は，2次元ならば曲面の部分構造として，空間上に実現することができ，それらを曲面上の距離に基づきボロノイ図や三角形分割することは，コンピュータグラフィックスやメッシュ生成などにも有効利用できる．ただし，これらの多様体上での実際のボロノイ図の生成について議論を行うわけではなく，それぞれのボロノイ領域の特徴づけについて述べる．すなわち，これらのボロノイ領域が既知のボロノイ図で近似できることを示す．

ここでは，次のような定理を利用し，構造に関する定理の証明を行なう．

定理 1 (トポノゴフの比較定理 ([7]p212)) M を完備リーマン多様体で全ての断面曲率 K が定数 δ に対して，$K \geq \delta$ を満たすと仮定する．M_δ^2 で *2* 次元完備単連結な定曲率 δ の空間系を表す．

M の一般測地 *2* 辺形[1]$(p;\gamma,\tau)$ で，$L(\tau) \leq \pi/\sqrt{\delta}$ を仮定する．M_δ^2 で対応する測地 *2* 辺形 $(\tilde{p};\tilde{\gamma},\tilde{\tau})$ を $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma), L(\tilde{\tau}) = L(\tau)$ を満たし，測地 *2* 辺形の角 $\tilde{\alpha}$ が α に等しくなるようにとる．このとき，$\gamma,\tilde{\gamma}$ の終点を $q,\tilde{q}$, $\tau,\tilde{\tau}$ の終点を $r,\tilde{r}$ とすれば，$d(q,r) \leq d(\tilde{q},\tilde{r})$ が成り立つ．ただし，$L(\tau)$ は一般測地 *2* 辺形 $(p;\gamma,\tau)$ の p から τ までの距離とする．

[注意] 非正の曲率の場合，すなわち $\delta < 0$ の場合は $\pi/\sqrt{\delta} = +\infty$ となる [7]．つまり，アダマール多様体の場合は，どのような点集合に対しても，定理 1 を適用することが出来る．

この定理を正曲率の多様体やアダマール多様体に適用し，それぞれの構造でのボロノイ図の局所構造を決定する．

まず，第 2 章では，アダマール多様体でのボロノイ図に言及し，第 3 章では，一般の単連結完備多様体上でのボロノイ図の構造に付いて説明をおこなう．

2 アダマール多様体

本章では，アダマール多様体でのボロノイ図の局所構造に関する定理を証明する．アダマール多様体とは，至るところ非正の断面曲率を持ち，単連結で，完備[2]なリーマン多様体である．

このアダマール多様体での最小断面曲率[3] を K とし，双曲型空間の曲率として，$\delta \leq K$ を満たすように負の定曲率空間を選ぶことにより，定理 1 を適用することができる．また，対応のための写像としては，指数写像を用いれば良いことが知られている [7]．この写像を用いることにより，ある点からの距離を変化させずに，アダマール多様体上の点を双曲型空間上に配置することができる．つまり，ある点 P の接空間への持ち上げに指数写像を使い，全ての点を写像する．このとき，P から見た他の点への角度と距離を保存して，写像することができる．

[注意] P での指数写像を使うことにより，P からの他の点への距離は保存することは可能であるが，P 以外の点の間の距離は，かならずしも保存されない．

結局，ここでは次のような定理を得ることができる．

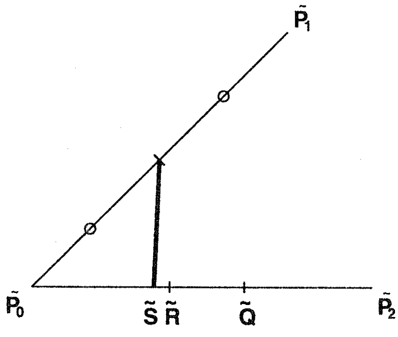
定理 2 アダマール多様体上に，点集合 $\mathcal{P}$ が与えられている．このとき，ある点集合 $\tilde{\mathcal{P}}$ が双曲型空間上に存在し，$P \in \mathcal{P}$ でのボロノイ領域のフェイス束は，双曲型空間での $\tilde{\mathcal{P}}$ に対するボロノイ図の $\tilde{P}$ のボロノイ領域の部分束となる．

---

[1]測地 2 辺形 $(p;\gamma,\tau)$ とは，頂点 p と p を始点とする最短測地線分 γ,τ からなる図形である．α で，γ,τ の p における接線のなす角を表わし，$(p;\gamma,\tau)$ の角と呼ぶ．また，τ が必ずしも最短測地線でないとき一般測地 2 辺形という．

[2]連結リーマン多様体 (R,g) が距離空間として完備であること ([7])

[3]アダマール多様体は，一般に非コンパクトなので最小の曲率は，$-\infty$ となる場合があるが，本稿では，局所的な構造に関して述べているので，与えられた点集合を含む十分大きなコンパクト集合をとることにより，最小の断面曲率をある定数で押えることができる．



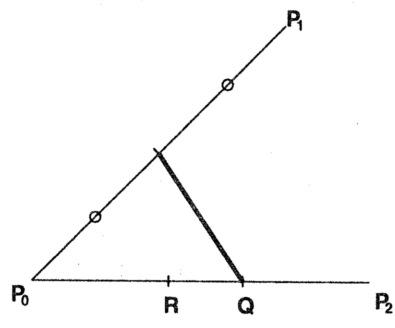


図 1: 定理 2 の証明において仮定した状況

証明: あるアダマール多様体上で, ある点 P_0 のボロノイ領域を考える. ある点 P_0 を中心として指数写像の逆写像で接空間に持ち上げ, その空間を双曲型空間とある同一視すると, 与えられた点集合の任意の点を P_0 からみた方向と (アダマール多様体での) 距離を保存し, 実現することができる. この実現された双曲型空間での点集合を $\tilde{\mathcal{P}}$ とし, $\tilde{\mathcal{P}}$ による双曲型ボロノイ図により, アダマール多様体上でのボロノイ領域を評価することを考える. 記号として, アダマール多様体上の点を, アルファベットで, チルダをつけた点をアダマール多様体の点に対応する双曲型空間の点と表現する.

ここでは,「アダマール多様体でのボロノイ領域のファセットは, 双曲型空間でのファセットの部分集合となっている」ということを証明するために, 双曲型空間とアダマール多様体での P_0 と $\tilde{P}_0$ のボロノイ領域を考え, 双曲型空間の場合にはファセットが存在しないが, アダマール多様体の場合にはファセットが存在する場合 (図 1 参 照) を仮定し, 矛盾を導き出す. つまり, 双曲型空間では, P_0 と P_2 を分けるボロノイ辺は存在せず, アダマール多様体では存在することを仮定するので, P_0 と $P_1(\tilde{P}_0$ と $\tilde{P}_1)$ の両方から等距離な点集合は, 辺 P_0P_2(辺 $\tilde{P}_0\tilde{P}_2$) と双曲型空間では, $\tilde{S}$ (アダマール多様体では, Q) で交わる. ただし, $\tilde{S}$ は, 測地線分 $\tilde{P}_0\tilde{P}_2$ にあり, $\tilde{P}_0, \tilde{P}_1$ から等距離な点であり, $\tilde{P}_0\tilde{P}_2$ の双曲型空間の中点 $\tilde{R}$ よりも $\tilde{P}_0$ に近い. なぜならば, 測地線分 $\tilde{P}_0\tilde{P}_2$ 上で $\tilde{R}, \tilde{S}$ の順で並んでいるとすると, $\tilde{P}_0, \tilde{P}_1$ のファセットが存在しないという仮定に反するからである. 同様の理由で, Q は, S より P_2 に近い点で, 測地線分 P_0P_2 と交わる. ここで, 次のことに注意しておきたい. アダマール多様体上での測地線分 P_0P_2 を最短距離として, 双曲型空間上に $\tilde{P}_0\tilde{P}_2$ として実現しているので, P_0P_2 上の点と P_0 間の距離も, $\tilde{P}_0\tilde{P}_2$ 上に同様に実現されている. つまり, $P \in [P_0, P_2]$ に対して, $d_H(P_0, P) = d_P(\tilde{P}_0, \tilde{P})$ となると言うことであり, 特に, $R, \tilde{R}$ や $Q, \tilde{Q}$ に対して, $d_H(P_0, R) = d_P(\tilde{P}_0, \tilde{R})$, $d_H(P_0, Q) = d_P(\tilde{P}_0, \tilde{Q})$ が成立することになる. ただし, $d_H(,), d_P(,)$ をそれぞれアダマール多様体上での距離, 双曲型空間での距離とする.

まず, 三角形 P_0P_1Q に着目をする. この三角形に対して, 比較定理を適用することにより, 次の関係式を得ることができる.

$$d_P(\tilde{P}_1, \tilde{Q}) \geq d_H(P_1, Q) \tag{2.1}$$

さらに, Q がアダマールでの P_0P_2 の中点であることを利用し,

$$d_P(\tilde{P}_1, \tilde{Q}) \geq d_H(P_1, Q) = d_H(P_0, Q) = d_P(\tilde{P}_0, \tilde{Q})$$

という関係式を得ることができる. よって,

$$d_P(\tilde{P}_1, \tilde{Q}) \geq d_P(\tilde{P}_0, \tilde{Q})$$

つまり, $\tilde{Q}$ は, 2 点 $\{P_0, P_1\}$ の双曲空間でのボロノイ図を考えた場合に,

$$\tilde{Q} \in \mathrm{Vor}\{P_0\}$$

となることを示している. しかし, 仮定から測地線 P_0P_2 上に, $\tilde{R}, \tilde{Q}$ の順で並んでおり $\tilde{R}$ が P_0, P_1 の (双曲空間において) 中点である. これにより, $\tilde{R}$ よりも P_2 側の測地線上の点は, P_1 のボロノイ領域に含まれなければならない. よって, 矛盾. □

この定理を用いることにより, 至るところで非正曲率を持つ曲面 S におけるボロノイ図は, 2 次元双曲型ボロノイ図を使うことにより, 近似計算が可能となる. つまり, S を双曲型空間とみなして, 計算をすればアダマール多様体の近似となる. すなわち, 双曲型ボロノイ図の双対を考えることにより, ある程度よい性質を持った非正曲率の曲面の三角形分割の一部が得られる. これを利用して, 与えられた任意の曲面の三角形分割を構成に, 利用が可能であると考えられる.

[注意] 定理 2 を用い, アダマール多様体上のボロノイ図のフェイス数の総和を評価することは出来るが, 自明な上限しか出てこない. なぜなら, 先の定理で得られているファセット数の上限は, 双曲型空間に持ち上げたある点集合に対するボロノイ図のボロノイ領域のファセット数で評価されており, この点集合は, アダマール多様体のそれぞれの点での持ち上げの写像に依存する. つまり, ここで用いているファセット数の評価は, 各ボロノイ領域でしか適応出来ず, その和は双曲型ボロノイ図のフェイス数の総和に対する評価[4]よりも大まかな評価を行うことになるためである.

3 単連結完備多様体

本章では, 単連結完備な多様体上でのボロノイ図に関して言及する. まず, ここでは, 定理 1 を適用するために, 点集合に次の制限を加える.

(条件) 点集合の任意の 2 点間の距離が $\pi/\sqrt{\Delta}$ 以下である. ただし, $\Delta(>0)$ は, 空間の断面曲率の上限とする.

この条件を満たす点集合に対しては, 最小の曲率を δ とすれば, アダマール多様体の場合とほぼ同様に定理 1 を適応することができ次の定理を得ることが出来る.

定理 3 アダマール多様体上に, 条件を満たす点集合 $\mathcal{P}$ が与えられている. このとき, ある点集合 $\tilde{\mathcal{P}}$ がユークリッド空間上に存在し, $P \in \mathcal{P}$ でのボロノイ領域のフェイス束は, ユークリッド空間での $\tilde{\mathcal{P}}$ に対するボロノイ図の $\tilde{P}$ のボロノイ領域の部分束となる.

証明概要: アダマール多様体の場合と同様に, 定理 1 を適用する. δ が正曲率の場合は, 比較のための定曲率空間として, ユークリッド空間を利用し, 写像として, 指数写像を用いれば, 定理の適応条件を満たし, アマダール多様体の場合と同様の議論をすれば良い. また, δ が負の場合は, アダマール多様体と場合となる. さらに, 双曲型空間でのボロノイ図のファセット数は, ユークリッド空間でのボロノイ図で評価できるので, この定理が証明できる. □

この定理が得られることにより, 単連結完備多様体に対しても, ユークリッド空間でのボロノイ図により, 近似が可能であることが示された. また, その双対構造を利用し, ある曲面の連結集合を三角形分割することができると考えられる.

さて, アダマール多様体では, 任意の点集合について定理 2 を得ることが出来た. しかし, 正曲率を持つ単連結完備多様体の場合は, 点集合に制限をつけなければならない. ここでは, その制限を緩めることを考える.

[4] 双曲型ボロノイ図のフェイス数の総和の評価が自明な上界よりも, 小さくなるのは, ボロノイ図全体としての評価を行うことが出来るためである.

まず, 定理 3 の証明の中で, 比較定理を適応する部分を考えると, 式 (2.1) だけである. つまり, この部分以外では, 先の条件は必要がないことがわかる. そこで, まず次のように条件を緩める事ができる.

(条件) 与えられた点集合の中で, ボロノイ領域が隣接する任意の 2 点間の距離が $\pi/\sqrt{\Delta}$ 以下である. ただし, Δ は, 空間の断面曲率の上限とする.

条件を緩めることにより, 任意の点集合が与えられた場合に, 2 点間の距離が $\pi/\sqrt{\Delta}$ を超える場合には, 多様体上に点をとることにより, 条件を満たす点集合を生成することが可能であることができることがわかる.

4 まとめ

本稿では, トポノゴフの比較定理 (定理 1) を用いて, 単連結完備なリーマン多様体に対して, それぞれのボロノイ領域の構造に関する定理を述べた. このボロノイ領域は, ある点 P をユークリッド空間にある対応で実現し, $\tilde{P}$ の (ユークリッド空間での) ボロノイ領域を計算することにより得られる $\tilde{P}$ の隣接点の集合を $\mathcal{Q}$ とし, 多様体での隣接点の集合を $\mathcal{R}$ とすると,

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{Q}$$

という関係があることを示した.

この関係を用いることにより, 既知のボロノイ図 (ユークリッド, 双曲型) を適用することにより, 近似としてではあるが, 元の多様体でのボロノイ図, もしくは, その双対構造を推測できる. 特に, このボロノイ図の双対構造は, 与えられた点集合の近接関係を与えており, この構造を含む三角形分割がメッシュとして良い幾何構造であることが予想される. しかしながら, 本稿に対する実装や実験的な結果は未だない. 今後, この理論を基礎としたメッシュ生成法の理論と実装を行ないたい.

参考文献

[1] J. D. Boissonat, A. Cérézo, O. Devillers, M. Teillaud : Output-Sensitive Construction of the Delaunay Triangulation of Point Lying in Two Planes. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, Vol. 6, No. 1, 1996, pp.1-14.

[2] P. E. Ehrlich and H-C. I. Hof : Dirichlet Regions in Manifolds without Conjugate Points. *Comment. Math. Helvetici.*, Vol. 54, 1979, pp.642-658.

[3] S. Kobayashi and K. Nomizu : *Foundations of Differential Geometry I & II.* Interscience Publishers, 1969.

[4] M. Mazón and T. Recio : Voronoi Diagrams on Orbifolds. *Computational Geometry : Theory and Applications*, Vol. 8, No. 5, 1997, pp.219-230.

[5] A. Okabe, B. Boots, K.Sugihara : *Spatial Tessellations Concepts and Applications of Voronoi Diagrams.* John Weily, New York, 1992.

[6] K. Onishi : Riemannian Computational Geometry — The Convex Hull and Voronoi Diagram in Hyperbolic Space —. *Submitted*, 1998.

[7] 酒井 隆 : リーマン幾何学, 裳華房, 東京, 1992.