

クロネッカー積グラフのデカルト積グラフによる 同型因子分解

菊地 洋右 柴田 幸夫

群馬大学工学部情報工学科

要旨

グラフの代表的な積としてデカルト積とクロネッカー積がある。本論文ではこのクロネッカー積とデカルト積の間の関係について考察する。与えられた二つのグラフを用いてクロネッカー積により構成したグラフ(クロネッカー積グラフ)とデカルト積により構成したグラフ(デカルト積グラフ)が同型となるための必要十分条件は J. D. Miller (1968) [?] によって示された。一般に与えられた二つのグラフに対してクロネッカー積グラフとデカルト積グラフの辺集合の濃度はクロネッカー積グラフの方が多くなることが知られている。そこで、クロネッカー積グラフがデカルト積グラフによって同型因子分解されるための十分条件を求めた。この結果は J. D. Miller (1968) の結果のある種の拡張となっている。

キーワード: クロネッカー積、デカルト積、同型因子分解、サーキュラントグラフ

On the factorization of Kronecker product of graphs

Yosuke Kikuchi and Yukio Shibata

Department of Computer Science, Gunma University

abstract

The Kronecker product and the cartesian product of graphs are kinds of well-known graph products. In this paper, we investigate relations between those two graph products and show a sufficient condition for the isomorphic factorization of the Kronecker product of graphs by the cartesian product of graphs. We show that if G is a circulant graph with transitive cycle system (tcs-circulant graph) and G has odd number of vertices, then the Kronecker product $G \otimes G$ has an isomorphic factorization into the factor $G \times G$ that is the cartesian product of G 's. Furthermore we obtain the result for disconnected graphs that is a sufficient condition for the isomorphic factorization of the Kronecker product of graphs by the cartesian product of graphs. These results extend the result by Miller (1968). Applying the main theorem for strong product of graphs, we also state the isomorphic factorization of the strong product of graphs by the cartesian product of graphs.

keywords: Kronecker product, cartesian product, factorization, circulant graph.

1 研究背景

グラフの代表的な構成法の一つにグラフの積がある。グラフの積の中でもデカルト積とクロネッカー積はもっとも良く知られている積である。

与えられた二つのグラフ G, H に対して G と H のデカルト積 $G \times H$ は頂点集合 $V(G \times H)$ として $V(G)$ と $V(H)$ の直積 $V(G) \times V(H)$ を持ち、二頂点 (u_1, v_1) と (u_2, v_2) が隣接するための必要十分条件は $u_1 = u_2$ かつ $\{v_1, v_2\} \in E(H)$ または $\{u_1, u_2\} \in E(G)$ かつ $v_1 = v_2$ のときである。このデカルト積を用いて定義されるグラフのクラスにはハイパーキューブ、メッシュ、wraparound mesh(トーラス) などがある。一方、クロネッカー積 [9] $G \otimes H$ は頂点集合 $V(G \otimes H) = V(G) \times V(H)$ を持ち、二頂点 (u_1, v_1) と (u_2, v_2) が隣接するための必要十分条件は $\{u_1, u_2\} \in E(G)$ かつ $\{v_1, v_2\} \in E(H)$ のときである。

これら二つの積の定義から辺集合の濃度はそれぞれ $|E(G \times H)| = |V(G)||E(H)| + |E(G)||V(H)|$, $|E(G \otimes H)| = 2|E(G)||E(H)|$ となっている。

J. D. Miller は [8] において与えられた二つのグラフ G, H について $G \times H$ と $G \otimes H$ が同型 ($G \times H \cong G \otimes H$) となる必要十分条件を求めた。

命題 1.1 (J. D. Miller(1968)[8])

与えられた二つの連結グラフ G, H について次が成り立つ。

$G \times H \cong G \otimes H$ となる必要十分条件は $G \cong H \cong C_n(n : \text{odd})$ または $G \cong H \cong K_1$

ここで C_n とは長さ $n(|V(C)| = n)$ のサイクルであり、 K_1 は自明なグラフである。本論文でサイクルについて次の表記を用いる。 $C_n = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$, $(a_j \in V(C_n), 0 \leq j \leq n-1)$ と書き a_i, a_{i+1} ($0 \leq i \leq n-2$) と a_0, a_{n-1} は C_n で隣接しているものとする(図 1 参照)。図 1 において $C = (0, 3, 2, 6, 5, 8, 9, 1, 7, 4) = (0, 4, 7, 1, 9, 8, 5, 6, 2, 3)$ である。上記の命題 1.1 では同型について述べているが先に述べたように与えられた二つの連結グラフに対しクロネッカー積によって構成したグラフはデカルト積によるグラフの場合よりも多くの辺集合を生成するので、デカルト積グラフによるクロネッカー積グラフの同型因子分解を考えることができる。グラフ G がグラフ H によって同型因子分解

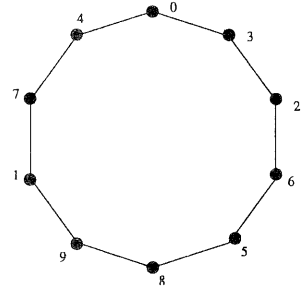


図 1: $C = (0, 3, 2, 6, 5, 8, 9, 1, 7, 4)$.

されるときを $H|G$ で表す。さらに、 G と H をグラフとしたとき、 $V(G) = V(H)$ かつ $E(G) \cap E(H) = \emptyset$ ならば G と H の辺和 $G \oplus H$ は次のように定義される。

$$V(G \oplus H) = V(G),$$

$$\text{かつ } E(G \oplus H) = E(G) \cup E(H).$$

また辺和 $G_0 \oplus G_1 \oplus \dots \oplus G_{n-1}$ を $\bigoplus_{i=0}^{n-1} G_i$ と表記する。本論文で用いる用語は [2, 3] に従う。

2 諸定義

全節で触れた以外の用語及び本論文特有の定義について述べる。本論文では後に定義 2.1 で定義するサーキュラントグラフのあるクラスが重要となるので、まずサーキュラントグラフの定義を述べる。

与えられた整数 n に対し、整数列: a_1, a_2, \dots, a_k が

$$0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k < (n+1)/2$$

を満たすものとする。このとき、サーキュラントグラフ $C_n(a_1, a_2, \dots, a_k)$ は 0 から $n-1$ までの整数をラベルとして持つ頂点集合を持ち、頂点 u は $u \pm a_j \pmod{n}$ ($j = 1, 2, \dots, k$) をラベルに持つ頂点と隣接する。 a_i ($i = 1, 2, \dots, k$) をジャンプサイズと呼ぶ(図 2 参照)。次に、サーキュラントグラフに関していくつかの定義を与える。

定義 2.1 サーキュラントグラフ $C_p(n_1, n_2, \dots, n_k)$ において各 $C_p(n_i)$, ($1 \leq i \leq k$) を $C_p(n_1, n_2, \dots, n_k)$ のコンポーネントと呼ぶ。

図 2 において $C_{12}(3)$ は $C_{12}(1, 3, 4)$ のコンポーネン

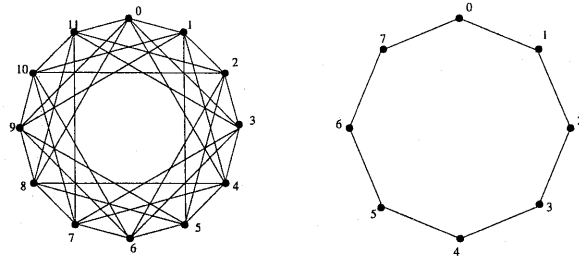


図 2: $C_{12}(1,3,4)$ と $C_8(1)$.

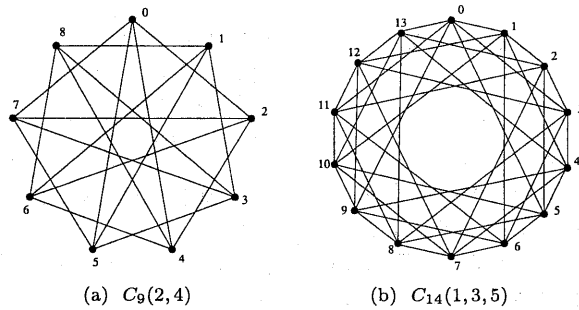


図 3: (a) cs-circulant graph $C_9(2,4)$, (b) tcs-circulant graph $C_{14}(1,3,5)$.

トの一つである。また、 $C_8(1)$ は $C_8(1)$ という一つのコンポーネントからなるグラフであり、サイクルである。コンポーネント $C_p(k)$ において p と k が互いに素ならば $C_p(k)$ はサイクルとなる。

定義 2.2 サーキュラントグラフ $C_p(n_1, n_2, \dots, n_k)$ が circulant graph with cycle system (cs-circulant graph と呼ぶ) であるとは、各 i に対し $\gcd(p, n_i) = 1$ であるときを言う。言い替えると各コンポーネントが $C_p(n_1, n_2, \dots, n_k)$ のハミルトンサイクルとなっているときを cs-circulant graph と言う。図 3 の $C_9(2,4)$ と $C_{14}(1,3,5)$ は cs-circulant graph の例である。

定義 2.3 サーキュラントグラフ $C_p(n_1, n_2, \dots, n_k)$ が circulant graph with transitive component system (ts-circulant graph と呼ぶ) であるとは、サーキュラントグラフのコンポーネント上のある置換 θ が存在し θ によって各コンポーネントが可移である時を言う。また、この置換を ts-permutation と呼ぶ。ts-circulant graphs の例として $C_{14}(1,3,5)$ と $C_{18}(2,4,8)$ をそれぞれ図 3 (b) と図 4 に示す。

図 3 (b) の $C_{14}(1,3,5)$ に対して ts-permutation θ は $\theta = (1\ 3\ 9\ 13\ 11\ 5)(2\ 6\ 4\ 12\ 8\ 10)$ であり、図 4 の $C_{18}(2,4,8)$ に対して ts-permutation θ は $\theta = (2\ 4\ 8\ 16\ 14\ 10)(6\ 12)(3\ 5\ 9\ 17\ 15\ 11)(7\ 13)$ である。一方 $C_9(2,4)$ は ts-circulant ではない(図 3 (a) 参照)。

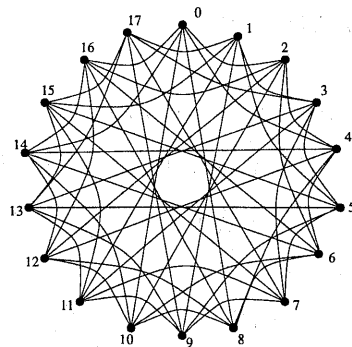


図 4: $C_{18}(2,4,8)$.

定義 2.4 circulant graph with transitive cycle system (tcs-circulant graph と呼ぶ) はサーキュラントグラフが cs-circulant かつ ts-circulant であるときを言い、tcs-circulant graph のコンポーネント上の置換を tcs-permutation と言う。tcs-circulant graph の例として $C_{14}(1, 3, 5)$ を図 3 (b) に示す。また、 $C_9(2, 4)$ と $C_{18}(2, 4, 8)$ は tcs-circulant graph ではない例である (図 3 (a), 4 参照)。

Miller[8] は命題 1.1 を示す際に、 $C_n \times C_n$ から $C_n \otimes C_n$ への同型写像として以下のものを用いている。 $C_n = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ とし、 $0 \leq i \leq n-1$, $0 \leq j \leq n-1$ なる i, j に対して同型写像 ϕ' は

$$\phi'(a_i, a_j) = (a_{j+i}, a_{j-i})$$

で与えられ、添字は n を法とする。また、サーキュラントグラフの積については Broere と Hattingh によって [1] で考察されている。デカルト積へのグラフの埋め込みは Imrich によって [7] で研究された。さらに、同型因子分解については Harray らの研究がある [4, 5, 6]。まず ts-circulant graph に対して次の補題を述べ、この論文の主定理を述べる。

補題 2.5 k 個のコンポーネントを持つ ts-circulant graph に対してその ts-permutation θ は位数 k の巡回群を生成する。

証明 ts-permutation の定義より明らか。 ■

tcs-circulant graph G の性質より $G \times G$ と $G \otimes G$ の関係に関して次の定理を得る。

定理 2.6 G が tcs-circulant graph であり、かつ $|V(G)|$ が奇数ならば、 $G \times G \mid G \otimes G$ が成り立つ。

定理 2.6 を示すためにいくつかの補題を示す。

補題 2.7 C をサイクルとする。 $C \mid G$ かつ $kC = G$ ならば、 $G \times G = \bigoplus_{i=1}^k (C_{(i)} \times C_{(i)})$ 、但し $C_{(i)} \cong C$ ($i = 1, \dots, k$) とする。

証明 $G = C_{(1)} \oplus C_{(2)} \oplus \dots \oplus C_{(k)}$ とすると、
 $G \times G = (C_{(1)} \oplus C_{(2)} \oplus \dots \oplus C_{(k)}) \times (C_{(1)} \oplus C_{(2)} \oplus \dots \oplus C_{(k)}) = (C_{(1)} \times C_{(1)}) \oplus (C_{(2)} \times C_{(2)}) \oplus \dots \oplus (C_{(k)} \times C_{(k)}) = \bigoplus_{i=1}^k (C_{(i)} \times C_{(i)})$

となる。 ■

補題 2.8 $C = (0, 1, 2, \dots, 2m)$ かつ写像 ϕ を $\phi(C \otimes C) = C \times C$ である同型写像とする。 $\phi(i, j) = (a, b)$ ならば $\phi(i-1, j-1)$ は $(a-1, b), (a+1, b), (a, b-1), (a, b+1)$ のいずれかに写される。(ただし、演算は n を法とする。)

証明 $C \otimes C$ における (i, j) と $(i-1, j-1)$ の隣接性より従う。 ■

補題 2.9 $C = (0, 1, 2, \dots, 2m)$ かつ、写像 ϕ を $\phi(C \otimes C) = C \times C$ である同型写像とする。 $V(C \otimes C)$ の頂点 (i, i) ($0 \leq i \leq 2m$) は第一成分または第二成分がすべて等しくなる。

証明 補題 2.8 より従う (図 5 参照)。 ■

次にサイクル上の equidistant permutation を定義する。

定義 2.10 サイクル C 上の equidistant permutation とは $V(C)$ のラベル上の置換 τ が任意の頂点 v に対し $\tau(v)$ が異なる 2 頂点 $\tau(u)$ と $\tau(u')$ に隣接しているとき $d_C(v, u) = d_C(v, u')$ となるときを言う。 $d_G(u, v)$ とはグラフ G における頂点 u, v 間の距離であり、頂点 u, v を結ぶ最短パス P の長さ (辺の数) で定義する。

equidistant permutation の例を挙げる。サイクル $C = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ に対して $\tau = (1, 3, 9, 7)(2, 6, 8, 4)$ とすると $\tau(C) = (0, 3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7)$ となり、 τ は equidistant permutation である (図 6 参照)。

補題 2.11 $C = (0, 1, 2, \dots, 2m)$ とし、写像 ϕ を $\phi(C \otimes C) = C \times C$ となる同型写像、また τ, ψ を $V(C)$ のラベル上の置換とする。

このとき、 $\phi(\tau(C) \otimes \psi(C)) = \tau(C) \times \psi(C)$ となる必要十分条件は τ と ψ が C の同じ equidistant permutation であることである。

証明 (必要性) $\phi(\tau(C) \otimes \psi(C)) = \tau(C) \times \psi(C)$ とし、 $\tau = \psi$ かつ τ は equidistant permutation

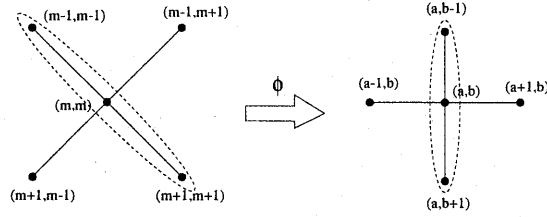


図 5: ϕ のもとでの頂点の対応

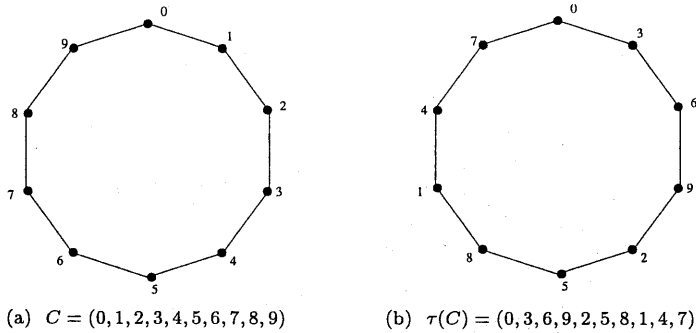


図 6: C_{10} の equidistant permutation

ではないとする。 τ が equidistant permutation ではないことから、異なる三つの頂点 v, w, w' が存在し $\tau(v)\tau(w) \in E(\tau(C))$ 、 $\tau(v)\tau(w') \in E(\tau(C))$ かつ $d_C(v, w) \neq d_C(v, w')$ を満たす。一般性を失うことなく $d_C(v, w) = s$ 、 $d_C(v, w') = t$ かつ $s < t$ とできる。このとき、 $\tau(C) \otimes \tau(C)$ での頂点 $(\tau(v), \tau(v))$ の隣接性を考える。 τ は C 上の隣接性のみ作用するので、 $\phi(\tau(v), \tau(v)) = \phi(\tau(v), \tau(v))$ である。頂点 $(\tau(v), \tau(v))$ は次のちょうど四つの頂点 $(\tau(w), \tau(w))$ 、 $(\tau(w), \tau(w'))$ 、 $(\tau(w'), \tau(w))$ 、 $(\tau(w'), \tau(w'))$ と隣接する。 $d_C(v, w) = s$ 、 $d_C(v, w') = t$ より $(\tau(w), \tau(w)) = (v - s, v - s)$ 、 $(\tau(w), \tau(w')) = (v - s, v + t)$ 、 $(\tau(w'), \tau(w)) = (v + t, v - s)$ 、 $(\tau(w'), \tau(w')) = (v + t, v + t)$ となる。ただし、 $v - s, v + t$ は $2m + 1$ を法とする。 $\phi(\tau(v), \tau(v)) = (a, b)$ とすると補題 2.8 より $\tau(C) \otimes \tau(C)$ から $\tau(C) \times \tau(C)$ への 8 通りの同型写像が考えられる。

まず、その 8 通りの同型写像の一つである $\phi(\tau(w),$

$\tau(w)) = (a, b - t)$ かつ $\phi(\tau(w'), \tau(w')) = (a, b + t)$ の場合を考える。 $(\tau(w), \tau(w')) = (e, f)$ かつ $(\tau(w'), \tau(w)) = (g, h)$ とする。補題 2.9 より、 $f \neq b$ かつ $h \neq b$ である。しかし $\phi(\tau(v), \tau(v)) = \phi(\tau(w'), \tau(w)) \in E(\tau(C) \times \tau(C))$ であり、 $\phi(\tau(v), \tau(v)) = \phi(\tau(w), \tau(w')) \in E(\tau(C) \times \tau(C))$ となる。よってこの同型写像 ϕ による隣接性は $C \times C$ での隣接性に反する。

他の場合においても同様に $C \times C$ での隣接性に反することになる。故に τ は equidistant permutation である。次に $\tau \psi$ が異なる二つの equidistant permutation とする。 $\tau \neq \psi$ より $\tau(v)\tau(w) \in E(\tau(C))$ 、 $\psi(v)\psi(w') \in E(\psi(C))$ 、 $d_C(v, w) \neq d_C(v, w')$ を満たす異なる三つの頂点 v, w, w' が存在する。この場合も先の議論と同様に $C \times C$ の隣接性に対して矛盾を導くことができる。

(十分性) 逆に $\tau = \psi$ とし、任意の頂点 v に対して v が $d_C(v, u) = d_C(v, u')$ を満たすようなちょうど二つの頂点 u, u' と隣接しているとする。任意の

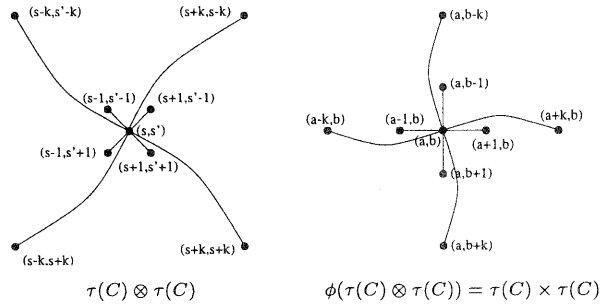


図 7: ϕ のもとでの頂点の対応

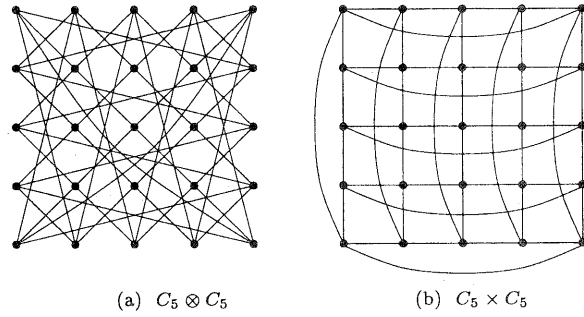


図 8: $C_5 \otimes C_5$ と $\phi(C_5 \otimes C_5) = C_5 \times C_5$.

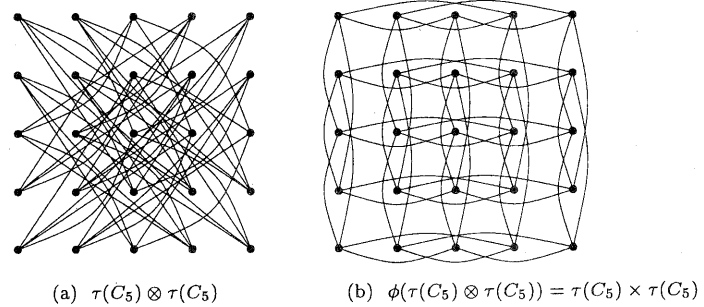
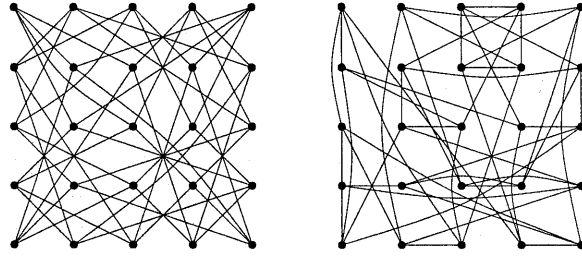


図 9: Equidistant permutation と同型写像 ϕ による像



(a) $\tau'(C_5) \otimes \tau'(C_5)$ (b) $\phi(\tau'(C_5) \otimes \tau'(C_5)) \neq \tau'(C_5) \times \tau'(C_5)$

図 10: Equidistant permutation でない置換を施し図 9 と同じ ϕ で写した像

頂点 $(v, v') \in C \otimes C$ に対して、 $(\tau(v), \tau(v')) = (s, s')$ とする。このとき、 (s, s') は $(s+k, s'+k)$, $(s+k, s'-k)$, $(s-k, s'+k)$, $(s-k, s'-k)$ の四つの頂点と隣接する。補題 2.9 より、 $\phi(s, s') = (a, b)$ ならば $\phi(s+k, s'+k) = (a, b+k)$, $\phi(s+k, s'-k) = (a-k, b)$, $\phi(s-k, s'+k) = (a+k, b)$, $\phi(s-k, s'-k) = (a, b-k)$ の四つの頂点と隣接することになる (図 7 参照)。 ■

補題 2.11 に対する例を図 8, 9, 10 に示す。 $C \otimes C$ から $C \times C$ への同型写像は様々なものがあるが、これらの図で用いられる ϕ はすべて命題 1.1 での ϕ' の逆写像としている。 $C_5 = (0, 1, 2, 3, 4)$ とする。 $C_5 \otimes C_5$ に ϕ を施すことで $C_5 \times C_5$ が得られる (図 8 参照)。 図 9 において、 $\tau(C) \otimes \tau(C)$ では $\tau = (1, 2, 4, 3)$ であり、これは C_5 での equidistant permutation である。 このとき、 $\phi(\tau(C) \otimes \tau(C)) = \tau(C) \times \tau(C)$ となっている。 一方、 図 10 では、 $\tau'(C) \otimes \tau'(C)$ に対して $\tau' = (2, 4)$ であり、これは C_5 での equidistant permutation ではない。 このとき $\phi(\tau'(C) \otimes \tau'(C)) \neq \tau'(C) \times \tau'(C)$ となっている。

補題 2.12 G を k 個のハミルトニアン サイクル $C_{(i)}$ ($1 \leq i \leq k$) で同型因子分解できるグラフとする。 さらに、ある同型写像 θ が存在し、 $\theta(C_{(i)}) = C_{(i+1)}$, ($1 \leq i \leq k-1$), $\theta(C_{(k)}) = C_{(1)}$ を満たすものとする。 このとき、 $(C_{(1)} \otimes C_{(1)}) \oplus (C_{(2)} \otimes C_{(2)}) \oplus \dots \oplus (C_{(i)} \otimes C_{(i)}) \oplus \dots \oplus (C_{(k)} \otimes C_{(k)})$ は $G \otimes G$ を同型因子分解する。

証明

$$G \otimes G = (C_{(1)} \otimes C_{(1)}) \oplus (C_{(1)} \otimes C_{(2)}) \oplus \dots \oplus (C_{(1)} \otimes$$

$$C_{(k)}) \oplus (C_{(2)} \otimes C_{(1)}) \oplus (C_{(2)} \otimes C_{(2)}) \oplus \dots \oplus (C_{(2)} \otimes C_{(k)}) \oplus \dots \oplus (C_{(k)} \otimes C_{(1)}) \oplus (C_{(k)} \otimes C_{(2)}) \oplus \dots \oplus (C_{(k)} \otimes C_{(k)}).$$

ここで同型写像 $\theta(C_{(1)}) = C_{(2)}$ を考える。 C_i の構成の仕方から $\theta(C_{(i)}) = C_{(i+1)}$ である。 よって $(C_{(1)} \otimes C_{(1)}) \oplus (C_{(2)} \otimes C_{(2)}) \oplus \dots \oplus (C_{(k)} \otimes C_{(k)}) \cong (C_{(1)} \otimes C_{(k)}) \oplus (C_{(2)} \otimes C_{(1)}) \oplus (C_{(3)} \otimes C_{(2)}) \oplus \dots \oplus (C_{(k)} \otimes C_{(k-1)})$ となる。

同様に同型写像 $\theta^j(C_{(i)}) = C_{(i+j)}$ を用いれば、 $C_{(i+j)} \otimes C_{(i)} \cong C_{(i+j)} \otimes C_{(i+j)}$ を得る。 よって、

$$\sum_{i=1}^k \oplus (C_{(i)} \otimes C_{(i)}) \cong (C_{(1)}, C_{(1-j)}) \oplus (C_{(2)}, C_{(2-j)}) \oplus \dots \oplus (C_{(k)}, C_{(k-j)})$$

$$\text{故に } \bigoplus_{i=1}^k (C_{(i)} \otimes C_{(i)}) \cong \bigoplus_{i=1}^k (C_{(i)} \otimes C_{(i-1)}) \cong \dots \cong \bigoplus_{i=1}^k (C_{(i)} \otimes C_{(i-n+1)})$$

$$G \otimes G = n \left(\bigoplus_{i=1}^n (C_{(i)} \otimes C_{(i)}) \right) \text{ かつ、 } |V(G \otimes G)| =$$

$$|V(\bigoplus_{i=1}^n (C_{(i)} \otimes C_{(i)}))|.$$

$$\text{よって } C_{(i)} \otimes C_{(j)} \mid \bigoplus_{k=1}^n (C_{(k)} \otimes C_{(k)}) \mid G \otimes G \text{ である。}$$

■

補題 2.13 任意の tcs-permutation は equidistant permutation である。

証明 tcs-permutation の定義より従う。 ■

定理 2.6 の証明 補題 2.7 より、

$$G \times G = C_p(a_1, a_2, \dots, a_k) \times C_p(a_1, a_2, \dots, a_k) =$$

$$\bigoplus_{i=1}^k (C_{(i)} \times C_{(i)}). \text{ 命題 1.1 より、 } \chi(C_{(1)} \otimes C_{(1)}) =$$

$C_{(1)} \times C_{(1)}$ を満たす同型写像 χ が存在する。補題 2.11, 2.13 より、 $\chi(C_{(i)} \otimes C_{(i)}) = C_{(i)} \times C_{(i)}$. 故に $G \times G \cong \bigoplus_{i=1}^k (C_{(i)} \otimes C_{(i)})$. 補題 2.12 より、 $G \times G | G \otimes G$ を得る。 ■

例として $C_9(1, 2, 4) \times C_9(1, 2, 4) | C_9(1, 2, 4) \otimes C_9(1, 2, 4)$ を示す。

$$C_9(1) = C_{(1)} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9),$$

$$C_9(2) = C_{(2)} = (1, 3, 5, 7, 9, 2, 4, 6, 8),$$

$$C_9(4) = C_{(3)} = (1, 5, 9, 4, 8, 3, 7, 2, 6)$$

とする。置換 $\theta = (2, 3, 5, 9, 8, 6)(4, 7)$ とする。このとき $\theta(C_{(1)}) = C_{(2)}$, $\theta(C_{(2)}) = C_{(3)}$, $\theta(C_{(3)}) = C_{(1)}$ である。故に $C_9(1, 2, 4) \times C_9(1, 2, 4) | C_9(1, 2, 4) \otimes C_9(1, 2, 4)$ である。

系 2.14 n が素数ならば $K_n \times K_n | K_n \otimes K_n$ である。

証明 $K_n = C_n(1, 2, 3, \dots, (n-1)/2)$ と書ける。よってこのとき K_n は tcs-circulant graph である。 ■

グラフの積の一つに強積がある。グラフ G と H の強積 $G \odot H$ は頂点集合 $V(G) \times V(H)$ と辺集合 $E(G \times H) \cup E(G \otimes H)$ として定義される。この強積に対して次が成り立つ。

系 2.15 G が tcs-circulant graph かつ $|V(G)|$ が奇数ならば $G \times G | G \odot G$ である。

証明 強積の定義と定理 2.6 より従う。 ■

参考文献

- [1] I. Broere and J. H. Hattingh, Products of circulant graphs, *Quaestiones Math.* 13(1990) 191–216.
- [2] G. Chartrand and L. Lesniak, *Graphs & Digraphs, 3rd Ed.*, Chapman & Hall, London, 1996.
- [3] J. Gross and J. Yellen, *Graph Theory and Its Applications*, CRC Press, NY, 1999.
- [4] F. Harary and R. W. Robinson, Isomorphic factorizations X: Unsolved problems, *J. Graph Theory* 9(1985) 67–86.
- [5] F. Harary, R. W. Robinson and N. C. Wormald, Isomorphic factorisations I: Complete graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.* 242(1978) 243–260.
- [6] F. Harary, R. W. Robinson and N. C. Wormald, Isomorphic factorisations III: Complete multipartite graphs, in: *Proceedings of the International Conference on Combinatorial Theory (Canberra)*, Lecture Notes in Math. Vol. 686 (Springer, Berlin, 1978) 47–54.
- [7] W. Imrich, Embedding graphs into cartesian products, *Ann. New York Acad. Sci.* 576(1989) 266–274.
- [8] D. J. Miller, The categorical product of graphs, *Canad. J. Math.* 20(1968) 1511–1521.
- [9] P. M. Weichsel, The Kronecker product of graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.* 13(1962) 47–52.