多始点1品種1パス多品種流における最小費用流問題の近似アルゴリズム

浅野泰仁
東京大学大学院理学系研究科情報科学専攻
〒113-0033 文京区本郷 7-3-1
asano@is.s.u-tokyo.ac.jp

概要

本論文では多始点 (multi-source)1 品種 1 パス多品種流 (unsplittable flow) における最小費用流問題を考え，その近似アルゴリズムを提案する．1 品種 1 パス多品種流は高バンド幅ネットワークの接続要求問題や VLSI 配線問題の基礎的なモデルになりうるため，辺素パス問題および多品種流問題の拡張として近年研究されている．一方，最小費用流問題は古典的ネットワークフロー問題の基礎であるにもかかわらず，1 品種 1 パス多品種流の最小費用流問題はほとんど研究されていない．本論文では，多始点 1 品種 1 パス多品種流における最小費用流問題の近似アルゴリズムを提案する．手法としては，Kolliopoulos, Stein が 1997 年および 1999 年に提案した 1 始点問題の近似アルゴリズムを多始点の場合に拡張している．とくに，1999 年の過密度 3 近似のアルゴリズムを拡張して始点数が c 個のとき過密度 $c+4$，費用 4 近似を達成するアルゴリズムを構築することができた．

Approximation Algorithms for Min-cost Multi-source Unsplittable Flow Problem

ASANO Yasuhito
Department of Information Science, University of Tokyo
Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113-0033
asano@is.s.u-tokyo.ac.jp

Abstract

In this paper we propose approximation algorithms for min-cost multi-source unsplittable flow problem. The unsplittable flow problem is studied recent years as an extension of the edge disjoint paths problem and the multicommodity flow problem since unsplittable flow is considered to be a basic model of the connection request problems in the high-bandwidth network and the VLSI wiring problems. Min-cost unsplittable flow is not well studied in particular for a multi-source case, though the min-cost flow problem is fundamental in the classical network flow problems. To construct approximation algorithms for the multi-source case, we extend existing approximation algorithms proposed by Kolliopoulos and Stein in 1997 and 1999, which can deal with the min-cost single-source unsplittable flow problems. In particular, we propose a $c+4$-congestion, 4-cost approximation algorithm, where c denotes a number of sources, by developing their 3-congestion algorithm for the single-source problem.

1 はじめに

本論文は主に**多始点 1 品種 1 パス多品種流 (multi-source unsplittable flow)** を扱っている．有向または無向グラフ $G=(V,E)$ および辺の容量 $cap: E \to \mathbf{R}^+$ が与えられるものとする．また，$1 \leq i \leq k$ の各品種 (commodity)i について始点 $s_i \in V$ と終点 $t_i \in V$ の組および需要 (demand) $d_i \in \mathbf{R}^+$ が与えられている．このとき，フロー f が品種 i について s_i から t_i に 1 本のパスだけを用いて流量 d_i を流しているとき，フロー f は品種 i の需要を満たしているという．なお特に，始点がすべて共通であるような問題を 1 始点 (single-source) 1 品種 1 パス多品種流とよぶ．

このような条件の下で，各種問題が研究されている．そのうち，本論文に関係が深いものを説明する．

実行可能性： あるフロー f が与えられたとき，辺 e の品種 i の流量を $f_i(e)$ で表す．各辺 e の流量合計を $f(e)=\sum_i f_i(e)$ で表す．容量制約 $f(e) \leq cap(e)$ のもとで，すべての需要を満たすようなフローが存在するかどうか判定する．

過密度 (congestion) 最小化： 容量制約を破ることを許してすべての需要を満たすフローを考える．このとき，すべての辺の容量を α (≥ 1) 倍したときに容量制約を満たしていれば過密度 (congestion) は α であるという．過密度 α を最小化する．

最小費用流： 各辺に費用 $cost: E \to \mathbf{R}^+$ が与えられているとき，すべての需要を満たすフローの中で合計費用 $\sum_{e \in E} cost(e)f(e)$ が最小のものを求める．

Kleinberg は [3], [4] で各種問題の研究を始め，上記の問題はいずれも NP-困難であることを示した．多始点 1 品種 1 パス多品種流は，辺の容量および需要をすべて 1 にすれば，古典的 NP-困難問題の多始点辺素パス問題になる．辺素パス問題がネットワークでの接続要求問題の基礎モデルになってきたのと同様に，1 品種 1 パス多品種流は高バンド幅ネットワークでの接続要求問題の基礎モデルになりうる．実際の応用としては，VLSI 配線問題や光ネットワークの問題がある．また，1 始点の 1 品種 1 パス多品種流はマルチプロセッサ・スケジューリング問題にも応用されている ([3], [5])．別の見方をすれば，1 品種 1 パス多品種流は古典的多品種流問題 (multicommodity flow) に，各品種は 1 本のパスしか使えないという制約を付けた問題である．この制約は整数多品種流問題の制約より厳しい．整数多品種流問題の近似アルゴリズムを 1 品種 1 パス多品種流の近似アルゴリズムと関連づける研究も近年おこなわれている ([2])．

1 品種 1 パス多品種流問題の近似アルゴリズムについての過去の研究成果を以下に簡潔にまとめる．

1 始点の場合については，まず Kleinberg が基本となる定理 (3 節を参照) を示した ([3], [4])．Kleinberg は容量の最小値 ($cap_{\min}$ とする) が需要の最大値 ($d_{\max}$ とする) 以上 ($d_{\max} \leq cap_{\min}$) のネットワークを仮定し，さらに下に述べる緩和実行可能という仮定の下で，有向グラフ・無向グラフそれぞれについて過密度 16 および過密度 9 近似のアルゴリズムを提案した．なお，Kleinberg が用いたこれらの仮定は以下の 1 始点に関する研究結果および本論文に共通である．また，[4] では最小費用流問題の提案とその近似アルゴリズムを提案している．近似の評価基準は，2 節で詳しく述べるが，過密度と費用の最小化である．この近似アルゴリズムは無向グラフの場合のみだが過密度 10.473, 費用 7.473 の近似率を達成している．Kolliopoulos と Stein は [5] は Kleinberg の定理を洗練された形で用いることで，過密度 4, 費用 2 近似のアルゴリズムを構築した．[5] ではさらに改良された過密度 3.23, 費用 1.68 近似のアルゴリズムの存在も示されている．いずれも，有向グラフ・無向グラフを問わず適用できる．さらに彼らは [7] で過密度 3 近似のアルゴリズムを提案した．この論文は [5] の手法をさらに洗練させたものである．ただし，この論文では最小費用流問題については言及していない．またこの論文では，[5] および [7] のアルゴリズムの各種ネットワークデータでの実際の実験結果も示されている．その際，2 種類のヒューリスティクスを提案し，その実用性を確かめている．Dinitz らは [1] で対称サイクルという概念を用いて過密度 2 近似のアルゴリズムを提案した．現在 1 始点問題の過密度についてはこの結果が最良として知られている．

多始点の場合についても，Kleinberg が研究を始め，一般のグラフの場合には [8] の線形計画緩和と randomized rounding を組み合わせた方法で過密度 $O(\log|E|)$ 近似を達成できることを示した．また 2 次元メッシュを拡張した densely embedded グラフと呼ばれるグラフについては，定数近似のアルゴリズムを提案している．Kolliopoulos, Stein は [6] で 1 品種 1 パス多品種流に適用できるパッキング整数計画の近似アルゴリズムを示した．彼らが用いた近似の評価基準は最大化で，過密度との関係にもわずかだが触れている．Guruswani

らは, [2] で多始点の場合の1品種1パス多品種流, 整数多品種流, 辺素パス問題の有向グラフにおける最大化問題の近似性能の上限を示した. さらに, 貪欲アルゴリズムの手法を用いて, この上限に近い近似率を達成するアルゴリズムを提案している. ただし, 過密度および最小費用流問題については扱っていない. 以上, 多始点の場合は過密度に関する研究は非常に少なく, 最小費用流問題について扱っている論文は見つけることができなかった.

本論文では, 多始点の場合の1品種1パス多品種流における最小費用流問題の近似アルゴリズムを提案する. 用いた近似の評価基準は [4], [5] と同様, 過密度・費用の最小化である. 2節で詳しく述べるが, 最小費用流問題がすべての需要を満たすフローを前提としている以上, 過密度を採用することは妥当だと考えられるからである. なお, [3], [5], [1], [7] と同様に, 本論文では仮定として与えられた問題は**緩和実行可能 (fractional feasible)** であるとする. すなわち, 1つの品種が複数のパスを使用することを許したときに需要をすべて満たすようなフローが存在することを前提としている. これは実行可能性判定問題を線形計画問題に対応する図1の制約に緩和したとき, 制約を満たす解 f が存在することと同値である.

- 各品種 i について, s_i,t_i を除く点では

$$\sum_{e=(v,w)\in E} f_i(e) - \sum_{e'=(w,v)\in E} f_i(e') = 0$$

s_i, t_i では, 同じ記号 e, e' を用いてそれぞれ

$$\sum_e f_i(e) - \sum_{e'} f_i(e') = -d_i$$
$$\sum_e f_i(e) - \sum_{e'} f_i(e') = d_i$$

- 容量制約：すべての辺 e について,

$$0 \le \sum_{1\le i\le k} f_i(e) = f(e) \le u(e)$$

- すべての品種 i, e について $f_i(e) \ge 0$

図 1: 緩和された線形計画問題

一般に, 1品種1パス多品種流問題を緩和して得られた線形計画問題の解を**緩和解**と呼ぶことにする. 与えられた問題が緩和実行可能なら, 内点法などを用いて緩和解を多項式時間で求めることができる. なお, 緩和解に対して, 1品種1パスという制約のもとでの解を**1品種1パスの解**と呼ぶことにする. 緩和実行可能でない場合は, 1品種1パスの解も存在しないので, この仮定は妥当であるといえる.

近似アルゴリズム構築においては, 1始点1品種1パス多品種流の既存のアルゴリズム [5],[7] を多始点の場合に拡張するという手法を用いた. このアルゴリズムは始点数を c としたときに, c が品種数 k に比べて小さいときに性能が良いと考えられる. [5] の拡張は非常に単純であるが, [7] はその中心となっている操作の前提条件が多始点の場合は成り立たないので, 過密度をできるだけ小さく保ちながらフロー・容量の値を増やして条件を成立させ, 多始点の場合にも適用できるようにした. さらに, [7] では費用に関する考察がなかったが, これを解析した上で多始点の場合に拡張することができた. 結果として得ることができた近似率は, [5] の拡張アルゴリズム1は過密度 $3.23c$, 費用 1.68 倍である. これは過密度については単純に1始点の場合の c 倍になっている. 同拡張アルゴリズム2は, 過密度 $2c+2$, 費用2倍である. もとの過密度4近似の c 倍に比べて, 約2倍良い. これは主として緩和解を求めてから分解しているところに起因している. [7] の拡張アルゴリズムは, 過密度 $c+4$, 費用4倍となっている. これも, もとの過密度3近似の c 倍より約3倍良い. なお, [1] の結果は最小費用流問題に適用すると費用を定数倍で抑えられなかったことを記しておく.

本論文の次節以降の構成は, 以下の通りである. 2節では, 本論文での近似の目的である最小費用流問題の近似の評価基準について述べる. 3節では, [5], [7] のアルゴリズムの基礎となっている Kleinberg の基本定理を紹介する. 4節では, [5] のアルゴリズムと性能解析の概要を述べる. 5節では, [7] のアルゴリズムと性能解析の概要を述べる. また, [7] で触れていない最小費用流問題への適用結果を解析する. 6節は本論文の主たる内容である [5], [7] のアルゴリズムを多始点問題へ拡張する方法と, その性能の解析について述べる.

2 最小費用流問題の近似について

本論文では, 多始点の場合の1品種1パス多品種流における最小費用流問題の近似アルゴリズムを提案する. そのために用いた近似の評価基準について説明する. この近似の評価基準は [4], [5] で用いられているものと同じく, 過密度と費用の最小化である.

最小費用流問題では, すべての品種の需要を満たすフローを考える必要がある. したがって, 過密度を用いることは妥当である. 過密度を用いないということ

は容量制約を満たすということであり，容量制約のもとでそのようなフローを求めること自体がNP-困難だからである．近似アルゴリズムとしては，過密度をできるだけ小さくできた方がよい．費用についても，実際の最適な1品種1パスの解を求めることは困難なので，以下の線形計画問題の緩和最適解との比較で評価する．

- **minimize** $\sum_e cost(e)f(e)$
- 制約条件は図1のものと同じ

1品種1パスの最適解の合計費用を $cost(OPT)$，緩和最適解の合計費用を $cost(frac)$，近似解の合計費用を $cost(app)$ とすると，最適解が存在するならば

$$\frac{cost(app)}{cost(OPT)} \leq \frac{cost(app)}{cost(frac)}$$

となるので，$\frac{cost(app)}{cost(frac)}$ を近似率の上限として用いることができる．以降，この値を費用の近似率として用いる．近似アルゴリズムとしては，費用もできるだけ小さくしたい．実際の近似アルゴリズムで，過密度と費用どちらの最小化を優先するのか，[4], [5] は述べていない．この論文でもその優先順位について定量的に扱うことはしていない．しかし，現実の問題では過密度の最小化を優先させることが多いのではないかと考えられる．

3 Kleinbergの基本定理

[5], [7] のアルゴリズムはいずれも Kleinberg [3] の，1始点の場合のみに成り立つ良い性質を用いている．

定理 1 [3] すべての需要が等しい値 d をもち，すべての辺の容量が d の倍数であるような *1* 始点 *1* 品種 *1* パス多品種流問題において緩和解 f が存在するならば，多項式時間で *1* 品種 *1* パスの解を求めることができる．

この定理は最小費用流問題にも適用できる．

系 1 [3] すべての需要が等しい値 d をもち，すべての辺の容量が d の倍数であるような *1* 始点 *1* 品種 *1* パス多品種流問題において緩和解 f が存在するならば，多項式時間で費用が f の費用以下の *1* 品種 *1* パスの解を求めることができる．

この定理 (および系) は，最大流最小カット定理を用いて示すことができる．証明は，[3] を参照のこと．

4 Kolliopoulos, Stein [5] のアルゴリズム

[5] は，需要の大きさで品種を分割しそれぞれを部分問題として解くことによって，定理1を効率的に適用し，1始点1品種1パス多品種流問題の過密度 4，最小費用流問題に適用すれば費用 2 近似を達成するアルゴリズムを提案した．[5] では改良を加えた過密度 3.23，費用 1.68 近似のアルゴリズムの存在も示している．この節では，[5] の過密度 4 近似のアルゴリズムと費用 2 近似を達成する最小費用流問題への適用について簡潔に説明する．まず $d_{\max} \leq cap_{\min}$ という仮定をおいたので，一般性を失わずに $\forall i,\ d_i \in (0,1]$ かつ $\forall e$, $cap(e) \in [1,\infty)$ とすることができる．以降，本論文では問題はすべてこのように正規化されて与えられるものとする．

[5] の過密度 4 近似のアルゴリズム

1. 問題を線形計画問題に緩和し，緩和解 f を求める．
2. 全品種の集合を $T = \{1,...,k\}$ とする．T を需要の大きさで分割する．分割の区間は需要の最小値 $d_{\min}$ が $1/2^r < d_{\min} \leq 1/2^{r-1}$ のとき $(1/2^r, 1/2^{r-1}], (1/2^{r-1}, 1/2^{r-2}]..., (1/2,1]$ で，分割された品種集合 T^j $(0 \leq j \leq r-1)$ を $T^j = \{i | d_i \in (1/2^{j+1}, 1/2^j]\}$ とする．
3. f を分割する．品種集合 T^j に対応する部分を f^j とする．
4. 各 j について G^j を f^j と等しい容量をもつ (G^j の容量は $cap^j(e) = f^j(e)$ とする) グラフとする．ただし，f^j で流量 0 の辺は G^j に存在しないものとする．グラフ G^j と品種集合 T^j を入力とする 1 始点 1 品種 1 パス多品種流問題を考えると，f^j はこの問題の緩和解にもなっている．こうして作られた r 個の部分問題の 1 品種 1 パスの解 g^j を求めることを考える．
5. 補題 1 に基づいて $g^j(e) \leq 2f^j(e) + 1/2^j$ を満たす g^j を求める．
6. 部分問題を解いて得られたすべてのフローを合計して g を得る．余分な需要を元に戻して，もとの問題の 1 品種 1 パスの解を得る．

補題 1 [5] 区間 $(1/2^{j+1}, 1/2^j]$ に対応する部分問題について，まずフロー f^j と G^j の容量をたかだか *2* 倍し，それから容量をたかだか $1/2^j$ 増やすことによって，*1* 品種 *1* パスの解が得られる．

証明の概要 まず, T^j に含まれる需要をすべて $1/2^j$ に統一する. 区間の定義より, 各需要をたかだか 2 倍すればよい. フロー f^j および G^j の容量をたかだか 2 倍にすれば, 需要がすべて $1/2^j$ である問題とその緩和解が得られる. つぎに容量をすべて $1/2^j$ の倍数にする. これには各辺の容量にたかだか $1/2^j$ を加えればよい. これで, 需要がすべて $1/2^j$ で容量がすべて $1/2^j$ の倍数である問題とその緩和解が得られた. 定理 1 より, 多項式時間で 1 品種 1 パスの解が得られる. □

定理 2 [5] *1* 始点 *1* 品種 *1* パス多品種流の最小費用流問題について過密度 *4* 近似の解を多項式時間で求めることができる.

証明の概要 各部分問題を解いて得られたフロー g^j は, 補題 1 より, $g^j(e) \leq 2f^j(e) + 1/2^j$ を満たす. よって g は $g(e) = \sum_{j=0}^{r-1} g^j(e) + 1/2^j \leq 2f(e) + 2$ を満たす. $1 \leq cap(e)$ かつ $f(e) \leq cap(e)$ より, 過密度の上限 $\max_e g(e)/cap(e)$ は 4 となる. 余分な需要を減らす操作は, この上限に影響を与えない. 詳細については, [5] を参照. □

4.1 最小費用流問題への適用

このアルゴリズムはそのまま 1 始点 1 品種 1 パス多品種流における最小費用流問題に適用することができる. 用いる緩和解は, 最小費用流問題の線形計画緩和問題の解となる. 補題 1 において系 1 を用いれば, 容量を増やしたときに費用は増えないので, 過密度 4 近似のアルゴリズムにおいて費用が増加するのはフローを 2 倍にしたときだけである. よって, 以下を得る.

系 2 [5] *1* 始点 *1* 品種 *1* パス多品種流の最小費用流問題について過密度 *4*, 費用 *2* 近似の解を多項式時間で求めることができる.

さらに [5] によれば, このアルゴリズムを改良して以下の結果が得られる.

系 3 [5] *1* 始点 *1* 品種 *1* パス多品種流の最小費用流問題について過密度 *3.23*, 費用 *1.68* 近似の解を多項式時間で求めることができる.

5 Kolliopoulos, Stein [7] のアルゴリズム

Kolliopoulos, Stein [7] で提案されているアルゴリズムは, [5] の過密度 4 近似のアルゴリズムを改良したものである. 粒度という概念を導入し, より洗練された形で定理 1 を適用している. フロー f の粒度が a であるとは, f の流量がすべての辺について $a \in \mathbf{R}^+$ の倍数であることをいう. 結果として, 1 始点 1 品種 1 パス多品種流問題の過密度 3 近似のアルゴリズムを得ている. なお, [7] でなされていなかった解析をすれば, 系 5, 6 に示すように費用 2 近似であることがわかる. 本節では, [7] のアルゴリズムについて簡潔に説明する. [7] のアルゴリズムの中心となるのは, 次の系である. 本論文で提案するアルゴリズムでも, この系を同様に使用している. 証明は定理 1 から示される.

系 4 [7] 需要がすべて $1/2^x$ $(x \in \mathbf{N})$ で容量がすべて $1/2^{x+1}$ の倍数である *1* 始点 *1* 品種多品種流問題が緩和実行可能ならば粒度が $1/2^{x+1}$ の緩和解 f が存在する. このとき各辺の容量にたかだか $1/2^{x+1}$ を加えれば f から *1* 品種 *1* パスの粒度 $1/2^x$ の解 g を多項式時間で求めることができる.

ここで系 1 を使えば, 以下が得られる.

系 5 系 *4* で f と同じ費用の *1* 品種 *1* パスの粒度 $1/2^x$ の解 g を多項式時間で求めることができる.

[7] の過密度 3 近似のアルゴリズム

1. 需要をたかだか 2 倍することによってすべての需要をもとの需要以上の最も近い 1/2 の指数に切り上げる. こうして得られた需要を便宜上**実需要**と呼び, もとの d_i に対して D_i で表す. このとき, 最小の実需要を $1/2^\lambda$ とする.
2. すべての容量を 2 倍にする. そのあと, すべての容量をもとの容量以下の最も近い $1/2^\lambda$ の指数の倍数に切り下げる.
3. ここで, **仮想需要**の概念を導入する. すなわち, $D_i = 1/2^x$ の品種を, 仮想需要 $1/2^\nu$ の品種 $2^{\nu-x}$ 個の集まりだと見なす. 最初, $\nu = \lambda$ である. こうして作られた問題の緩和解 f を求める. 1 始点問題なので粒度 $1/2^\lambda$ の解を得ることができる.
4. $\nu = \lambda$ から始めて, 以下を繰り返す.
   (a) 実需要が $1/2^\nu$ 以下の品種はすでに 1 品種 1 パスの解が求まっているので, 以降その部分のフローは除いて考える. 現在のフローを f^ν とする. すべての品種の 1 品種 1 パスの解が求まっていれば, 5 に進む.
   (b) 仮想需要を $1/2^{\nu-1}$ とする. すると f^ν は需要がすべて $1/2^{\nu-1}$ である問題の緩和解と見なすことができる.

(c) 系4が適用できる．たかだか $1/2^{\nu}$ を各辺の容量に加えることによって，需要 $1/2^{\nu-1}$ の問題では1品種1パスの解に対応する粒度 $1/2^{\nu-1}$ の解が求められる．これを新しいフローとする．

(d) $\nu = 1$ なら粒度が1なので5に進む．そうでなければ ν を1減らす．

5. 最後に得られたフローに途中で除いたフローをすべて加え，実需要をもとの需要に戻す．

定理 3 [7] *1* 始点 *1* 品種 *1* パス多品種流の最小費用流問題について過密度 *3* 近似の解を多項式時間で求めることができる．

証明の概要 ν を1ずつ減らし，粒度を2倍にしていく各反復操作の後で，粒度はつねに $1/2^{\nu}$ になっていて，実需要が $1/2^{\nu}$ 以下の品種はすでに1品種1パスの解が求まっていることを系4から示すことができ，アルゴリズムが停止したときは，すべての品種の1品種1パスの解が求まっている．最後に得られたフローを g とすると，最初に需要・容量をたかだか2倍したから，もとの問題の緩和解を h とすれば $f(e) \leq 2h(e)$ である．容量を切り下げたのは解に影響しない ([7]) から，

$$g(e) \leq f(e) + \sum_{\nu=1}^{\lambda} \frac{1}{2^{\nu}} \leq 2h(e) + 1$$

が成り立っている．したがって過密度は3となる．計算量については，4の計算量を $T_2(k, |V|, |E|)$ とすると，[7] によれば T_2 は多項式時間計算量なので，アルゴリズム全体の計算量も多項式時間である．計算量の詳細な解析は，[7] を参照．□

さらに最小費用流問題については，以下が得られる．

系 6 [7] の過密度 *3* 近似のアルゴリズムは最小費用流にも適用でき，費用は *2* 近似である．

証明 f,g,h を上の定理の証明で用いたフローとする．最初に需要をたかだか2倍したから，f の費用は h のたかだか2倍である．最初と各反復での容量の操作は系5より，費用に影響しない．よって g の費用も h のたかだか2倍である．□

6 多始点・最小費用流問題への拡張

本節では，[5] と [7] のアルゴリズムをそれぞれ多始点の1品種1パス多品種流における最小費用流問題に拡張する．ここで，始点の数を c とする $(1 \leq c \leq k)$．本論文で提案する近似アルゴリズムは，いずれも過密度 $O(c)$ 近似なので，$c = k$ のときには性能が悪い．逆に，$c \ll k$ のとき (とくに c が定数のとき) には性能が良いと考えられる．なお，本節以降では以下の表記を用いる．まず，c 個の始点を $\sigma_1, ..., \sigma_c$ とする．$1 \leq j \leq c$ の各 σ_j を始点とする品種の集合を T^j とする．また，フロー f の費用 $\sum_{e \in E} cost(e)f(e)$ を $cost(f)$ で表す．

6.1 Kolliopoulos, Stein [5] の拡張アルゴリズム

まず，[5] の過密度 3.23，費用 1.68 近似アルゴリズムを多始点の場合に直接的に適用した，過密度が単純に c 倍になる結果を示す．

系 7 始点数が c の多始点 *1* 品種 *1* パス多品種流における最小費用流問題が与えられたとき，過密度 $3.23c$，費用 1.68 近似解を多項式時間で求めることができる．

証明 グラフ G のコピーを c 個 $(G^1, ..., G^c)$ 作成する．各 G^j に対して始点 σ_j と品種集合 T^j を対応させた c 個の1始点問題を作成する．各1始点問題について過密度 3.23，費用 1.68 の近似アルゴリズムを適用し，得られたフローを g^j とする．g^j をすべての j について合計して，もとの問題の近似解 g を得る．任意の辺 e について $g^j(e) \leq 3.23cap(e)$ より，$g(e) = \sum_{j=1}^{c} g^j(e) \leq 3.23c \cdot cap(e)$ が成り立つ．よって過密度は $3.23c$ となる．またもとの問題の最小費用の緩和解を f，その品種集合 T^j に対応するフローを f^j とし，各1始点問題の最小費用の緩和解を h^j としたとき，$cost(h^j) \leq cost(f^j)$，$cost(g^j) \leq 1.68 \cdot cost(h^j)$ だから，$cost(g^j) \leq 1.68 \cdot cost(f^j)$ となる．よって，$cost(g) \leq 1.68 \cdot cost(f)$ が成り立つ．計算量は，もとのアルゴリズムの c 倍の計算量にグラフのコピーとフロー合計にかかる $O(k|E|)$ を加えた計算量で抑えられる．□

また，過密度4，費用2近似のアルゴリズムを拡張して以下の結果を得ることができる．多始点の緩和解を先に求め，その解を各始点に対応して分割してやることで，単純な c 倍より良い過密度を得ている．

系 8 始点数が c の多始点 *1* 品種 *1* パス多品種流における最小費用流問題が与えられたとき，過密度 $2c+2$，費用 2 近似解を多項式時間で求めることができる．

証明 まず線形計画緩和問題を解いて緩和解 f を得る．f の品種集合 T^j に対応するフローを f^j とする．

各辺について f^j と同じ容量を持つグラフ G^j と品種集合 T^j を対応させた c 個の 1 始点問題を考えると, f^j はその問題の緩和解になっている．この f^j に対して [5] の過密度 4 近似のアルゴリズムで緩和解から 1 品種 1 パスの解を求めたのと同様の操作によって, $g^j(e) \leq 2f^j(e)+2$ を満たす 1 品種 1 パスの解 g^j が得られる．$1 \leq j \leq c$ について g^j を合計して

$$g(e) \leq 2f(e) + 2c$$

を満たす g を得る．よって過密度は $2c+2$ となる．同様に費用は $cost(g^j) \leq 2 \cdot cost(f^j)$ を満たしている．よって $cost(g) \leq 2 \cdot cost(f)$ が成り立つ．計算量も, 線形計画法の多項式時間解法の計算量を $T_1(k, |E|)$, もとのアルゴリズムの計算量を $T_3(k, |V|, |E|)$ とすれば, フローの分解と合計は $O(k|E|)$ でできるから, $T_1(k, |E|) + c \cdot T_3(k, |V|, |E|) + O(k|E|)$ となる．□

6.2 Kolliopoulos, Stein [7] の拡張アルゴリズム

[7] の過密度 3 近似アルゴリズムは, 系 6 より費用 2 近似だとわかった．本節では, このアルゴリズムを多始点・最小費用流問題に応用する．

このアルゴリズムを多始点の場合に拡張するには問題が存在する．[7] ではまず需要を $1/2^\lambda$, 容量を $1/2^\lambda$ の倍数の形にそろえてやることで, 最初に粒度 $1/2^\lambda$ の解を求めていたが, これは 1 始点問題の特質からできたことである．多始点の場合には, この条件の下でも, 粒度 $1/2^\lambda$ の解を求めることは NP-困難である．これは, 2 始点以上の整数多品種流を求めることは NP-困難であることに起因する．本論文では, まず緩和解を求めてそれからフロー・容量を適切に増やすことによって粒度 $1/2^\lambda$ の解を作りだし, [7] と同様に系 4 を適用できる状況にしてやることで, この問題を解決した．また性能の面からは, 過密度における c の係数を小さく保つために, 容量に値を加えることはできるだけ避けている．

以下に, 本論文で提案する過密度 $c+4$, 費用 4 近似を達成する多始点 1 品種 1 パス多品種流における最小費用流問題の近似アルゴリズムを示す．

1. 与えられた問題を線形計画問題に緩和して, 緩和解 f を求める．
2. f の品種集合 T^j に対応するフローを f^j とする．各辺について f^j と同じ容量を持つグラフ G^j と品種集合 T^j を対応させた c 個の 1 始点問題を考える．
3. 各 1 始点問題の G^j, f^j について, 以下をおこなう．
   (a) フロー f^j と G^j の容量を各辺についてたかだか 2 倍して, もとの値以上のもっとも近い 1/2 の指数の倍数に切り上げる
   (b) さらに下の補題 2 の方法を用いてフローの値と容量をたかだか 2 倍して, 需要を現在の値以上のもっとも近い 1/2 の指数に切り上げる．ただし, 各枝のフローの値は 1/2 の指数の倍数という性質は保つようにする．この結果得られた粒度を $1/2^\lambda$, フローを g^j, グラフを G'^j とする．また, 得られた需要を実需要と呼ぶことにする．
   (c) あとは [7] のように, 容量に $1/2^\lambda$ を加えて粒度を $1/2^{\lambda-1}$ にすることができる．[7] 同様, すべての品種の 1 品種 1 パスの解が求まるまで, 粒度を 2 倍にする操作を繰り返す．得られたフローを h^j とする．
4. h^j をすべての j について合計し, フロー h を得る．
5. もとの問題に余分な需要の分, フローを減らす．

定理 4 始点数 c の *1* 品種 *1* パス多品種流における最小費用流問題が与えられたとする．上のアルゴリズムは, 過密度 $c+4$, 費用 *4* 近似解を多項式時間で求めることができる．

以下の補題を用いて証明する．

補題 2 フロー f の流量およびグラフ G の容量がすべての辺について 1/2 の指数の倍数であるとき, 各辺について f の値と容量の値をたかだか *2* 倍にすることで, 需要を 1/2 の指数かつ流量と容量を 1/2 の指数の倍数にすることができる．

証明 f のある品種 i に用いられているパスの数を ℓ 本として, 流量の小さい順に $P_1, \ldots, P_\ell$ とする．このとき P_ν の流量を $a_\nu/2^L$ で表す．この品種の現在の需要を $a/2^L$ とする ($a = \sum_\nu a_\nu$). $2^b < a < 2^{b+1}$ ($b \in \mathbf{Z}$) とすれば, 需要を $2^{b+1}/2^L$ にすればよい (もし $\exists b, 2^b = a$ ならば何もしない)．これを実現するアルゴリズムを以下に述べる．

1. for $\xi = 1$ to ℓ do
   (a) もし, $q = 2^{b+1} - \sum_{\nu=1}^{\xi-1} a'_\nu - \sum_{\nu=\xi}^{\ell} a_\nu \leq a_\xi$ ならば, $a'_\xi = q$, $\nu > \xi$ なるすべての a'_ν について $a'_\nu = a_\nu$ として終了．
   (b) そうでなければ, $a'_\xi = 2a_\xi$ とする．

このアルゴリズムは $2^{b+1}/a < 2$ より，必ず上の範囲で終了し，$\sum_{\nu=1}^{\xi} a'_\nu + \sum_{\nu=\xi+1}^{\ell} a_\nu = 2^{b+1}$ を満たすので，求める需要 $\sum_\nu a'_\nu/2^L = 2^{b+1}/2^L$ が得られる．また，各パス P_ν の流量は $a'_\nu/2^L$ ($a'_\nu \in \mathbf{Z}^+$) かつ $a'_\nu \leq 2a_\nu$ となっている．上の操作を各品種についておこない，各辺 e の容量を，e を通るすべての品種の用いたパスの流量の合計にすれば，容量および流量はもとの値のたかだか 2 倍で，すべての需要を 1/2 の指数，流量と容量を 1/2 の指数の倍数にできる．□

定理 4 の証明 3(a),(b) が終了した時点で，g^j は f^j を 2 回たかだか 2 倍して得たから $g^j(e) \leq 4f^j(e)$ であり，補題よりフロー g^j とグラフ G'^j について，系 5 を適用できる条件が成立している．3(c) では定理 3 の証明と同様にして，T^j のすべての品種について 1 品種 1 パスの解 h^j を求めることができる．系 4 より，任意の辺 e について $h^j(e) \leq g^j(e) + \sum_{p=1}^{\lambda} 1/2^p \leq g^j(e)+1$ が成り立つ．また費用については，系 5 より，$cost(h^j) = cost(g^j)$ が成り立つ．したがってすべての $1 \leq j \leq c$ について h^j を合計して得られた h は，すべての品種の実需要を満たす 1 品種 1 パスの解であり，$g(e) = \sum_j g^j(e)$ とすれば任意の辺 e について $h(e) \leq g(e)+c \leq 4f(e)+c$ を満たす．さらに費用については，$cost(h) = cost(g) \leq 4 \cdot cost(f)$ を満たす．実需要からもとの需要に戻す際は，フローを減らすだけなので過密度および費用は増えることはない．したがって，得られた近似解は過密度 $c+4$，費用 4 近似となる．計算量については，線形計画法の多項式時間解法の計算量を $T_1(k, |E|)$, [7] に用いられている粒度を $1/2^\lambda$ から 1 まで上げる計算量を $T_2(k, |V|, |E|)$ とすれば，2, 3(a), (b), (c), 4, 5 は $O(k|E|)$ でできるから，全体の計算量は $T_1(k,|E|)+c \cdot T_2(k,|V|,|E|)+O(k|E|)$ となる．□

7 結論と今後の課題

本論文では，Kolliopoulos, Stein [5], [7] の結果を拡張して，多始点 1 品種 1 パス多品種流における最小費用流問題について 3 種類の近似アルゴリズムを提案した．今後の課題としては，本研究の延長として $d_{\max} \leq cap_{\min}$ が成り立たない場合についての考察，アルゴリズムの細部見直しによる近似率の改良などがまずあげられる．線形計画緩和と randomized rounding の手法を組み合わせた方法も現在研究中である．

謝辞 本論文に関して貴重なご助言を頂くとともに，日頃から懇切丁寧にご指導頂いております東京大学の今井浩先生に深く感謝致します．

参考文献

[1] Y. Dinitz, N. Garg, and M. Goemans. On the single-source unsplittable flow problem. *Proceedings of the 39th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 290–299, 1998.

[2] V. Guruswami, S. Khanna, R. Rajaraman, B. Shepherd, and M. Yannakakis. Near-optimal hardness results and approximation algorithms for edge-disjoint paths and related problems. *Proceedings of the 31th ACM Symposium on the Theory of Computing*, pp. 19–28, 1999.

[3] J. M. Kleinberg. *Approximation Algorithms for Disjoint Paths Problems.* Ph.D. Thesis, MIT, Cambridge, MA, May 1996.

[4] J. M. Kleinberg. Single-source unsplittable flow. *Proceedings of the 37th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 68–77, 1996.

[5] S. G. Kolliopoulos and C. Stein. Improved approximation algorithms for unsplittable flow problems. *Proceedings of the 38th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 426–435, 1997.

[6] S. G. Kolliopoulos and C. Stein. Approximating disjoint-path problems using greedy algorithms and packing integer programs. *Proceedings of the 6th Integer Programing and Combinatorial Optimization Conference, Lecture notes in Computer Science*, Vol. 1412, pp. 153–168, 1998.

[7] S. G. Kolliopoulos and C. Stein. Experimental evaluation of approximation algorithms for single-source unsplittable flow. *Proceedings of the 7th Integer Programing and Combinatorial Optimization Conference, Lecture notes in Computer Science*, Vol. 1610, pp. 328–344, 1999.

[8] P. Raghavan and C. D. Thompson. Randomized rounding: A technique for provably good algorithms and algorithmic proofs. *Combinatorica*, Vol. 7, pp. 365–374, 1987.