

# スリザーリンクの NP 完全性について

八登 崇之

東京大学大学院理学系研究科情報科学専攻  
yato@is.s.u-tokyo.ac.jp

## 概要

現在多くの人に遊ばれているゲームやパズルの多くについて、その計算量が解析されている。本稿では、パズルの一種であるスリザーリンクについて、解があるかを判定する問題の NP 完全性を制限されたハミルトン閉路問題からの多項式時間還元を用いて証明する。また、スリザーリンクの別解問題 (Another Solution Problem, 1 つ解が与えられた時に他に解があるかを判定する問題) について考察し、その NP 完全性の証明の指針を示す。

## On the NP-completeness of the Slither Link Puzzle

Takayuki YATO

Department of Information Science, Graduate School of Science, The University of Tokyo  
yato@is.s.u-tokyo.ac.jp

## Abstract

For many of the widely played games and puzzles, their computational complexities have been analyzed. In this paper, we consider a sort of puzzle "Slither Link" and prove that the problem which determines whether or not a given instance of puzzle has any solutions is NP-complete, by using a polynomial time reduction from the Hamilton Path Problem with respect to restricted graphs. In addition we consider Another Solution Problem for the puzzle, the problem which determines, for a given instance and its solution, whether there is another solution for the instance. We provide a strategy to prove its NP-completeness.

## 1 はじめに

今日数多くのゲームやパズルが遊ばれている。それらの楽しさの源はその難しさにあるといえる。実際、囲碁、将棋、チェスなどのゲームが長い間人気を保っているのはこれらのゲームが(たとえ計算機を用いても)容易に解析され得ないからであろう。

そして、このような対戦型ゲームの多くについて計算量が解析されている。例えば、一般の  $n \times n$  の盤に拡張した場合に勝者を判定する問題は、チェス [5], 将棋 [1], 囲碁 [14], チェッカー [13] については EXPTIME 完全, オセロ [8], 五目並べ [12] については PSPACE 完全であることが示されている。また、一人で楽しむパズルについても、( $n \times n$  拡張版で) 最小手数解を求める問題は、15 パズル [11] では NP 完全, 倉庫番 [2] では PSPACE 完全, 詰め将棋 [17] では EXPTIME 完全であるという結果が知られている。このように、計算量という観点からゲームやパズルが難しさによって分類できることは大変興味深い。

本研究の対象である「スリザーリンク」というのはペンシルパズルというものの一種である。ペンシルパズルというのは、紙に印刷された問題の図に鉛筆で書き込みながら解いていくという形態のパズルで、これらを扱うパズル雑誌が数多く出版されている。比較的有名なものには、「スリザーリンク (ナンバーライン)」の他に「ののぐらむ (イラストロジック)」, 「カックロ (サムクロス)」, 「数独 (ナンバープレース)」などである。(それぞれのルールについては [9, 6] などを参照。)



### 3 NP 完全性の証明

本章では次の定理を証明する。

**定理 1** スリザーリンクの解の存在判定問題は NP 完全である。

(証明) この問題が NP に属することは明らかである。(解の座標列が与えられれば、それが先述の条件を満たすことは容易に確認できる.)

この問題が NP 困難であることを示すために次の事実を用いる [7].

**補題 2** ハミルトン閉路問題は、各点の次数が 3 以下の平面グラフに限定しても NP 完全である。

この制限付きのハミルトン閉路問題からスリザーリンクへの多項式時間還元を示す。

最初に次の事実を用いる [3].

**補題 3** 頂点数が  $n$  の、各点の次数が 3 以下の平面グラフは、縦横の長さが  $O(n) \times O(n)$  のの長方形のグリッド (格子) に (多項式時間で) 埋め込むことができる。

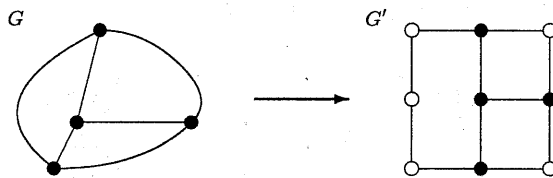


図 2: 格子上的のグラフへの変換

この補題を使って制限付きのハミルトン閉路問題のインスタンスのグラフ  $G$  をグリッド上のグラフ  $G'$  に変換する。ただし、格子点の中には  $G$  の頂点に対応しないものもあり、 $G'$  のハミルトン閉路 (当然これは  $G$  のハミルトン閉路と 1 対 1 対応する) を考える場合は、このような点 (前図の  $\circ$  で示した点) は通らなくてもよいことに注意する。このような点の次数は 2 以下である。

まず最初に、ハミルトン閉路問題の「必ずしも通らなくてもよい点 ( $\circ$ )」に対応するスリザーリンクの gadget として図 3 の A のような  $6 \times 6$  の部品を考える。ただし、( $\times$  で示したように) 部品の周囲の辺には線が引かれないものと仮定する。このとき、A の部品から外部へ線が出る点は  $n, s, w, e$  の 4 つに限られる。従って、(スリザーリンクの解が完成した時の) 部品内の状態は、A1, A2, A3 のように  $n, s, w, e$  の中の 2 点が結ぶ線が引かれているか、あるいは線が全く引かれていないかのどちらかである。どの 2 点間でも矛盾なく結べること、および各々について可能な線の引き方は 1 通りしかないことに注意する。なお、原理上は A4 のように 2 組の線を引くことができるが、実際に部品を配置した時には、「次数が 3 以下」の条件があるために  $n, s, w, e$  の全てに線が通ることはできないので、A4 のような状態はありえない (後述)。

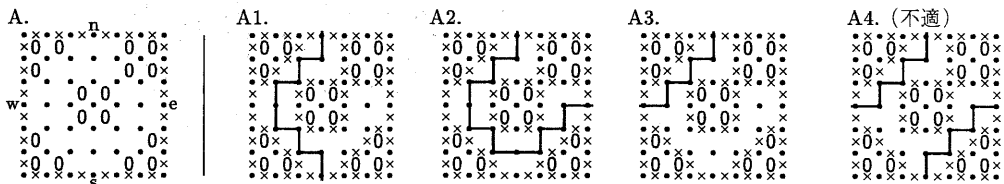


図 3: 必ずしも通らなくてもよい点 ( $\circ$ ) に対する部品

次に、「必ず通らなくてはならない点 ( $\bullet$ )」(元のグラフ  $G$  の頂点に対応する) に対応する gadget として図 4 の B のような部品を考える。これも周囲の辺には線が引かれないものと仮定する。この部品では、解完成時の内部の状態は、B1, B2, B3 のように  $n, s, w, e$  の中の 2 点が結ぶ線が引かれているものに限られ

る。(今度は '1' があるので部品内に必ず線が引かれる。) ここでも, 任意の 2 点間についてそれらを結ぶ線の引き方がただ 1 通り存在することが (少々考えれば) 確認される。

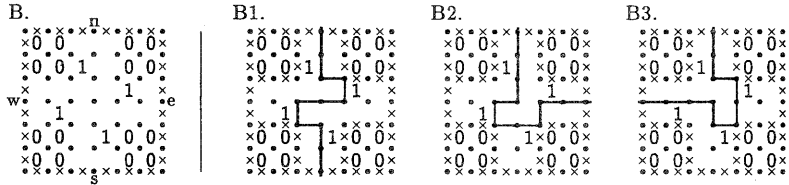


図 4: 必ず通らなくてはならない点 (●) に対する部品

これらの 2 つの部品をグリッド上のグラフ  $G'$  の位置関係と同じように配置する. その際に,  $G'$  で 2 頂点間に辺がない場合は図 5 の左図のように, 辺がある場合は右図のように, 対応する 2 部品の間を連結する. 右図の場合に限って, 2 つの部品をつなぐ線を引くことができる (引かなくてもよい). なお, どちらの場合も (前に仮定した通りに) 部品の周囲の辺を  $\times$  にすることが達成されることに注意する. また,  $G'$  の全ての点の次数が 3 以下なので, A の部品について  $n, s, w, e$  の全てに線が通ることはなく, A4 の状態が起これないことが保証される.

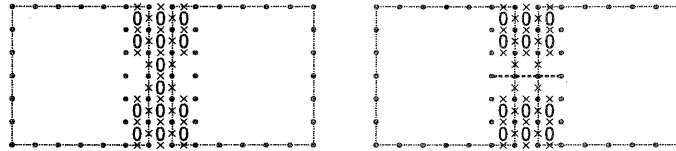


図 5: 部品の連結の方法

このようにして  $G'$  に対応するスリザーリンクの問題図が得られる. (問題図の外周の辺もやはり  $\times$  になる.) 次に変換の完全な例を示す.  $G'$  のハミルトン閉路に対応して構成される輪がスリザーリンクの 1 つの解となっている.

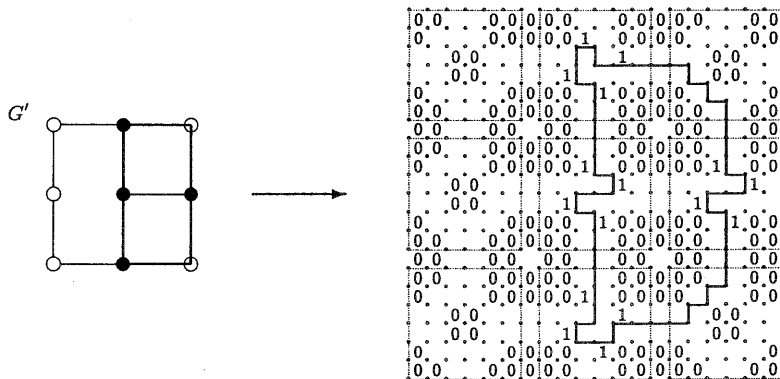


図 6: 変換の完全な例

元々のグラフ ( $G$ ) がハミルトン閉路をもつ時, またその時に限って, 構成されるスリザーリンクの問題が解をもつことは, 変換の仕方を考えると明らかである. また問題図のサイズは  $G$  の頂点数  $n$  に対して多項式オーダーであるので, この変換は多項式時間で計算可能である.

以上より, スリザーリンクの判定問題が NP 完全であることが証明された. ■

## 4 別解問題

NP 完全問題 II に対して

II のインスタンス (問題)  $D$  と、それに対する 1 つの解  $s$  が与えられたとき、 $D$  が  $s$  以外の解をもつかを判定する問題

のことを II の別解問題 (Another Solution Problem, ASP) ということにする。例えば、ハミルトン閉路問題の ASP は「グラフとその 1 つのハミルトン閉路が与えられた時に、グラフに他にハミルトン閉路があるかどうか」を判定する問題となる。ASP の名は Ueda, Nagao [16] に負うものであり、彼らは ASP の計算量を解析する方法を提唱し、それに基づいて「ののぐらむ」の ASP の NP 完全性を示している。ここでは彼らのアプローチに基づいて、スリザーリンクの ASP の NP 完全性について考察する。

先に述べたハミルトン閉路問題は、その ASP も NP 完全であることが知られている [10]。しかし一般には NP 完全問題の ASP がまた NP 完全であるとは限らない。例えば、ハミルトン閉路問題は全ての頂点の次数が 丁度 3 であるグラフに制限しても NP 完全である [7] が、

定理 4 次数が 3 のグラフがもしハミルトン閉路をもつなら、少なくとも 3 つのハミルトン閉路をもつ。

という事実 [10] より、次数が 3 のグラフに対するハミルトン閉路問題の ASP は自明 (必ず yes) である。

Ueda, Nagao [16] は ASP が「パズルの問題を作成する」ことに非常に関係があることを指摘している。一般に、パズルの問題を作成する方法の 1 つに次のようなものがある。

- 1° 先に解答の図面 (スリザーリンクだと輪) を作る。
- 2° それを満たすように問題の条件 (数字) を決める。
- 3° その問題を解いてみて、設定した答え以外に別解がなければ完成。

パズルでは答えが 1 つに決まることが常識なので 3° が要請される。この手順は「ののぐらむ」の場合は非常に自然である。(絵を描いて、それを問題にする。) 「スリザーリンク」の場合、この方法は人間が問題を作る時には通常用いられないが、コンピュータに問題を自動生成させる方法としては、十分考えられるものである。例えば、[15] ではスリザーリンクの問題を解くアルゴリズムを作成し、上記の方法を用いて問題を自動生成させて、その結果、非常に難度の高い問題を得ることに成功している。この方法の 3° はまさに、1 つ解が与えられて他の解を探すという作業になっている。従って、「1 つ解が分かっていることが問題を解くことを容易にするのか」を考えることが意味をもってくる。そこで、スリザーリンクの ASP の NP 完全性を示すことを考える。(成立すると予想しているが、まだ証明は完成していない。)

ASP の NP 完全性を示すには次の概念を使う。

定義 1 II, II' を判定問題として、 $\varphi$  を II から II' への還元 (many-one 還元) とする。  $I \in \text{II}$  に対し、 $I$  の解集合と  $\varphi(I) (\in \text{II}')$  の解集合の間に 1 対 1 対応が成立するとき、 $\varphi$  は **parsimonious reduction** であるという。

つまり、II の問題の解と II' の問題の解が 1 対 1 に対応するということである。もし II から II' への多項式時間 **parsimonious reduction**<sup>3</sup> があれば、II の ASP は II' の ASP に多項式時間で変換できる。従って、II の ASP が NP 完全であれば、II' の ASP も NP 完全であることが証明できる。

以上より、スリザーリンクの ASP の NP 完全性を示すには次の 2 つを示せば良い。

1. 各点の次数が 3 以下の平面グラフについてのハミルトン閉路問題の ASP が NP 完全である。
2. ハミルトン閉路問題からスリザーリンクへの多項式時間 **parsimonious reduction** が存在する。

実は、先の証明は **parsimonious reduction** になっている。これをいうためには、「あるハミルトン閉路に対応する、変換されたスリザーリンク問題の解は一意的である」ことを示せばよい。ところが、A, B の部品について、端点となる 2 点が指定されたときの部品内の線の引き方が一意的であることは既に確認されて

<sup>3</sup>厳密には「解の変換が多項式時間でできるもの」という条件が付く。

いるので、あるハミルトン閉路に対応するスリザーリンク問題の解の一意性は容易に確かめられる。従って、この変換は多項式時間 *parsimonious reduction* になっている。すなわち 2 は証明されている。

スリザーリンクの ASP の NP 完全性を示すには、あと「制限されたハミルトン閉路問題の ASP の NP 完全性」が示されなければならない。ハミルトン閉路問題の ASP に対する研究は広く行われているが、私の知る限り、このことを扱った論文は見当たらない。目下証明を試みているが、この証明はスリザーリンクの証明よりもはるかに難しそうである。

## 5 まとめ

スリザーリンクの解の存在判定問題を定式化し、制限されたハミルトン閉路問題からの多項式還元を用いて、それが NP 完全であることを示した。さらに、別解問題 (Another Solution Problem, ASP), すなわち問題とその解の 1 つが与えられた時に他に解があるかを判定する問題の NP 完全性について考察した。そして先の証明に用いた還元が *parsimonious reduction* であることを示して、スリザーリンクの ASP の NP 完全性の証明の指針を示した。

今後の課題として次のようなものが挙げられる。

- 制限されたハミルトン閉路問題の ASP の NP 完全性を証明して、スリザーリンクの ASP の NP 完全性の証明を完成させる。
- 実際にパズル雑誌等に掲載しているスリザーリンクを解く場合、問題が一意的な解を持つことが保証されている。このような解の一意性が保証されているスリザーリンク問題の難しさを調べる。このことは、解の一意性が保証されていることがパズルの問題を易しくするか否かという意義をもっている。また、この問題はクラス UP に属するという意味でも興味深い。
- ASP, 解の一意性が保証されている問題、および解の一意性を判定する問題の間の関係を調べる。

## 参考文献

- [1] 安達博行, 亀川裕之, 岩田茂樹, 「 $n \times n$  盤面上の将棋の指数時間完全性について」, 電子情報通信学会論文誌, Vol.J70-D, pp.1843-1852, 1987.
- [2] J. Culbarson, "Sokoban is PSPACE-complete", *Int. Conf. Fun with Algorithms*, Elba, June 1998. *Proceedings in Informatics 4*, Carleton Scientific, Waterloo, Canada, pp.65-76, 1999.
- [3] G. Di Battista, P. Eades, R. Tamassia and I. G. Tollis, *Graph Drawing*, Prentice Hall, 1999.
- [4] D. Eppstein, "Computational Complexity of Games and Puzzles", WWW Contents, <http://www.ics.uci.edu/~eppstein/cgt/hard.html>.
- [5] A. S. Fraenkel and D. Lichtenstein, "Computing a perfect strategy for  $n \times n$  chess requires time exponential in  $n$ ", *Proc. 8th Int. Coll. Automata, Languages, and Programming*, Springer LNCS 115, pp.278-293, 1981.
- [6] 藤原博文の館【JAVA とパズルの世界】, WWW contents, <http://www.pro.or.jp/~fuji/java/index.html>.
- [7] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman and Co., 1979.
- [8] S. Iwata and T. Kasai, "The Othello game on an  $n \times n$  board is PSPACE-complete", *Theor. Comp. Sci.*, Vol.123, pp.329-340, 1994.

- [9] 「ニコリ」ホームページ, WWW contents,  
<http://www.nikoli.co.jp/> .
- [10] C. H. Papadimitriou, *Computational complexity*, Addison-Wesley, 1994.
- [11] D. Ratner and M. Warmuth, "Finding a shortest solution for the  $N \times N$ -extension of the 15-puzzle is intractable", *J. Symb. Comp.*, Vol.10, pp.111-137, 1990.
- [12] S. Reisch, "Gobang ist PSPACE-vollständig", *Acta Inform.*, Vol.13, pp.59-66, 1980.
- [13] J. M. Robson, " $N$  by  $N$  checkers is EXPTIME-complete", *SIAM J. Comput.*, Vol.13, pp.252-267, 1984.
- [14] J. M. Robson, "The complexity of Go", *Proc. IFIP*, pp.413-417 1983.
- [15] T. Saito, "An algorithm for automatic generation of the Slither Link problems", Senior Thesis, Department of Information Science, the Faculty of Science, the University of Tokyo, 1998.
- [16] N. Ueda and T. Nagao, "NP-completeness results for NONOGRAM via parsimonious reductions", Technical report TR96-0008, Department of Computer Science, Tokyo Institute of Technology, 1996.
- [17] 横田雅也, 築地立家, 「一般化詰め将棋の指数時間完全性について」, 夏の LA シンポジウム, No.27, 2000.