

MAX 2SAT に対する近似アルゴリズムの実際的性能評価

岩間 健一郎

浅野孝夫

中央大学大学院 理工学研究科 情報工学専攻

Abstract

MAX SAT とは、論理和形のクローズの集合と、各クローズに付随する重みが、入力として与えられて、満たされるクローズの重みの和が最大になるような真偽割当を見つける問題である。また、MAX k SAT とは、各クローズに含まれるリテラルが高々 k 個に限定された問題である。 $k=2$ の場合においても、この問題は NP 困難である。近年 MAX 2SAT に対して、半正定値計画法に基づく近似アルゴリズムが提案され、MAX SAT の近似アルゴリズムに対しても大きな発展をもたらした。本論文では MAX 2SAT に対する理論的観点からの代表的な近似アルゴリズムに対して、計算機実験を通して実際的性能評価を行う。

Experimental Performance of Approximation Algorithms for MAX 2SAT

Kenichiro Iwama

Takao Asano

Department of Information and System Engineering, Chuo University

Abstract

MAX SAT is stated as follows: given a set of clauses with weights, find a truth assignment that maximizes the sum of the weights of satisfied clauses. MAX 2SAT is the restricted version of MAX SAT where each instance consists of clauses with at most 2 literals. In this paper, we show the experimental performances of several approximation algorithms for MAX 2SAT based on semidefinite programming.

1 序章

MAX SAT とは、論理和形のクローズの集合と、各クローズに付随する重みが、入力として与えられて、満たされるクローズの重みの和が最大になるような真偽割当を見つける問題である。変数 x_i に対して、 x_i, \bar{x}_i をリテラルと呼ぶ。また、MAX k SAT とは、クローズ中のリテラルが高々 k 個に限定された問題である。 $k=2$ の場合においても、この問題は NP 困難である。NP 困難である問題に対しては、多項式時間で近似的に解を求めることが有効な方法であり、任意のインスタンスに対して、値が少なくとも最適値の α 倍以上となる近似解を求める多項式時間アルゴリズムを α 近似アルゴリズムという。本論文では、理論的観点からの MAX 2SAT に対する半正定値計画緩和を用いた代表的な近似アルゴリズムを概観し、計算機実験を通して実際的な性能評価を行う。以降用いる表記として、クローズ $x_i \vee x_j$ に付加された重みを w_{ij} 、半正定値計画問題に緩和したときの $x_i \vee x_j$ のとる値を z_{ij} とする。また $W = \sum_{i,j} w_{ij}$ 、 $Z = \sum_{i,j} w_{ij} z_{ij}$ とする。

2 半正定値計画緩和

Goemans-Williamson のアルゴリズム [3] は変数 x_i ($i = 1, \dots, n$) を R^{n+1} における単位球 S^n 上のベクトル v_i で緩和して $2n+1$ 個のベクトル v_0, v_1, \dots, v_{2n} を用いるアルゴリズムである。ただし、 v_0 は false を表現する参照ベクトルであり、 $v_{n+i} = -v_i$ はリテラル \bar{x}_i を緩和している。したがって、MAX 2SAT に対する半正定値計画緩和は、

$$\begin{aligned} & \max_{i,j} \sum w_{ij} z_{ij} \\ \text{s.t. } & z_{ij} = \frac{3 - v_0 v_i - v_0 v_j - v_i v_j}{4} \\ & v_i \in S^n \quad (0 \leq i \leq 2n) \\ & v_{n+i} v_i = -1 \quad (1 \leq i \leq n) \end{aligned}$$

となる。ここで、ベクトル v_i を $x_0 = -1, x_i \in \{-1, 1\}$ とすれば、MAX 2SAT と等価であることが確認できる。ラウンディングは、原点を通過するランダムな超平面でベクトルを 2 つの領域

で分割し、 v_0 と同じ領域に入る v_i を false、反対の領域に入る v_i を true に対応させる。この真偽割当により近似率は、一つのクローズに注目して、

$$\begin{aligned} & \min_{0 \leq \theta_{0i}, \theta_{0j}, \theta_{ij} \leq \pi} \frac{\frac{1}{2} \theta_{0i} + \theta_{0j} + \theta_{ij}}{\pi} \\ & \frac{3 - \cos \theta_{0i} - \cos \theta_{0j} - \cos \theta_{ij}}{4} \\ & > 0.87856 \end{aligned}$$

となることから、0.87856 近似アルゴリズムである。

3 Feige-Goemans の回転

Goemans-Williamson のアルゴリズムは Feige-Goemans によって改善が成された [2]。彼らはランダムな超平面でベクトルを分割する前に、 v_0 と v_i のなす角 θ_{0i} で定まる関数 $f: [0, \pi] \rightarrow [0, \pi]$ を用いて v_0, v_i がなす平面上で v_i を回転して得られる v'_i と v_0 のなす角 θ'_{0i} が $\theta'_{0i} = f(\theta_{0i})$ となるようにした。なお、 f は $f(\pi - \theta) = \pi - f(\theta)$ を満たし、

$$f(\theta) = (1 - \lambda)\theta + \lambda \frac{\pi}{2} (1 - \cos \theta)$$

としている (図 1)。この関数による v_i, v_j のなす角 θ_{ij} と v'_i, v'_j のなす角 θ'_{ij} は、

$$\cos \theta'_{ij} = \cos \theta'_{0i} \cos \theta'_{0j} + \cos \alpha \sin \theta'_{0i} \sin \theta'_{0j}$$

$$\cos \theta_{ij} = \cos \theta_{0i} \cos \theta_{0j} + \cos \alpha \sin \theta_{0i} \sin \theta_{0j}$$

をみたす。ここで α は、 v_0 と v_i がなす平面と、 v_0 と v_j がなす平面の角度である。また、 $\cos \theta_{ij} = v_i v_j$ 、 $\cos \theta'_{ij} = v'_i v'_j$ である。彼らは $\lambda = 0.806765$ として Goemans-Williamson のラウンディングをすると、得られる真偽割当は各クローズ $x_i \vee x_j$ において

$$\begin{aligned} & \min_{0 \leq \theta_{0i}, \theta_{0j}, \theta_{ij} \leq \pi} \frac{\frac{1}{2} \theta'_{0i} + \theta'_{0j} + \theta'_{ij}}{\pi} \\ & \frac{3 - \cos \theta_{0i} - \cos \theta_{0j} - \cos \theta_{ij}}{4} \\ & \cong 0.93109 \end{aligned}$$

が成立することを数値的に示し、0.93109 近似アルゴリズムが実現できることを示した。最悪の近似率を実現する角度は、制約式

$$v_0 v_i + v_0 v_j + v_i v_j \geq -1$$

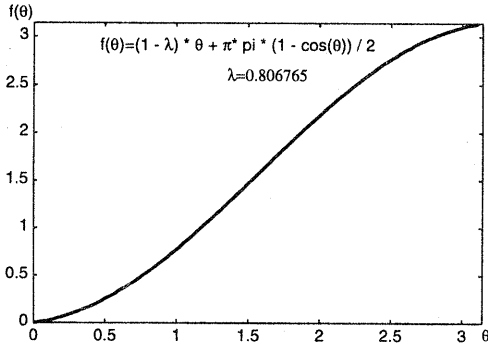


図 1: Feige-Goemans の関数

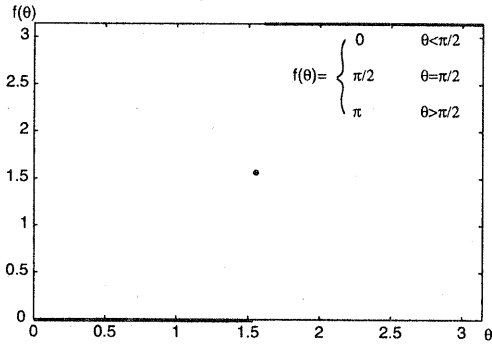


図 2: 充足可能なインスタンスに用いる関数

を等式で満たし,

$$\theta_{0i} = \theta_{0j} = \pi - 1.32238,$$

$$v_i v_j = 2 \cos(1.32238) - 1$$

のときである.

4 Zwick の回転

MAX 2SAT の充足可能なインスタンスに対しては

$$f_{\frac{\pi}{2}}(\theta) = \begin{cases} 0 & \theta < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2} & \theta = \frac{\pi}{2}, \\ \pi & \theta > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

で定義される $f_{\frac{\pi}{2}}(\theta)$ (図 2) によって, v_i を v_0, v_i の成す平面上において回転して得られる v'_i と v_0 のなす角 θ'_{0i} を $\theta'_{0i} = f_{\frac{\pi}{2}}(\theta_{0i})$ として, その後 Goemans-Williamson のラウンディングをする

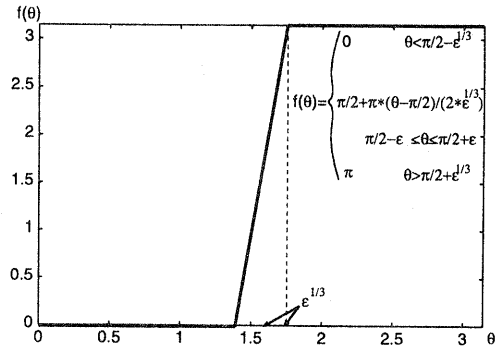


図 3: Zwick の関数

と得られる真偽割当は各クローズを必ず満たすことが言える. すなわち次の定理が成立する.

定理 1[5] 充足可能なインスタンスに対して, 半正定値計画緩和の最適解を導くベクトルを v_0, v_1, \dots, v_n とする. そのベクトルに対して, u_0, u_1, \dots, u_n を上記の $f_{\frac{\pi}{2}}(\theta)$ で得られるベクトルとする. また, r を $rv_0 < 0$ を満たし, どの u_0, u_1, \dots, u_n とも直交しない単位ベクトルとする. そのとき, $ru_i > 0$ となる変数 x_i に true を割り当てれば, それは一つの充足割当となる. \square

この定理に基づいて, ほとんど全てのクローズを満たすような真偽割当が存在するインスタンスに対して, Zwick は以下のようにベクトルを回転する関数を示し高性能近似解に結びつく方法を提案した.

$$f_{\frac{\pi}{2} - \epsilon^{1/3}}(\theta) = \begin{cases} 0 & \theta < \frac{\pi}{2} - \epsilon^{1/3}, \\ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\epsilon^{1/3}}(\theta - \frac{\pi}{2}) & \frac{\pi}{2} - \epsilon^{1/3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \epsilon^{1/3}, \\ \pi & \theta > \frac{\pi}{2} + \epsilon^{1/3} \end{cases}$$

なお, $\epsilon = 1 - Z/W$ で, ϵ は小さいものとしている. この関数 $f_{\frac{\pi}{2} - \epsilon^{1/3}}(\theta)$ は $\epsilon = 1 - Z/W$ の十分小さなインスタンスに対して良い性能を示す.

補題 2 $0 < \gamma < 1$ に対して, $z_{ij} \leq 1$ かつ,

$$\sum_{i,j} w_{ij} z_{ij} \geq (1 - \epsilon)W$$

であるとき,

$$\sum_{z_{ij} \geq 1 - \epsilon^{1-\gamma}} w_{ij} \geq (1 - \epsilon^\gamma)W$$

が成立する. □

補題 3 $z_{ij} \geq 1 - \epsilon^2$ であるとき, v_i, v_j を関数 $f_{\frac{\pi}{2} - \epsilon^{1/3}}(\theta)$ で変換しラウンディングすると, そのクローズ $x_i \vee x_j$ が満たされる確率 p_{ij} は $p_{ij} \geq 1 - 4\epsilon$ を満たす. □

小さな ϵ_0 に対して, $\sum_{i,j} w_{ij} z_{ij} = (1 - \epsilon_0)W$ のときこのラウンディングで求められる期待値を E とすると,

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i,j} w_{ij} p_{ij} \\ &\geq \sum_{z_{ij} \geq 1 - \epsilon_0^{2/3}} w_{ij} p_{ij} \\ &\geq (1 - 4\epsilon_0^{1/3}) \left(\sum_{z_{ij} \geq 1 - \epsilon_0^{2/3}} w_{ij} \right) \\ &\geq (1 - 4\epsilon_0^{1/3})(1 - \epsilon_0^{1/3})W \end{aligned}$$

となる. ゆえに, Zwick のアルゴリズムで得られる近似率は, $(1 - 4\epsilon_0^{1/3})(1 - \epsilon_0^{1/3}) / (1 - \epsilon_0) = 1 - O(\epsilon_0^{1/3})$ になる.

5 実験結果

半正定値計画法に基づく Goemans-Williamson, Feige-Goemans, Zwick のアルゴリズムの実際的な性能評価をするための計算機実験を行なった. 今回の実験で使用したインスタンスは 2 種類で, data 1 は, クローズのリテラルをランダムに選んだインスタンスであり, 50 変数, クローズ数は 150 から 50 きざみで 450 までである. data 2 は, $x_i \vee x_j, \bar{x}_i \vee x_j, x_i \vee \bar{x}_j, \bar{x}_i \vee \bar{x}_j$ となる 4 つのクローズの組をランダムなインスタンスの中に故意に混ぜ込んで生成した $1 - Z/W$ の値を大きくした 230 クローズのインスタンスである. 以降 $F = 1 - Z/W$ と表記する. 半正定値計画法を解くためのパッケージ SDPA は ftp.is.titech.ac.jp/pub/OpRes/software/SDPA/ で入手した.

data 1 のインスタンスに対する, 半正定値計画法に基づく各アルゴリズムの性能は図 4 のようになった. 横軸は F であり, 縦軸は理論値との評価を観察するため, $E = \sum_{i,j} w_{ij} p_{ij} / Z$ とした. ここで, p_{ij} はクローズ $x_i \vee x_j$ の期待値であり, Feige-Goemans, Zwick に関しては回転後

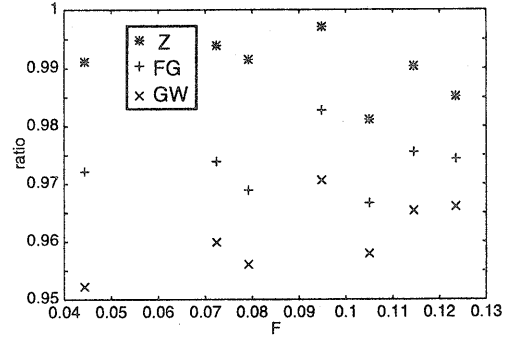


図 4: data 1 に対する性能

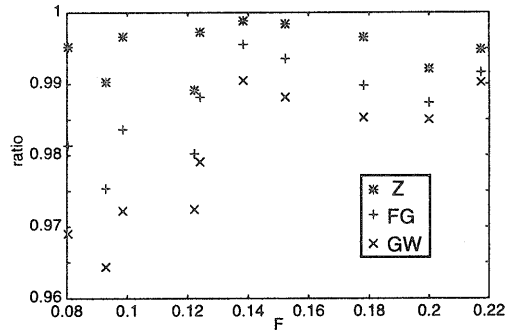


図 5: data 2 に対する性能

の期待値としている. ランダムなインスタンス data 1 については観察し難いが, 故意に満たせないクローズを増やした data 2 については各アルゴリズムの性能が F の増加にともない性能が近付いていく様子が見える (図 5).

今回の実験では, F の値に関わらず実験した全てのインスタンスに対して Zwick のアルゴリズムが最も良い性能を示した. Goemans-Williamson は最悪でも 0.952 を達成し, Feige-Goemans, Zwick はそれぞれ, 0.966, 0.981 を達成した.

実験には, 前述のアルゴリズムの他に, Johnson による確率的方法 [4] も加えた. このアルゴリズムの近似率は 0.5 であり, 2 個のリテラルからなるクローズのみのときは 0.75 である. 半正定値計画法に基づく各アルゴリズムの近似

表 1: data 1 に対する近似解

クローズ数	J	G-W	F-G	Z
150	138	138	140	142
200	176	185	185	185
250	222	228	228	229
300	265	262	260	265
350	310	314	316	316
400	346	350	350	352
450	385	389	389	389

解は期待値を越えるまでラウンディングを繰り返して求めたものである。表 1 の中の太字で示した値は最適解と等しく、最も高い頻度で最適解を求めたアルゴリズムは、Zwick のアルゴリズムであり、以下 Feige-Goemans, Goemans-Williamson と続いた。Johnson に関しては、1 度も最適解を得ることはなかった。最適解は整数計画問題に従って XPRESS-MP を用いて分枝限定法によって求めた。

$F = 0.12348$ である data1 の 450 クローズのインスタンスに対して各 z_{ij} を観察することで、今回の実験の考察を行う。図 6 に示したものは、 z_{ij} を $0 \leq z_{ij} \leq 0.01, 0.01 < z_{ij} \leq 0.02 \dots 0.99 < z_{ij} \leq 1$, となるように 0.01 きざみで分類して、その個数をヒストグラムとして表したグラフである。最も多かったのは $0.99 < z_{ij} \leq 1$ を満たすクローズであり、450 クローズ中 186 クローズ存在した。 z_{ij} の値が 1 に近い $z_{ij} > 1 - F = 0.87652$ となるクローズは全クローズ数の 72% 程度であった。図 7 の横軸は、図 6 と同様に z_{ij} を 0.01 きざみで $0 \leq z_{ij} \leq 0.01, 0.01 < z_{ij} \leq 0.02, \dots, 0.99 < z_{ij} \leq 1$, となるように分類して、それぞれを 0.01, 0.02, ..., 1 としている。縦軸には、 $\min p_{ij}/z_{ij}$ をとっている。ここで p_{ij} は、図 1 で示した Feige-Goemans の回転の関数を用いて回転された後の角度についての期待値である。このグラフは、実際に考えられる角度を離散化して求めたものである。図 6 と図 7 から、最も出現頻度の高かった $0.99 < z_{ij} \leq 1$ を満たすクローズが $\min p_{ij}/z_{ij}$ の値が小さい範囲に分布することが観察できる。

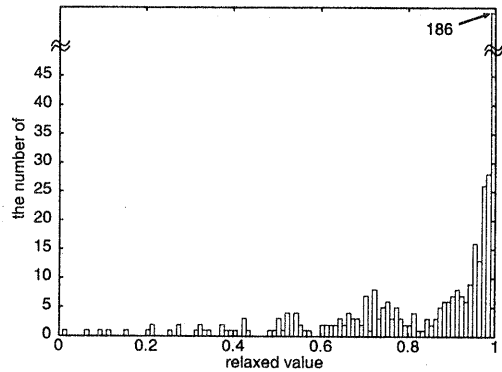


図 6: クローズの緩和値の傾向 450 クローズ, $F = 0.12348$ のとき

一方で、Zwick のアルゴリズムについても、 z_{ij} の値に対する $\min p_{ij}/z_{ij}$ を調査した結果を図 8 に示す。図 8 の軸は図 7 と同様に横軸は、 z_{ij} で、縦軸には、 $\min p_{ij}/z_{ij}$ をとっている。ここで p_{ij} は、図 3 で示した Zwick の回転の関数を $\epsilon = F = 0.12348$ として用いて回転された後の角度についての期待値である。このグラフも実際に考えられる角度を離散化し求めたものである。図 6, 図 8 から観察できることは、Zwick の関数は図 6 で見られるように最も出現頻度の高かった $0.99 < z_{ij} \leq 1$ を満たすクローズについて良い性質を持つことである。

6 まとめ

実験した全てのインスタンスについて、近似解、期待値の双方に対して最も性能の良かったアルゴリズムは、Zwick のアルゴリズムであった。半正定値計画法に基づいた近似解は、Johnson の確率的方法による解と比較すると優れた性能を示した。

Zwick によるアルゴリズムは、Feige-Goemans のアルゴリズムに比べて、 F の値が小さいインスタンスに優れているという理論的性能を持っている。しかし、今回の実験の結果では、一般のインスタンスに対しても良い性能を示すことが観察できた。

Zwick のアルゴリズムが優れていた理由は、半

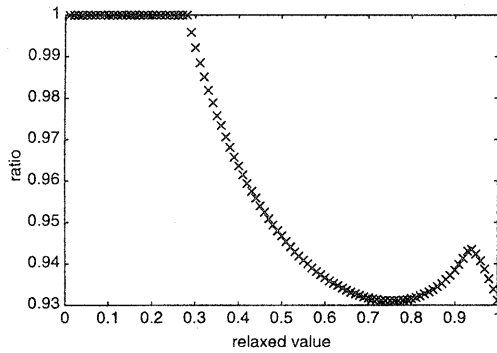


図 7: z_{ij} に対する Feige-Goemans の関数の性能

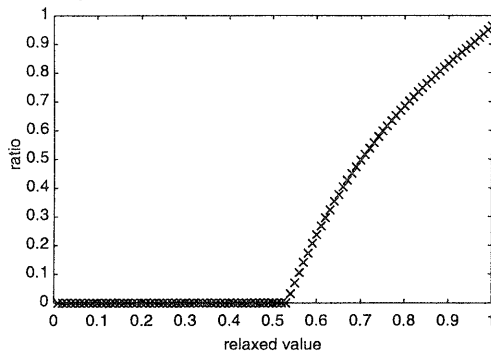


図 8: z_{ij} に対する Zwick の関数の性能

正定値計画緩和によって得られた各 z_{ij} の値の分布を図 6 より観察すると、大半の z_{ij} は 1 に近い値をとっていて、 z_{ij} が 1 に近いときは、Feige-Goemans による近似率の評価式が最悪になる場合、つまり制約式 $v_0v_i + v_0v_j + v_iv_j \geq -1$ が等式に近いときであり、また図 7,8 を比較すると、Feige-Goemans の関数は z_{ij} が小さいときに良い性能を示し、一方で Zwick の関数は逆に z_{ij} が大きい 1 に近いときに良い性能を示すからであろう。Goemans-Williamson のアルゴリズムについても図 7,8 と同様の調査をしたグラフを図 9 に示す。図 9 において z_{ij} が 1 に近いところでの性能が今回の実験結果に現れたのである。

F が小さいインスタンスに限り Zwick のアルゴリズムが有効であるのではなく、一般のインスタンスに対しても良い性能を示すというこ

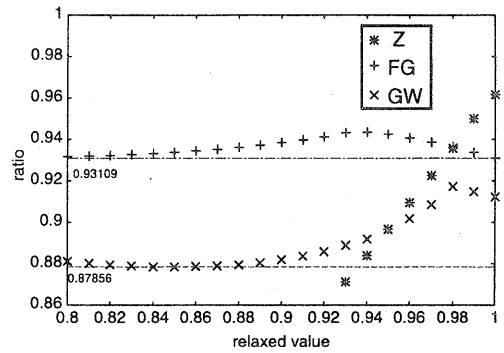


図 9: z_{ij} に対する各関数の性能

とを解析的に証明することが、今後の課題として挙げられる。

謝辞

本研究は、一部、中央大学理工学研究所、私立大学ハイテク・リサーチ・センターおよび文部省科学研究費補助金からの援助のもとで行なわれたものである。

参考文献

- [1] T. Asano and D. P. Williamson : Improved Approximation Algorithms for MAX SAT, *Proc. of the 11th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, 2000, pp.96-105.
- [2] U. Feige and M. X. Goemans : Approximating the value of two prover proof systems, with applications to MAX-2SAT and MAX-DICUT, *Proc. of the 3rd Israel symposium on Theory and Computing Systems*, 1995, pp.182-189.
- [3] M. X. Goemans and D. P. Williamson : Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming, *Journal of the ACM*, 45 (1995), pp.1115-1145.
- [4] D. S. Johnson : Approximation algorithms for combinatorial problems, *Journal of Computer and System Sciences*, 9, 1974, pp.256-278.
- [5] U. Zwick : Finding almost-satisfying assignments, *Proc. of the 29th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 1998, pp.551-560.