

MAX2SAT の解答付き例題生成アルゴリズムの提案

山本 真基

東京工業大学情報理工学研究科数理計算科学専攻

E-mail: masaki-y@is.titech.ac.jp

概要: MAX2SAT のための例題生成アルゴリズムを提案する。このアルゴリズムは、例題を生成するとともにその最適解も出力する。最適解を定めるために expander グラフの性質を用いた。

キーワード: MAX2SAT, NP 型最適化問題, 解答付き例題生成, expander グラフ, enlarger グラフ, exact enlarger.

An algorithm for generating instances for MAX2SAT with optimal solutions

Masaki Yamamoto

Dept. of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology

E-mail: masaki-y@is.titech.ac.jp

Abstract: An algorithm for generating instances for MAX2SAT is proposed. The algorithm generates instances with optimal solutions. It uses properties of expander graph to set optimal solutions.

Key words: MAX2SAT, NP optimization problem, test instance generation, expander graph, enlarger graph, exact enlarger.

1 はじめに

本論文では、MAX2SAT のための例題生成アルゴリズムを提案する。このアルゴリズムは、例題を生成するとともにその最適解も出力する。NP 型最適化問題 MAX2SAT を、二つのリテラルの和積標準形 (2CNF) 論理式が与えられたとき、最大いくつの節を充足させることができるかという問題とする。ここでは、リテラルを変数またはその否定、節をリテラルの和で表された式とする。この問題は NP 困難であり、そのた

めの近似アルゴリズムが提案されている [1], [2].

アルゴリズムの性能の評価として、理論的に解析する方法と、実際に例題を与えて計算機上で動作させ、その振る舞いを調べる方法とがある。後者の場合に必要となる例題を生成するアルゴリズムを、例題生成アルゴリズムという。ここでは、MAX2SAT に対して、例題 (2CNF 論理式) をその最適解とともに生成する解答付き例題生成アルゴリズムを提案する。生成される例題の集合 I として、以下のような性質のものを目標としている。

1. 生成された例題を解くにあたり、その例題生成のアルゴリズムに応じた前処理を施したとしても、簡単に最適解を求められない。
2. 最適解における充足不可能な節の集合（穴という）を大きくする。

例えば生成される例題が、

$$I_{sat} = \{f \mid f \text{ は完全充足解をもつ}\}$$

の部分集合であるような例題生成アルゴリズムを考えてみる。(完全充足解をすべての節を充足させるような割り当てとする。) もし、例題が完全充足解をもつことが分かっていたら、まず 2SAT を解くアルゴリズムを前処理として動作させれば、簡単にその最適解(完全充足解)を求められる。(2SAT を解く多項式時間アルゴリズムは存在する。) ここでは、そのようには簡単に解けない例題を生成する。しかし以下の命題が示すように、MAX2SAT のすべての例題を解答付きで生成する多項式時間アルゴリズムをつくることはほぼ不可能である。

命題 1.1 NP \neq co-NP であるならば、どのような多項式時間アルゴリズムで例題を生成したとしても、解答付きで生成される例題の集合 I について、

$$I \not\subseteq \text{MAX2SAT の解答付き例題全体}$$

となる。

MAX2SAT のための例題生成の方法として、単一解をもつような 2CNF を生成し、その解では充足不可能な節を付け加える方法が考えられる。しかし、それでは複数の穴を保証するのが難しい。ここでは、expander グラフを用いることにより、全節数に対してある一定の割合の穴をもつ例題を生成する方法を提案する。

2 準備

最適化問題 MAX2SAT とそのための例題生成アルゴリズムを定義する。2CNF 論理式 f に対して、最も多くの節を充足させる割り当てを、最大充足解という。

定義 2.1 最適化問題 MAX2SAT を以下のよ
うな入出力の問題とする。

入力: 2CNF 論理式 f 。

出力: f の最大充足解。

定義 2.2 MAX2SAT の解答付き例題生成アルゴリズムを以下の入出力とする。

入力: n (変数の個数)。

出力: f (例題), s (f の最大充足解)。

δ -expander グラフ ($\delta > 0$) を定義する。ただし、グラフは多重辺を許すものとする。

定義 2.3 無向二部グラフ $G = (X, Y, E)$ が以下を満たすとき、 G を δ -expander という。

$$\forall S \subseteq X$$

$$\left[|S \times Y \cap E| \geq \left(1 + \delta \left(1 - \frac{|S|}{|X|} \right) \right) |S| \right]$$

δ -expander について、次のことがいえる [3]。

命題 2.4 任意の個数の頂点集合 V に対して、辺の数が $c|V|$ 以下の δ -expander が存在する。(ただし c, δ は適当な定数。)

ここでは、そのように辺の数が頂点数の定数倍に制限された δ -expander を用いる。(これにより、生成される例題の節の数は変数の数の定数倍になる。) 上の命題は確率的論法により示されるが、expander グラフを構成的につくるアルゴリズムも与えられている [4], [5], [6]。最初に 5-regular δ -expander を構成的につくるアルゴリズムが Margulis により与えられた [4]。しかし、それには δ の値がいくつであるのかが明示されていない。Gabber と Galil がそれを改良し、 δ の値が示された 7-regular δ -expander を構成的につくるアルゴリズムを与え、以下の定理を示した [5]。

定理 2.5 Gabber and Galil の定理

頂点集合 V ($|V| = l^2, l = 1, 2, \dots$) に対して、辺の数が $5|V|$ 以下の δ -expander を構成的に生成できる。(ただし、 $\delta = (2 - \sqrt{3})/4$ 。) また、辺の数が $7|V|$ 以下の δ -expander を構成的に生成できる。(ただし、 $\delta = (2 - \sqrt{3})/2$ 。)

ここでは、Gabber と Galil のアルゴリズムを用いて構成された expander グラフを用いる。

δ -enlarger グラフを定義する。ここでもグラフには多重辺を許す。ただし、自己閉路は含まないものとする。

定義 2.6 有向グラフ $G = (V, E)$ が以下を満たすとき、 G を δ -enlarger という。

$$\forall S \subset V : |S| \leq |V|/2$$

$$\left[\begin{array}{l} |S \times (V - S) \cap E| \geq \delta |S| \\ \text{and} \\ |(V - S) \times S \cap E| \geq \delta |S| \end{array} \right]$$

ここでは、 δ -enlarger を次のようにして二つの δ -expander から構成する。

アルゴリズム

step 1 δ -expander $G_{out} = (X, Y, E_{out})$, $G_{in} = (X, Y, E_{in})$ ($X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$) を構成する。

step 2 以下のように、有向グラフ $G = (V, E)$ ($V = \{v_1, \dots, v_n\}$) を構成する。

$$E = \{(v_i, v_j) \mid i \neq j \text{ and } ((x_i, y_j) \in E_{out} \text{ or } (y_j, x_i) \in E_{in})\}$$

以上のアルゴリズムで構成される $G = (V, E)$ について次のことがいえる。

命題 2.7 $G = (V, E)$ ($|V| = n$) の任意の頂点集合 $S \subseteq V$ に対して、

$$|S \times (V - S) \cap E| \geq 2\delta \left(|S| - \frac{|S|^2}{n} \right) \text{ かつ}$$

$$|(V - S) \times S \cap E| \geq 2\delta \left(|S| - \frac{|S|^2}{n} \right)$$

である。

証明. $G_{out} = (X, Y, E_{out})$ が δ -expander であることから、

$$|S \times (V - S) \cap E_{out}| \geq \delta \left(1 - \frac{|S|}{n} \right) |S|$$

である。また、 $G_{in} = (X, Y, E_{in})$ が δ -expander であることから、

$$|S \times (V - S) \cap E_{in}| \geq \delta \left(1 - \frac{|V - S|}{n} \right) |V - S|$$

である。よって、

$$\begin{aligned} & |S \times (V - S) \cap E| \\ & \geq \delta \left(1 - \frac{|S|}{n} \right) |S| \\ & \quad + \delta \left(1 - \frac{|V - S|}{n} \right) |V - S| \\ & = \delta \left(|S| - \frac{|S|}{n} + n - |S| - \frac{(n - |S|)^2}{n} \right) \\ & = 2\delta \left(|S| - \frac{|S|^2}{n} \right) \end{aligned}$$

である。 $(V - S) \times S \cap E$ についても同様に示される。 ■

系 2.8 $G = (V, E)$ は δ -enlarger である。

証明. $0 \leq |S| \leq n/2$ では、

$$2\delta \left(|S| - \frac{|S|^2}{n} \right) \geq \delta |S|$$

である。 ■

一般に δ -enlarger $G = (V, E)$ ($|V| = n$) は、 V の任意の二等分割 S, T ($|S| = |T|$, $S \cup T = V$, $S \cap T = \phi$) に対して、

$$|S \times T \cap E| \geq \lceil \delta n / 2 \rceil$$

$$|T \times S \cap E| \geq \lceil \delta n / 2 \rceil$$

である。その中でも S, T 間の辺数が双方向ともちょうど $\lceil \delta n / 2 \rceil$ となる二等分割 U, W をもつグラフ G 、頂点集合 U, W について、exact δ -enlarger を定義する。

定義 2.9 δ -enlarger $G = (V, E)$ ($|V| = n$) が以下を満たすとき、 (G, U, W) を exact δ -enlarger という。

$$|U| = |W|, U \cup W = V, U \cap W = \phi$$

$$|U \times W \cap E| = \lceil \delta n / 2 \rceil$$

$$|W \times U \cap E| = \lceil \delta n / 2 \rceil$$

ここでは特に、exact $\frac{1}{2}$ -enlarger を用いる。

あるグラフが δ -enlarger であるかどうかという問題は co-NP complete である。したがって与えられた δ -enlarger に対して、定義 2.9 を

満たすように、 V を U, W に分けることは多項式時間では難しい。よって、あらかじめ与えられた U, W から exact δ -enlarger を構成していくことを考える。

ここでは、exact $\frac{1}{2}$ -enlarger を次のようにして二つの δ -enlarger から構成する。(図 1 参照.)

アルゴリズム

step 1 δ -enlarger $L = (U, E_l), R = (W, E_r)$ ($U = \{u_1, \dots, u_{n/2}\}, W = \{w_1, \dots, w_{n/2}\}$) を構成する。

step 2 以下のように $G = (V, E)$ ($|V| = n$) を構成する。

$$V = U \cup W, \quad E = E_l \cup E_r \cup F \cup B$$

$$F = \{(u_i, w_i) \mid i \leq n/4\}$$

$$B = \{(w_i, u_i) \mid i > n/4\}$$

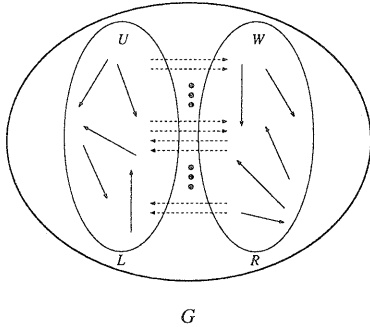


図 1: exact $\frac{1}{2}$ -enlarger

以上のアルゴリズムで構成される $G = (V, E)$ について次のことがいえる。

命題 2.10 $L = (U, E_l), R = (W, E_r)$ が δ -enlarger ($\delta \geq 2/3$) ならば、 $G = (V, E)$ は $\frac{1}{2}$ -enlarger である。

証明. 以下では $|V| = n$ とし、 $S = S_u \cup S_w, S_u \subseteq U, S_w \subseteq W$ とする。

まず、 $|S_u|, |S_w| \leq n/4$ の時、 G が $\frac{1}{2}$ -enlarger であるかを調べる。 L, R が δ -enlarger である

ことから定義より、

$$|S_u \times (U - S_u) \cap E_l| \geq \delta |S_u| \quad \text{かつ}$$

$$|S_w \times (W - S_w) \cap E_r| \geq \delta |S_w|$$

である。これより、

$$\begin{aligned} |S \times (V - S) \cap E| &\geq \delta(|S_u| + |S_w|) \\ &\geq \frac{1}{2}|S| \quad \left(\because \delta \geq \frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

である。よって、 $\delta \geq 2/3$ であれば、 G は $\frac{1}{2}$ -enlarger となる。

$(V - S) \times S \cap E$ についても enlarger グラフの対称性から同様に示される。

次に、 $|S_u| \geq n/4, |S_w| \leq n/4$ の時、 G が $\frac{1}{2}$ -enlarger であるかを調べる。 $(|S_u| \leq n/4, |S_w| \geq n/4$ の時も同様に示される。) L, R が δ -enlarger であることから命題 2.7 より、

$$|S_u \times (U - S_u) \cap E_l| \geq 2\delta \left(|S_u| - \frac{|S_u|^2}{n/2} \right) \quad \text{かつ}$$

$$|S_w \times (W - S_w) \cap E_r| \geq 2\delta \left(|S_w| - \frac{|S_w|^2}{n/2} \right)$$

である。これより、

$$\begin{aligned} |S \times (V - S) \cap (E_l \cup E_r)| \\ \geq 2\delta \left(|S_u| + |S_w| - \frac{|S_u|^2}{n/2} - \frac{|S_w|^2}{n/2} \right) \quad (1) \end{aligned}$$

である。 G が $\frac{1}{2}$ -enlarger であるかを調べるためには、 S_u, S_w が以下のような時を調べれば十分である。

$$S_u = S'_u \cup \{u_i \mid i > n/4\}$$

$$S'_u \subseteq \{u_i \mid i \leq n/4\}$$

$$S_w = S'_w \subseteq \{w_i \mid i \leq n/4\}$$

これを二つの場合に分けて示す。ただし、以下では S'_u, S'_w の頂点数をそれぞれ、

$$|S'_u| = \frac{x}{4}n, \quad |S'_w| = \frac{y}{4}n$$

とする。

case 1. $S'_w \subseteq S'_u$ (図 2 参照.)

$S'_w \subseteq S'_u, |S| \leq n/2$ より、

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \min\{x, 1 - x\} \quad (2)$$

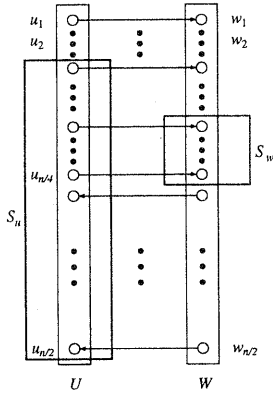


図 2: case 1

である。 $S'_w \subseteq S'_u$ より、

$$|S \times (V - S) \cap F| \geq \frac{x-y}{4}n$$

である。これと (1) から、

$$\begin{aligned} & |S \times (V - S) \cap E| \\ & \geq 2\delta \left(|S_u| + |S_w| - \frac{|S_u|^2}{n/2} - \frac{|S_w|^2}{n/2} \right) \\ & \quad + \frac{x-y}{4}n \\ & = \frac{n}{4} (\delta(1-x^2-y^2+2y) + x-y) \end{aligned}$$

である。 G が $\frac{1}{2}$ -enlarger であるためには、

$$\begin{aligned} & \frac{n}{4} (\delta(1-x^2-y^2+2y) + x-y) \\ & \geq \frac{1}{2}|S| = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{4} + \frac{n}{4}x + \frac{n}{4}y \right) \quad (3) \end{aligned}$$

を満たすような定数 δ が $1/2 \leq \delta < 1$ の範囲で存在すればよい。式 (3) は以下と同値である。

$$\begin{aligned} & \delta \left(x - \frac{1}{4\delta} \right)^2 + \delta \left(y - \frac{4\delta-3}{4\delta} \right)^2 \\ & \leq 2\delta - 2 + \frac{5}{8\delta} \quad (4) \end{aligned}$$

これは、 $x-y$ 平面上での円を表している。条件式 (2) より変数 x, y は、

$$y \geq 0, \quad y \leq x, \quad y \leq -x+1$$

の 3 直線で囲まれた三角形の内部の値をとる。よって、円 (4) が三角形の 3 頂点 $(x, y) = (0, 0)$,

$(1, 0)$, $(1/2, 1/2)$ を含むように、定数 δ の条件を $1/2 \leq \delta < 1$ の範囲で求めると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} (0, 0) \text{ の時} & \quad \delta \geq 1/2 \\ (1, 0) \text{ の時} & \quad \delta \geq 1/2 \\ (1/2, 1/2) \text{ の時} & \quad \delta \geq 2/3 \end{aligned}$$

よって、 $\delta \geq 2/3$ であれば、 G は $\frac{1}{2}$ -enlarger となる。

case 2. $S'_u \subseteq S'_w$ (図 3 参照.)

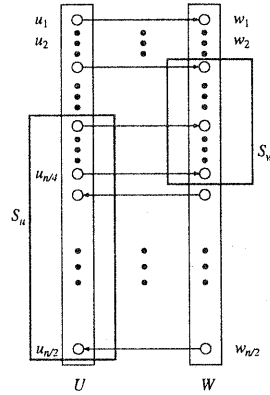


図 3: case 2

$S'_u \subseteq S'_w$, $|S| \leq n/2$ より、

$$0 \leq x \leq 1, \quad x \leq y \leq 1-x \quad (5)$$

である。 $S'_u \subseteq S'_w$ より、

$$|S \times (V - S) \cap F| = 0$$

である。これと (1) から、

$$\begin{aligned} & |S \times (V - S) \cap E| \\ & = \frac{n}{4} \delta(1-x^2-y^2+2y) \end{aligned}$$

である。case 1 と同様に、 G が $\frac{1}{2}$ -enlarger であるためには、

$$\begin{aligned} & \frac{n}{4} \delta(1-x^2-y^2+2y) \\ & \geq \frac{1}{2}|S| = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{4} + \frac{n}{4}x + \frac{n}{4}y \right) \\ & \Leftrightarrow -\delta x^2 - \frac{1}{2}x - \delta y^2 \\ & \quad + \left(2\delta - \frac{1}{2} \right) y + \delta - \frac{1}{2} \geq 0 \quad (6) \end{aligned}$$

を満たすような定数 δ が $1/2 \leq \delta < 1$ の範囲で存在すればよい. 条件式 (5) より変数 x, y は,

$$y \geq x, \quad y \leq -x + 1, \quad x \geq 0$$

の 3 直線で囲まれた三角形の内部の値をとる. (三角形の 3 頂点は $(0,0)$, $(0,1)$, $(1/2, 1/2)$ となる.) case 1 と同様にして δ の条件を求めると, 以下ようになる.

$$\begin{aligned} (0,0) \text{ の時} & \quad \delta \geq 1/2 \\ (0,1) \text{ の時} & \quad \delta \geq 1/2 \\ (1/2, 1/2) \text{ の時} & \quad \delta \geq 2/3 \end{aligned}$$

よって, case 1, case 2 とも $\delta \geq 2/3$ であれば, G は $\frac{1}{2}$ -enlarger となる.

$(V-S) \times S \cap E$ についても enlarger グラフの対称性から同様にして示される. ■

系 2.11 $\delta \geq 2/3$ であれば, (G, U, W) は exact $\frac{1}{2}$ -enlarger である.

δ -expander, δ -enlarger, exact $\frac{1}{2}$ -enlarger のそれぞれの構成に乱数を用いれば, 様々な種類の exact $\frac{1}{2}$ -enlarger が構成される.

3 例題生成アルゴリズム

以下が exact $\frac{1}{2}$ -enlarger を用いた例題生成アルゴリズムの概要である. (図 4 参照.)

step 1 V を任意に U, W に分ける.

$$U = \{u_1, \dots, u_{n/2}\}, \quad W = \{w_1, \dots, w_{n/2}\}$$

step 2 exact $\frac{1}{2}$ -enlarger $(G_i = (V, E_i), U, W)$ ($i = 1, \dots, 4$) を構成する.

step 3 以下のような節集合 C から成る例題 f を生成する.

$$C = \{(\overline{g_k(a)} \vee g_k(b)) \mid (a, b) \in E_k, 1 \leq k \leq 4\}$$

$g_k(v)$	$v = u_i$	$v = w_i$
$g_1(v)$	x_i	$x_{i+n/2}$
$g_2(v)$	x_i	$\overline{x_{i+n/2}}$
$g_3(v)$	$\overline{x_i}$	$x_{i+n/2}$
$g_4(v)$	$\overline{x_i}$	$\overline{x_{i+n/2}}$

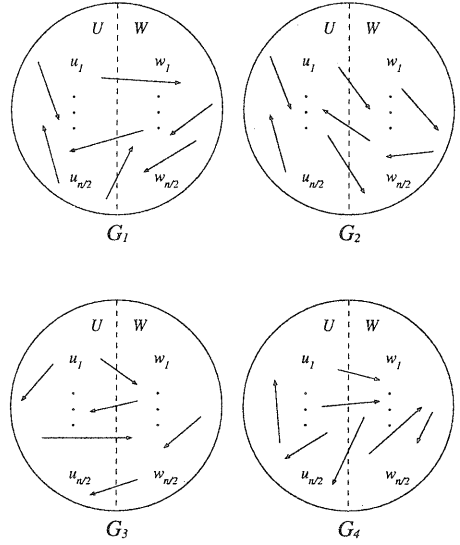


図 4: 例題生成のためのグラフ

以上のアルゴリズムで生成される例題 f の最適値 $OPT(f)$, 最適解 T_{opt} について次のことがいえる.

命題 3.1 例題 f の節数を m とすると,

$$OPT(f) = m - \frac{n}{2}$$

である. (穴の大きさが $n/2$.) また, f の最適解 T_{opt} には以下の 4 通りが考えられる.

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{\text{all-true}} : x_1 = \text{true}, \dots, x_n = \text{true} \\ T_{\text{all-false}} : x_1 = \text{false}, \dots, x_n = \text{false} \\ T_{\text{true-false}} : x_1 = \text{true}, \dots, x_{n/2} = \text{true}, \\ \quad \quad \quad x_{n/2+1} = \text{false}, \dots, x_n = \text{false} \\ T_{\text{false-true}} : x_1 = \text{false}, \dots, x_{n/2} = \text{false}, \\ \quad \quad \quad x_{n/2+1} = \text{true}, \dots, x_n = \text{true} \end{array} \right.$$

証明. 変数 x_1, \dots, x_n に対する任意の割り当てを T とする. T により, 以下のように割り当てられているとする.

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \{u_i \mid T(x_i) = \text{true}\} \\ B = \{w_i \mid T(x_{i+n/2}) = \text{true}\} \\ C = \{u_i \mid T(x_i) = \text{false}\} \\ D = \{w_i \mid T(x_{i+n/2}) = \text{false}\} \end{array} \right. \quad |A| = a, |B| = b, |C| = c, |D| = d$$

グラフ G_1, \dots, G_4 が $\frac{1}{2}$ -enlarger であることから, また辺 (u, v) に対応した節 $(\bar{u} \vee v)$ が $u = \text{true}, v = \text{false}$ の時またその時にかぎり充足されないことから, 割り当て T により充足されない節集合 C_T の要素数は,

$$\begin{aligned} |C_T| &\geq \frac{1}{2} \min\{a+b, c+d\} \quad (G_1 \text{より}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \min\{a+d, b+c\} \quad (G_2 \text{より}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \min\{a+d, b+c\} \quad (G_3 \text{より}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \min\{a+b, c+d\} \quad (G_4 \text{より}) \\ &= \min\{a+b, c+d\} \\ &\quad + \min\{a+d, b+c\} \\ &= \min\{2a+b+d, 2d+a+c, \\ &\quad \quad 2b+a+c, 2c+b+d\} \\ &\geq \min\left\{2a + \frac{n}{2}, 2d + \frac{n}{2}, \right. \\ &\quad \left. 2b + \frac{n}{2}, 2c + \frac{n}{2}\right\} \\ &\quad \left(\because a+c = b+d = \frac{n}{2}\right) \\ &\geq \frac{n}{2} \end{aligned}$$

である。これより,

$$OPT(f) = m - |C_T| \leq m - \frac{n}{2}$$

である。また, 以下の 4 通りの割り当てによる充足節数はいずれも $m - n/2$ である。

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{\text{all-true}} : x_1 = \text{true}, \dots, x_n = \text{true} \\ T_{\text{all-false}} : x_1 = \text{false}, \dots, x_n = \text{false} \\ T_{\text{true-false}} : x_1 = \text{true}, \dots, x_{n/2} = \text{true}, \\ \quad \quad \quad x_{n/2+1} = \text{false}, \dots, x_n = \text{false} \\ T_{\text{false-true}} : x_1 = \text{false}, \dots, x_{n/2} = \text{false}, \\ \quad \quad \quad x_{n/2+1} = \text{true}, \dots, x_n = \text{true} \end{array} \right.$$

よって, f に対する最適値は $m - n/2$ であり, その最適解には以上の 4 通りの割り当てがある。

変数の個数を n として, このアルゴリズムにより生成される例題 f の節数 m とその最適値 $OPT(f)$ について以下のことがいえる。

命題 3.2 例題 f の節数 m , 最適値 $OPT(f)$ は, それぞれ変数の個数 n , 節数 m に対して,

$$m = \frac{2}{3} (112(2 + \sqrt{3}) + 3) n$$

$$OPT(f) \approx 0.998218m$$

である。

説明. 頂点数 $|V|/2$ の δ -expander を構成するのに $c|V|$ の辺数が必要であるとする。これら二つの δ -expander を用いて頂点数 $|V|/2$ の δ -enlarger を構成するのに $2c|V|$ の辺数が必要である。さらにこれら二つの δ -enlarger を用いて頂点数 $|V|$ の exact $\frac{1}{2}$ -enlarger を構成するのに $(4c|V| + |V|/2)$ の辺数が必要である。このアルゴリズムではこの exact $\frac{1}{2}$ -enlarger が 4 個構成されるため, 生成される例題の節数は,

$$4(4c|V| + |V|/2) = 2(8c + 1)n$$

である。(ただし, $|V| = n$.)

Gabber and Galil の定理より, δ -expander ($\delta = (2 - \sqrt{3})/2$) を構成するためには, $|V|$ 個の頂点に対して $7|V|$ の辺数が必要である。このアルゴリズムに用いられる $\frac{2}{3}$ -expander を構成するためには $|V|/2$ 個の頂点に対して,

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{2 - \sqrt{3}} \cdot 7 \cdot \frac{|V|}{2} = \frac{14}{3} (2 + \sqrt{3}) |V|$$

の辺数が必要になる。($c = 14(2 + \sqrt{3})/3$.) よって, このアルゴリズムにより生成される例題の節数 m は, 変数の個数 n に対して,

$$m = \frac{2}{3} (112(2 + \sqrt{3}) + 3) n$$

である。また最適値は, 命題 3.1 より,

$$OPT(f) = \frac{(448(2 + \sqrt{3}) + 9)}{6} \cdot n$$

である。また最適値は節数 m に対して,

$$\begin{aligned} OPT(f) &= \frac{(112(2 + \sqrt{3}) + 9/4) n}{(112(2 + \sqrt{3}) + 3) n} \cdot m \\ &\approx 0.998218m \end{aligned}$$

である。

4 より難しい例題の生成

前章のアルゴリズムを改良し, より難しい例題を生成するアルゴリズムを示す。前章のアル

ゴリズムで用いた 4 つの exact $\frac{1}{2}$ -enlarger からは、以下のような節が生成されない。

1. $(x_i \vee x_j), (\bar{x}_i \vee \bar{x}_j) : i, j \leq \frac{n}{2}$
2. $(x_i \vee x_j), (\bar{x}_i \vee \bar{x}_j) : i, j > \frac{n}{2}$

これらの節も生成できるように、更にあと 2 つの exact $\frac{1}{2}$ -enlarger $(G_5, U, W), (G_6, U, W)$ を構成する。それらから以下のような節集合 C' を生成し、 (G_i, U, W) ($i = 1, \dots, 4$) から生成された節集合 C に加える。 $(C \leftarrow C \cup C')$ 。

$$C' = \{(\overline{g_k(a)} \vee g_k(b)) \mid (a, b) \in E_k, k = 5 \text{ or } 6\}$$

$g_k(v)$	$v = u_i$	$v = w_i$
$g_5(v)$	x_i	\bar{x}_i
$g_6(v)$	$x_{i+n/2}$	$\bar{x}_{i+n/2}$

こうすることにより、あらゆる種類の節が生成されることになる。この新たな節集合 C から成る例題 f の最適値 $OPT(f)$, 最適解 T_{opt} について、次のことがいえる。

命題 4.1 例題 f の節の数を m とすると、

$$OPT(f) = m - n$$

である。(穴の大きさが n 。) また、 f の最適解 T_{opt} については、命題 3.1 と同じである。

証明. 命題 3.1 の証明と同じように、任意の割り当て T により充足されない節集合 C_T の要素数は、

$$\begin{aligned} |C_T| &\geq \frac{n}{2} + \frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}(b+d) \\ &= n \end{aligned}$$

である。これより、

$$OPT(f) = m - |C_T| \leq m - n$$

最適解についても、同様に示される。 ■

新たなアルゴリズムにより生成される例題の節数とその最適値について、次のことがいえる。

命題 4.2 例題 f の節数 m , 最適値 $OPT(f)$ は、それぞれ変数の個数 n , 節数 m に対して、

$$\begin{aligned} m &= (112(2 + \sqrt{3}) + 3)n \\ OPT(f) &\approx 0.997625m \end{aligned}$$

である。

説明. 命題 3.2 と同様に示される。(ここでは、6 個の exact δ -enlarger を構成する。)

5 おわりに

MAX2SAT のための例題生成アルゴリズムを提案した。 $\frac{2}{3}$ -expander, $\frac{2}{3}$ -enlarger を用いて exact $\frac{1}{2}$ -enlarger を構成し、それを用いることにより最適解, 最適値の分かる例題を生成した。今後は、このアルゴリズムで生成される例題がどのくらい難しいのかを解析し、また最適値の節数に対する比 0.997625 をより小さくできないか (穴のより大きな例題を生成できないか) を考察する。

参考文献

- [1] Michel X. Goemans and David P. Williamson, .878-approximation algorithm for MAXCUT and MAX2SAT, *Proc. 26th STOC*, pp.422–431(1994).
- [2] M. Yannakakis, On the approximation of maximum satisfiability, *J. Algorithm* 17, pp.475–502(1994).
- [3] C. H. Papadimitriou, *Computational Complexity*, Addison-Wesley, 1994.
- [4] G. A. Margulis, Explicit construction of concentrators, *Problem Inf. Trans.* 9, pp.325–332(1973).
- [5] O. Gabber and Z. Galil, Explicit construction of linear sized superconcentrators, *JCSS*. 22, pp.407–420(1981).
- [6] M. Ajtai, Recursive construction for 3-regular expanders, *Combinatorica* 14, pp.379–416(1994).