アルゴリズム 74－6
(2000. 9. 21)

ボロノイ図を利用した寄り道可能施設の列挙

神田 毅
東京大学大学院 工学系研究科 計数工学専攻

与えられた経路から一定距離以内にある施設を列挙するという問題を、ボロノイ図を利用して解く。この問題は、領域探索問題の1種である。まず施設を表す点の集合が与えられていて、後から次々と与えられる経路に対して、それに近い全ての点を高速に列挙することを目指す。そのために、はじめの点集合に対してある種の前処理を施すのだが、本解法では、前処理として与えられた点集合のボロノイ図を作成する。これはボロノイ図の素朴な利用法に過ぎないが、ここで扱う問題に限らずにより広い範囲の問題に応用可能で、実装もたやすい。

Enumeration of Facilities near a Given Way by Using the Voronoi Diagram

Takeshi Kanda
Department of Mathematical Engineering and Information Physics,
Graduate School of Engineering, University of Tokyo

The problem of enumerating facilities within a constant distance of a given way is solved by using the Voronoi diagram. This problem is one of the range search problems. In the method introduced in this paper, we construct the Voronoi diagram of the given points representing facilities as the preprocess. Then, we can enumerate all of the near facilities quickly for a given way. Although the idea used in this paper is very fundamental, this idea is expected to be applied to the similar problems whose shape of the considered range is not the same as that in this paper. Furthermore this method is easy to be installed.

1 はじめに

領域探索問題 (range search problem) とは、n 個の点からなる集合 S にたいして、領域 R が与えられた時に、R 内の S の点を列挙する問題である。領域 R として様々な形のものが与えられ得る。通常は、集合 S が固定されていて領域 R としては繰り返し異なるものが与えられ、その状況で高速に点を列挙したいという状況を考える。この種の問題は [2] (日本語訳 [3]) や [4] で解説されている。また、より一般的な概念である幾何学的探索問題も含めて [5] [6] で解説されている。参考文献は [6] が詳しい。一般次元で領域 R が直方体の場合が [7] で扱われている。領域 R が円の場合は円領域探索問題となり、[8] [9] [10] [12] で扱われている。[14] ではボロノイ図を利用した円領域探索問題の解法が述べられている。そして、領域 R が多角形の場合は [11] で、一般次元で領域 R が半平面の場合の高速な方法が [13] で述べられている。

ここでは、与えられた経路から一定距離以内にある施設を列挙するという問題を、ボロノイ図を利用して解く。この問題も領域探索問題の1種である。与えられた点集合にたいする前処理としてその点集合のボロノイ

図を作成し、これを利用して経路から一定距離以内にある施設を列挙する。この方法はボロノイ図の素朴な利用法に過ぎないが、ここで扱う問題に限らずより広い範囲の領域探索問題に応用可能で、実装もたやすい。より簡単な場合として、与えられた経路から一定距離以内の施設の有無のみを判定する問題、与えられた経路から最も近い施設を求める問題にも言及する。

まず2章ではボロノイ図を定義する。3章では扱う問題をまとめて「寄り道可能施設問題」と呼び、定式化する。4章でその問題にたいするボロノイ図を利用した解法を説明し、5章で結論、課題をまとめる。

2 ボロノイ図

ボロノイ図 (Voronoi diagram) [1] とは、与えられた点集合 $\{P_i(x_i, y_i) \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ にたいして、どの点に最も近いかによって平面を分割した図形で、図1がその例である。式で表すなら、

$$\mathcal{V}(P_i) = \bigcap_{j \neq i} \{P(x, y) \mid \mathrm{d}_i(P) \leq \mathrm{d}_j(P)\} \ , \tag{1}$$

$$\mathrm{d}_i(P) = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \tag{2}$$

で定義される勢力圏の集合 $\{\mathcal{V}(P_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$ によって、平面を分割して作った図形ということになる。なお、ボロノイ図を作るために与える点 $P_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を母点といい、ボロノイ図に現れる頂点をボロノイ頂点、辺をボロノイ辺、領域 $\mathcal{V}(P_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ をボロノイ領域と呼ぶ。

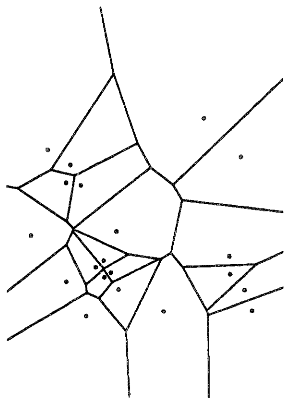

図 1: ボロノイ図の例

3 寄り道可能施設問題のタイプ

ここでは、寄り道可能施設問題を定式化する。まず、平面上の n 個の点 P_1, P_2, ..., P_n からなる集合 S が与えられる。さらに、m 本の線分 $\overline{Q_0Q_1}$, $\overline{Q_1Q_2}$, ..., $\overline{Q_{m-1}Q_m}$ からなる折れ線 $\overline{Q_0Q_1 \ldots Q_m}$ が与えられる。そして、以下の3種類の問題を考える。ここでは、これらの問題をまとまて寄り道可能施設問題と呼ぶことにする。

- 問題 1: 経路に近い施設の有無
  与えられた折れ線 $\overline{Q_0Q_1 \ldots Q_m}$ から δ 以内の距離にある点が $S = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ の中に存在するかどうかを判定せよ。

- 問題 2: 経路に最も近い施設
  与えられた折れ線 $\overline{Q_0Q_1\ldots Q_m}$ に最も近い点を $S = \{P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n\}$ の中から見つけよ。

- 問題 3: 経路に近い施設の列挙
  与えられた折れ線 $\overline{Q_0Q_1\ldots Q_m}$ から δ 以内の距離にある点を $S = \{P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n\}$ の中から全て列挙せよ。

ここでは、点 $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n$ がある種の施設、折れ線 $\overline{Q_0Q_1\ldots Q_m}$ が、ある人の予定された経路であり、その人が寄り道しやすい施設を見つけることを想定している。実用上は、経路がたくさん与えられ、与えられた経路全てにたいして、同じ問題を解く必要が生じるであろう。

4 ボロノイ図を利用する解法

4.1 問題 1(経路に近い施設の有無)

以下の手順で、与えられた折れ線 $\overline{Q_0Q_1\ldots Q_m}$ から δ 以内の距離にある点が $S = \{P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n\}$ の中に存在するかどうかを判定できる (図 2)。

- Step 1.
  点集合 S のボロノイ図を作成する。

- Step 2.
  経路の始点 Q_0 がどのボロノイ領域に属するかを、知られている点位置決定の方法[1]で求める。そして、対応する母点と経路との距離が δ 以下かどうか (母点が太線領域内にあるかどうか) を調べる。δ 以下であれば、「存在する」と答えて終了する。

- Step 3.
  - Step 3.1.
    経路が現在たどっているボロノイ領域のどの辺から出るかを求め、経路に沿って隣のボロノイ領域に移る。経路が現在たどっているボロノイ領域を出なくなったら (経路を終点 Q_m まで調べてしまったら)、「存在しない」と答えて終了する。
  - Step 3.2.
    対応する母点と経路との距離が δ 以下かどうかを調べる。δ 以下であれば、「存在する」と答えて終了する。δ 以下でない時は、Step 3.1 に戻る。

4.2 問題 2(経路に最も近い施設)

以下の手順で、与えられた折れ線 $\overline{Q_0Q_1\ldots Q_m}$ に最も近い点を $S = \{P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n\}$ の中から見つけることができる (図 2)。

- Step 1.
  点集合 S のボロノイ図を作成する。

[1]一般的な点位置決定問題は [15] [16] [17] で扱われているが、ここで必要なのはボロノイ図にたいする点位置決定問題 [1] であり、実装がやや楽になる。

図 2: 問題 1(経路に近い施設の有無)、問題 2(経路に最も近い施設)

- Step 2.
経路の始点 Q_0 がどのボロノイ領域に属するかを、点位置決定の方法で求める。そして、対応する母点と経路との距離を調べて記録する。

- Step 3.
  - Step 3.1.
  経路が現在たどっているボロノイ領域のどの辺から出るかを求め、経路に沿って隣のボロノイ領域に移る。経路が現在たどっているボロノイ領域を出なくなったら (経路を終点 Q_m まで調べてしまったら) Step 4 へ進む。
  - Step 3.2.
  対応する母点と経路との距離を調べて記録する。Step 3.1 に戻る。

- Step 4.
経路との距離を記録された母点 (細い折れ線の頂点) にたいして、最短距離を与える母点を求め、終了する。

4.3 問題3(経路に近い施設の列挙)

以下の手順で、与えられた折れ線 $\overline{Q_0Q_1\ldots Q_m}$ から δ 以内の距離にある点を $S = \{P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n\}$ の中から全て列挙することができる (図3)。

- Step 1.
点集合 S のボロノイ図を作成する。

- Step 2.
経路の始点 Q_0 がどのボロノイ領域に属するかを、点位置決定の方法で求める。そして、対応する母点と経路との距離が δ 以下かどうか (母点が太線領域内にあるかどうか) を調べ、その結果を記録する。(経路から δ 以下の母点を黒丸で示し、距離を調べた結果そうでないとわかったものを穴空きの丸で示した。以下同様。)

- Step 3.
(Step 2 と Step 3 で調べる母点に対応するボロノイ領域を層 0 と呼び、濃い灰色で塗ってある。)
  - Step 3.1.
  経路が現在たどっているボロノイ領域のどの辺から出るかを求め、経路に沿って隣のボロノイ領域に移る。経路が現在たどっているボロノイ領域を出なくなったら (経路を終点 Q_m まで調べてしまったら) Step 4 に進む。
  - Step 3.2.
  対応する母点と経路との距離が δ 以下かどうかを調べ、その結果を記録する。

- Step 4.
$k = 0$ とする。(層 1 を灰色、層 2 を薄い灰色で塗ってある。)

- Step 4.1.
  層 k の中で対応する母点が経路から δ 以下の距離だったものに隣接するボロノイ領域を、層 $k+1$ と呼ぶ。ただし、すでに層 k 以下と定まっているボロノイ領域は除く。層 $k+1$ が空なら、Step 5 へ進む。

- Step 4.2.
  層 $k+1$ のボロノイ領域に対応する母点と経路との距離が δ 以下かどうかを調べ、その結果を記録する。k を1増やして Step 4.1 に戻る。

- Step 5.
  まだ経路との距離を調べていない母点については、経路との距離が δ 以下ではないとわかる。終了する。

5 まとめ

得られた結論と今後の課題をまとめると、以下の通りである。

- 寄り道可能施設問題を定式化し、素朴ではあるが、解法を1つ提案した。
- この解法は、他のタイプの領域探索にも使える。
- まだ、計算時間についての考察を行なっていない。しかし、施設は固定されていて、入り組んでいない経路がたくさん与えられる状況では、理想的な速さが実現できると思われる。

参考文献

[1] Atsuyuki Okabe, Barry Boots, Kokichi Sugihara: Spatial Tessellations - Concepts and Applications of Voronoi Diagrams, John Wiley & Sons, 1991.

[2] Franco P. Preparata, Michael Ian Shamos: Computational Geometry - An Introduction, Springer-Verlag, New York, 1985.

[3] F. P. プレパラータ, M. I. シェーモス 著, 浅野 孝夫, 浅野 哲夫 訳: 計算幾何学入門, 総研出版, 1992.

[4] 佐々木 建昭, 今井 浩, 浅野 孝夫, 杉原 厚吉: 計算代数と計算幾何, 岩波講座 応用数学 [方法 9], 岩波書店, 1993.

[5] 今井 浩, 今井 桂子: 計算幾何学, 情報数学講座 12, 共立出版株式会社, 1994.

[6] 伊理 正夫 監修, 腰塚 武志 編集: 計算幾何学と地理情報処理 第2版, 共立出版, 1993.

[7] Jon Louis Bentley: Multidimensional Binary Search Trees Used for Associative Searching, *Communications of the ACM*, Vol. 18, pp. 509-517, 1975.

[8] Gideon Yuval: Finding Near Neighbours in K-Dimensional Space, *Information Processing Letters*, Vol. 3, Num. 4, pp. 113-114, March 1975.

[9] Jon L. Bentley, Donald F. Stanat, E. Hollins Williams, Jr.: The Complexity of Finding Fixed-radius Near Neighbors, *Information Processing Letters*, Vol. 6, No. 6, pp. 209-212, December 1977.

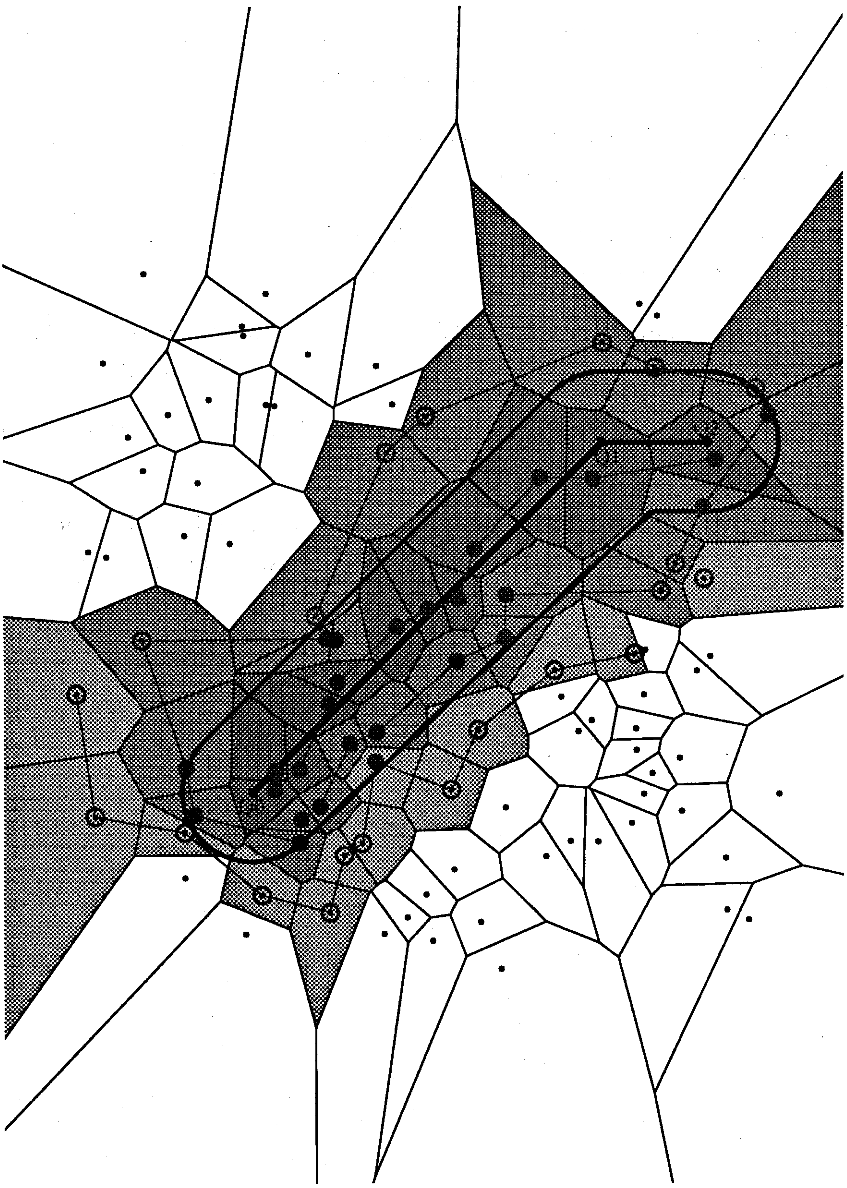

図 3: 問題 3(経路に近い施設の列挙)

[10] Jon Louis Bentley, Hermann A. Maurer: A Note on Euclidean Near Neighbor Searching in the plane *Information Processing Letters*, Vol. 8, No. 3, pp. 133-136, March 1979.

[11] D. E. Willard: Polygon Retrieval, *SIAM Journal on Computing*, Vol. 11, pp. 149-165, 1982.

[12] Bernard Chazelle: An Improved Algorithm for the Fixed-Radius Neighbor Problem, *Information Processing Letters*, Vol. 16, pp. 193-198, 1983.

[13] Herbert Edelsbrunner, Emo Welzl: Halfplanar Pange Search in Linear Space and $O(n^{0.695})$ Query time, *Information Processing Letters*, Vol. 23, pp. 289-293, 1986.

[14] B. Chazelle, R. Cole, F. P. Prepareta, C. Yap: New Upper Bounds for Neighbor Searching, *Information and Control*, Vol. 68, PP. 105-124, 1986.

[15] D. T. Lee, F. P. Preparata: Location of a Point in a Planar Subdivision And Its Applications, *SIAM Journal on Computing*, Vol. 6, No. 3, pp. 594-606, September 1977.

[16] David Kirkpatrick: Optimal Search in Planar Subdivisions, *SIAM Journal on Computing*, Vol. 12, No. 1, pp. 28-35, February 1983.

[17] Herbert Edelsbrunner, Leonidas J. Guibas, Jorge Stolfi: Optimal Point Location in a Monotone Subdivision, *SIAM Journal on Computing*, Vol. 15, No. 2, pp. 317-340, May 1986.