スケーリング技法を用いたM凸関数の最小化アルゴリズム

森口聡子* 室田一雄† 塩浦昭義*
*上智大学機械工学科
†京都大学数理解析研究所

あらまし M凸関数は，整数格子点上で定義された関数のクラスとして，1996年に室田により提案された概念である．その後の研究により，M凸関数は離散凸性として相応しい諸性質を満たすことが示された．とくに，M凸関数の最小解は貪欲算法（降下法）により求められる．本稿では，貪欲算法にスケーリング技法を適用し，M凸関数の最小化問題に対する効率的なアルゴリズムを提案する．

キーワード: マトロイド，凸関数，最小化，離散最適化．

Minimization of an M-convex Function with a Scaling Technique

Satoko MORIGUCHI* Kazuo MUROTA† Akiyoshi SHIOURA*
*Department of Mechanical Engineering, Sophia University
†Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University

Abstract The concept of M-convex functions was introduced by Murota (1996) as a class of functions defined over integer lattice. It is shown that M-convex functions have various desirable properties as convexity in discrete optimization. We can find a global minimum of an M-convex function by a greedy algorithm, i.e., so-called descent algorithms work for the minimization. In this paper, we apply a scaling techique to a greedy algorithm and propose an efficient algorithm for the minimization of an M-convex function.

Keywords: matroid, convex function, minimization, discrete optimization.

1 はじめに

離散最適化の分野では，貪欲算法がうまく動くために必要な離散構造を明確にしようという研究が長い間続けられており，その試みの一つとして，離散的な凸関数，すなわち「離散凸性」が多くの研究者によって提案されている．なかでも，1996年に室田 [8, 9, 11] により提案されたM凸関数は，

(i) 局所最適性=大域的最適性，
(ii)（通常の意味での）凸関数に拡張可能，
(iii) 各種双対定理の成立，
(iv) L凸関数との共役性，

など，離散凸関数と呼ぶに相応しい性質を有している．特に性質 (i) により，M凸関数の最小化は貪欲算法 (降下法) により解けることがわかる．M凸性は様々な状況で現れる実に自然な概念で

ある．線形関数や分離凸関数はM凸関数であるし，もっと一般的には費用関数が分離凸関数である最小費用流問題でもM凸関数が現れる．

M凸関数は次のように定義される．V を有限集合とする．関数 $f : \mathbf{Z}^V \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ がM凸関数であるとは，f が交換公理 (M-EXC) を満たすことである．

(M-EXC) $\forall x, y \in \mathrm{dom}\, f$, $\forall u \in \mathrm{supp}^+(x-y)$, $\exists v \in \mathrm{supp}^-(x-y)$ such that

$$f(x) + f(y) \geq f(x - \chi_u + \chi_v) + f(y + \chi_u - \chi_v).$$

ここで，

$$\mathrm{dom}\, f = \{x \in \mathbf{Z}^V \mid f(x) < +\infty\},$$
$$\mathrm{supp}^+(x-y) = \{w \in V \mid x(w) > y(w)\}, \qquad \mathrm{supp}^-(x-y) = \{w \in V \mid x(w) < y(w)\},$$

であり，$\chi_w \in \{0,1\}^V$ は $w \in V$ の特性ベクトルとする．

本稿では，M凸関数の最小化問題について考える．先に述べたように，降下法を用いてM凸関数を最小化できるが，最急降下法を用いると擬多項式時間で終了することが知られている．また，塩浦 [13] により多項式時間算法が提案されているが，その時間計算量は

$$n = |V|, \qquad L = \max\{\|x - y\|_\infty \mid x, y \in \mathrm{dom}\, f\}$$

とおくと $\mathrm{O}(n^4 (\log L)^2)$ であり，効率的なアルゴリズムとは必ずしも言えず，実用的にも遅いことが実験的に知られている．

本稿の目的は，スケーリング技法を適用することによりM凸関数の最小化アルゴリズムの効率化を行うことである．スケーリングは擬多項式時間算法を多項式時間算法に効率化するための基本的な技法であり，資源配分問題 [6] や最小費用流問題 [1] などに対して適用されており，成功を収めている．一般にM凸関数はスケーリングに関して閉じていないが，分離凸関数や 2 次のM凸関数など，様々なクラスのM凸関数がスケーリングに関して閉じている．このようなクラスのM凸関数に対し，最急降下法とスケーリング技法を組み合わせた効率的な算法を提案する．

本稿の構成は次の通りである．第 2 節では，スケーリングに関して閉じているM凸関数のクラスを紹介する．提案するスケーリング算法の正当性を示すために必要な定理を第 3 節で示し，第 4 節ではスケーリング算法について詳しく説明する．最後に，第 5 節において運搬経路問題への応用を紹介する．

2　M凸関数のスケーリング

正の整数 α とベクトル $b \in \mathbf{Z}^V$ に対して $f^{\alpha,b} : \mathbf{Z}^V \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ を

$$f^{\alpha,b}(x) = f(\alpha x + b) \qquad (x \in \mathbf{Z}^V)$$

と定義する．この操作をスケーリングと呼ぶ．例えば $\alpha = 2$, $b = \mathbf{0}$ とすると，偶数点上だけの関数値を考えることに対応する．一般に f がM凸関数であっても $f^{\alpha,b}$ はM凸関数とは限らない．すなわち，一般にはM凸関数はスケーリングについて閉じていない．しかしながら，下記に述べるクラスのM凸関数はスケーリングについて閉じている．

例 2.1. （分離凸関数） 現実の世界で現れる問題には．$f(x)$ が $x=(x_i \mid i=1,\cdots,n)$ の各成分 x_i の凸関数 $f_i(x_i)$ の和として $f(x)=\sum_{i=1}^n f_i(x_i)$ のように書ける場合（変数分離形の場合）がしばしばある．β を任意の整数とするとき，次の関数はM凸関数である．

$$f(x)=\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^n f_i(x_i) & \text{if } \ x(V)=\beta, \\ +\infty & \text{その他.} \end{cases}$$

ここで，$S\subseteq V$ に対して，$x(S)=\sum_{v\in S} x(v)$ とおく．$f^{\alpha,b}(x)=\sum_{i=1}^n f_i(\alpha x_i+b_i)$ は分離凸関数であることから，分離凸関数はスケーリングについて閉じている．

例 2.2. （2次のM凸関数） $A=(a_{ij})\in \mathbf{R}^{n\times n}$ を対称行列とするとき，2次関数

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^TAx & \text{if } x(V)=0, \\ +\infty & \text{その他.} \end{cases}$$

がM凸関数となるための必要十分条件は，

$$\forall i,j,k,l\in V,\ \{i,j\}\cap\{k,l\}=\emptyset \Longrightarrow a_{ij}+a_{kl}\geq \min(a_{ik}+a_{jl}, a_{il}+a_{jk})$$

が成り立つことである [12]．例えば，行列

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

はこの条件を満たしている．

$$f^{\alpha,b}(x)=\frac{1}{2}(\alpha x+b)^TA(\alpha x+b)=\frac{\alpha^2}{2}x^TAx+\alpha b^TAx+\frac{1}{2}b^TAb$$

において，第1項は2次のM凸関数であり，それ以外の項は線形関数である．$u\in \mathrm{supp}^+(x-y)$ に対して第1項のM凸関数の (M-EXC) から定まる $v\in \mathrm{supp}^-(x-y)$ が $f^{\alpha,b}$ の (M-EXC) を成立させる．ゆえに，2次のM凸関数はスケーリングについて閉じている．

例 2.3. （ツリー型関数） V の部分集合の族 $\mathcal{T}$ が次のような性質をもつならば，族 $\mathcal{T}$ は、層族 (*laminar family*) と呼ばれる．

任意の $X,Y\in\mathcal{T}$ に対して，$X\cap Y=\emptyset$，または $X\subseteq Y$，または $X\supseteq Y$.

層族 $\mathcal{T}$ の各要素 $X\in\mathcal{T}$ に対して凸関数 $f_X:\mathbf{Z}\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ が与えられていると仮定し，β を任意の整数とする．このとき，関数

$$f(x)=\begin{cases} \displaystyle\sum_{X\in\mathcal{T}} f_X(x(X)) & \text{if } \ x(V)=\beta, \\ +\infty & \text{その他,} \end{cases}$$

をツリー型関数 と呼ぶことにする．ツリー型関数のM凸性およびツリー型関数がスケーリングについて閉じていることは次のように示される．

一般性を失うことなく，$\mathcal{T}$ に V が含まれると仮定する．そうでないときには，V を $\mathcal{T}$ に付け加えて，$f_V(\alpha) = 0$ $(\forall \alpha \in \mathbf{Z})$ と仮定する．一般に $X \in \mathcal{T}$ に対して，X に含まれる $\mathcal{T}$ の極大元 $(\neq X)$ の全体を $\mathcal{T}(X)$ と書くと，

$$x(X) = \sum \{x(Y) \mid Y \in \mathcal{T}(X)\} + \sum \{x(v) \mid v \in X \setminus \bigcup_{Y \in \mathcal{T}(X)} Y\} \tag{1}$$

が成り立つ．(M-EXC) における $x, y \in \mathrm{dom}\, f$，$u \in \mathrm{supp}^+(x-y)$ をとる．(M-EXC) を満たすことを示すには，

$$u \in X,\ v \notin X,\ X \in \mathcal{T} \implies x(X) > y(X), \tag{2}$$

$$u \notin X,\ v \in X,\ X \in \mathcal{T} \implies x(X) < y(X) \tag{3}$$

を満たす $v \in \mathrm{supp}^-(x-y)$ の存在を示せばよい．$u \in X$，$x(X) \leq y(X)$ を満たす $X \in \mathcal{T}$ のうちで最小のものを X_0 とする．X_0 の最小性と式 (1) により (i) $\exists v \in X_0 \setminus \bigcup_{Y \in \mathcal{T}(X_0)} Y : x(v) < y(v)$，または (ii) $\exists X_1 \in \mathcal{T}(X_0) : x(X_1) < y(X_1)$ である．(i) の場合には，この v が (2)，(3) を満たす．(ii) の場合には，式 (1) により，(i) $\exists v \in X_1 \setminus \bigcup_{Y \in \mathcal{T}(X_1)} Y : x(v) < y(v)$，または (ii) $\exists X_2 \in \mathcal{T}(X_1) : x(X_2) < y(X_2)$ である．この議論を繰り返すと，最後には (i) の場合に至る．したがってツリー型関数はM凸である．

また，

$$f^{\alpha,b}(x) = \sum_{X \in \mathcal{T}} f_X(\alpha x(X) + b(X))$$

はツリー型関数であることから，ツリー型関数はスケーリングについて閉じている．

3 M凸関数の最小解の性質

本稿で提案する算法は，M凸関数の大域的な最小性は局所的な最小性で保証されることと，α 局所最小解の近傍に大域的な最小解が存在するという事実を利用した算法である．

関数 f の最小値集合を $\arg\min f$ という記号で表す．すなわち，$\arg\min f = \{x \in \mathbf{Z}^V \mid f(x) \leq f(y)\ (\forall y \in \mathbf{Z}^V)\}$ である．以下，$f : \mathbf{Z}^V \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ はM凸関数とする．

定理 3.1 (室田 [8, 9]). $x \in \mathrm{dom}\, f$ に対して，$f(x) \leq f(y)$ $(\forall y \in \mathbf{Z}^V)$ が成り立つための必要十分条件は $f(x) \leq f(x - \chi_u + \chi_v)$ $(\forall u, v \in V)$ である．

定理 3.2 (塩浦 [13]). $x \in \mathrm{dom}\, f$ は f の最小解でないとし，$u, v \in V$ は $f(x - \chi_u + \chi_v) = \min_{s,t \in V} f(x - \chi_s + \chi_t)$ を満たすとする．このとき，$x_*(u) \leq x(u) - 1$，$x_*(v) \geq x(v) + 1$ を満たす f の最小解 $x_* \in \arg\min f$ が存在する．

$x_\alpha \in \mathrm{dom}\, f$ に対し, $f(x_\alpha) \le f(x_\alpha + \alpha(\chi_v - \chi_u))$ $(\forall u, v \in V)$ が成り立つとき, x_α を f の α 局所最小解と呼ぶ. 次の定理は, α 局所最小解の近傍にM凸関数の最小解が存在することを示している.

定理 3.3. α は任意の正の整数とする. $x_\alpha \in \mathrm{dom}\, f$ は $f(x_\alpha) \le f(x_\alpha + \alpha(\chi_v - \chi_u))$ $(\forall u, v \in V)$ を満たすとする. このとき, $\arg\min f \ne \emptyset$ であり,

$$|x_\alpha(v) - x_*(v)| \le (n-1)(\alpha - 1) \qquad (v \in V) \tag{4}$$

を満たす $x_* \in \arg\min f$ が存在する.

証明　任意の $\gamma > \inf f$ に対して, $f(x_*) \le \gamma$ および (4) を満たす $x_* \in \mathrm{dom}\, f$ が存在することを示せば十分である. $x_* \in \mathrm{dom}\, f$ は $f(x_*) \le \gamma$ を満たし, このようなベクトル全ての中で $\|x_* - x_\alpha\|_1$ を最小化すると仮定する. $v \in V$ を固定し, $x_\alpha(v) - x_*(v) \le (n-1)(\alpha-1)$ を証明する. ($x_*(v) - x_\alpha(v) \le (n-1)(\alpha-1)$ も同様に証明できる.) ここで $x_\alpha(v) > x_*(v)$ と仮定してよい. 次の 2 つの主張を示す. $k = x_\alpha(v) - x_*(v)$ とおく.

主張 1. ある $w_1, w_2, \cdots, w_k \in V \setminus \{v\}$ および $y_0(= x_\alpha), y_1, \cdots, y_k \in \mathrm{dom}\, f$ が存在して,

$$y_i = y_{i-1} - \chi_v + \chi_{w_i}, \quad f(y_i) < f(y_{i-1}) \quad (i = 1, \cdots, k)$$

が成り立つ.

[主張 1 の証明] i に関する帰納法により証明を行う. $y_{i-1} \in \mathrm{dom}\, f$ と仮定する. y_{i-1}, x_*, および $v \in \mathrm{supp}^+(y_{i-1} - x_*)$ に対して (M-EXC) を適用することにより, ある $w_i \in \mathrm{supp}^-(y_{i-1} - x_*) \subseteq \mathrm{supp}^-(x_\alpha - x_*) \subseteq V \setminus \{v\}$ が存在し, $f(x_*) + f(y_{i-1}) \ge f(x_* - \chi_{w_i} + \chi_v) + f(y_{i-1} + \chi_{w_i} - \chi_v)$ となる. $\|(x_* + \chi_v - \chi_{w_i}) - x_\alpha\|_1 < \|x_* - x_\alpha\|_1$ であるので x_* の選び方により, $f(x_* + \chi_v - \chi_{w_i}) > f(x^*)$ である. したがって, $f(y_i) = f(y_{i-1} - \chi_v + \chi_{w_i}) < f(y_{i-1})$ を得る. [主張 1 の証明終り]

主張 2. 任意の $y_k(w) > x_\alpha(w)$ なる $w \in V \setminus \{v\}$ と $\alpha \in [0, y_k(w) - x_\alpha(w) - 1]$ に対し,

$$f(x_\alpha - (\alpha+1)(\chi_v - \chi_w)) < f(x_\alpha - \alpha(\chi_v - \chi_w)). \tag{5}$$

[主張 2 の証明] α に関する帰納法により証明を行う. $\alpha \in [0, y_k(w) - x_\alpha(w) - 1]$ に対して $x' = x_\alpha - \alpha(\chi_v - \chi_w)$ とおき, $x' \in \mathrm{dom}\, f$ と仮定する. j_* $(1 \le j_* \le k)$ を $w_{j_*} = w$ である最大の添字とする. このとき, $y_{j_*}(w) = y_k(w) > x'(w)$ かつ $\mathrm{supp}^-(y_{j_*} - x') = \{v\}$ である. よって (M-EXC) より $f(x') + f(y_{j_*}) \ge f(x' - \chi_v + \chi_w) + f(y_{j_*} + \chi_v - \chi_w)$ となる. 主張 1 より $f(y_{j_*} + \chi_v - \chi_w) > f(y_{j_*})$ である. ゆえに (5) が導かれる. [主張 2 の証明終り]

x_α の α 局所最小性と主張 2 より任意の $w \in V \setminus \{v\}$ に対して, $y_k(w) - x_\alpha(w) \le \alpha - 1$ が成り立つ. ゆえに,

$$x_\alpha(v) - x_*(v) = x_\alpha(w) - y_k(v) = \sum_{w \in V \setminus \{v\}} \{y_k(w) - x_\alpha(w)\} \le (n-1)(\alpha - 1)$$

となる. なお, 2 番目の等号は $x(V) = y(V)$ $(\forall x, y \in \mathrm{dom}\, f)$ という性質による. □

4 スケーリング算法

以下，$f : \mathbf{Z}^V \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ は $\mathrm{dom}\, f$ が有界なM凸関数とする．定理 3.1 から次の最急降下法の正当性が容易に導かれる．

算法 STEEPEST_DESCENT

手順 0: x を $\mathrm{dom}\, f$ に含まれる任意のベクトルとし，$B := \mathrm{dom}\, f$ とおく．

手順 1: もし $f(x) = \min_{s,t \in V} f(x - \chi_s + \chi_t)$ ならば終了．x は f の最小解である．

手順 2: $x - \chi_u + \chi_v \in B$ かつ

$$f(x - \chi_u + \chi_v) = \min\{f(x - \chi_s + \chi_t) \mid s, t \in V,\ x - \chi_s + \chi_t \in B\}$$

なる $u, v \in V$ を見つける．

手順 3: $x := x - \chi_u + \chi_v$，$B := B \cap \{y \in \mathbf{Z}^V \mid y(u) \le x(u) - 1,\ y(v) \ge x(v) + 1\}$ とおく．手順 1 へ戻る．□

定理 3.2 から，集合 B は必ず f の最小解を含む．ゆえに，算法 STEEPEST_DESCENT は f の最小解を求める．反復回数を解析するため，値 $\sum_{w \in V}\{\max_{y \in B} y(w) - \min_{y \in B} y(w)\}$ を考える．この値は nL で抑えられ，各反復で少なくとも 2 減少する．したがって，算法 STEEPEST_DESCENT は $\mathrm{O}(nL)$ 回の反復で終了する．また，1 回の反復にかかる時間は．$\mathrm{O}(n^2)$ 時間である．ゆえに，最急降下法は $\mathrm{O}(n^3 L)$ 時間で最小解を求める擬多項式時間算法である．

次に，スケーリング技法を用いた効率的な算法を提案する．f はスケーリングに関して閉じているM凸関数と仮定する．

算法 SCALING_STEEPEST_DESCENT

手順 0: $\alpha := \lceil L/4n \rceil$，$B := \mathrm{dom}\, f$ とおく．$x_{2\alpha}$ を $\mathrm{dom}\, f$ に含まれる任意のベクトルとする．

手順 1: [α スケーリングフェイズ]

関数 $\tilde{f} : \mathbf{Z} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ を次のように定め，その最小解 y_* を STEEPEST_DESCENT により求める．

$$\tilde{f}(y) = \begin{cases} f(x_{2\alpha} + \alpha y) & \text{if } x_{2\alpha} + \alpha y \in B, \\ +\infty & \text{if } x_{2\alpha} + \alpha y \notin B. \end{cases}$$

$x_\alpha = x_{2\alpha} + \alpha y_*$ とおく．

手順 2: $\alpha = 1$ ならば終了．x_α は f の最小解である．

手順 3: $B := B \cap \{y \in \mathbf{Z}^V \mid x_\alpha(w) - (n-1)(\alpha - 1) \le y(w) \le x_\alpha(w) + (n-1)(\alpha - 1)\}$，$\alpha := \lceil \alpha/2 \rceil$ とおく．手順 1 へ戻る．□

このアルゴリズムの時間計算量を評価する．アルゴリズムは手順 1 を $\lceil \log L/(4n) \rceil$ 回実行する．手順 3 での B の決め方により，手順 1 の実行時間は $\mathrm{O}((4n\alpha \times n)/\alpha \times n^2) = \mathrm{O}(n^4)$ となる．また，値 L は $\mathrm{O}(n^2 \log L)$ 時間で計算できる．よって，次の結果を得る．

定理 4.1. $\mathrm{dom}\, f$ に含まれるベクトルが与えられているならば，SCALING_STEEPEST_DESCENT はスケーリングに関して閉じているM凸関数 f の最小解を $\mathrm{O}(n^4 \log(L/n))$ 時間で求める．

5 応用例

第2節で示したように，ツリー型関数はスケーリングに関して閉じているM凸関数である．本節では，時間枠制約つき運搬経路問題に対するツリー型関数の最小化の応用について述べる．運搬経路問題について詳しくは [2] を参照されたい．

時間枠制約つき運搬経路問題では，各顧客を何時から何時までの間に訪問しなければならない，という時間枠の制約が与えられている．この制約をなるべく満たし，かつ運搬費用を最小にする経路及び訪問時間のスケジュールを求めることが時間枠制約つき運搬経路問題の目的である．NP困難である時間枠制約つき運搬経路問題に対しては様々なヒューリスティックが提案されているが，いくつかのヒューリスティックでは経路決定とスケジューリングの2つのフェイズを別々に取り扱っている．それらのヒューリスティックでは，まず経路決定のフェイズにおいて各運搬車に対して訪問する顧客及び訪問の順番を決定し，その後にスケジューリングフェイズに移る．スケジューリングフェイズにおいては，経路決定フェイズで決められた各経路に対して，時間枠制約をなるべく満たし，かつ運搬費用を最小にするように顧客の訪問時間を決定する．以下では，この最適なスケジュールを求める問題がツリー型関数の最小化問題として定式化できることを示す．

このスケジューリング問題において，運搬車はデポ 0 を時刻 0 に出発し，顧客を 1-2-3$\cdots$-n の順番で訪問し，最後に時刻 N にデポに戻ると仮定する．運搬車が顧客 (デポ) $i-1$ から顧客 (デポ) i への移動に要する時間を x_i により表す．ここで x_{n+1} は 顧客 n からデポへの移動に要する時間を表す．このとき，顧客 i の訪問時刻は $\sum_{k=1}^{i} x_k$ と表される．

時間枠制約からの逸脱には凸関数を用いてペナルティを与える．顧客 i において，時間枠制約からの逸脱により課されるペナルティを凸関数 $b_i(\sum_{k=1}^{i} x_k)$ により表す．例えば，時間枠制約が $[l_i, u_i]$ により与えられている場合は，ペナルティ関数 b_i として，次のような関数が挙げられる．

$$
b_i(\alpha_i) = \begin{cases} M(l_i - \alpha_i) & (\alpha_i < l_i) \\ 0 & (l_i \leq \alpha_i \leq u_i) \\ M(\alpha_i - u_i) & (\alpha_i > u_i) \end{cases}
$$

ここで，α_i は顧客 i の訪問時刻，M は大きな定数とする．また，運搬車には各顧客間で待機すること，或いは急ぐことを許し，運搬車の顧客 (デポ)$i-1$ から顧客 (デポ)i への移動時間に関するペナルティを凸関数 $f_i(x_i)$ により表す．このとき，スケジューリング問題は，各顧客の時間枠制約からの逸脱によるペナルティと運搬車の移動時間によるペナルティの合計を最小にする運搬車の訪問時間を決定する問題となる．この問題は次のような最適化問題として書ける．

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \left\{ b_i\left(\sum_{k=1}^{i} x_k\right) + f_i(x_i) \right\} \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} x_i = N, \\
 & x_i \geq 0, \ \text{integer } i = 1, \ldots, n+1.
\end{array}
$$

この問題は，ツリー型関数の最小化問題として記述されていることがわかる．したがって，前節で提案したスケーリング算法を適用することによりこの問題を効率的に解くことが出来る．

参考文献

[1] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, J. B. Orlin, Network Flows — Theory, Algorithms, and Applications, Prentice Hall, New Jersey, 1993.

[2] J. Destrosiers, Y. Dumas, M. M. Solomon, F. Soumis, Time constrained routing and scheduling, *in* Handbooks in Operations Research and Management Science, Volume 8: Network Routing, (G.L. Nemhauser, A.H.G. Rinnooy Kan, eds.), North-Holland, Amsterdam, 1995.

[3] A. W. M. Dress, W. Wenzel, Valuated matroid: a new look at the greedy algorithm, Appl. Math. Lett. 3 (1990) 33–35.

[4] A. W. M. Dress, W. Wenzel, Valuated matroids, Adv. Math. 93 (1992) 214–250.

[5] S. Fujishige, Submodular Functions and Optimization, Annals of Discrete Mathematics, Vol. 47, North-Holland, Amsterdam, 1991.

[6] D. S. Hochbaum, Lower and upper bounds for the allocation problem and other nonlinear optimization problems, Math. Oper. Res. 19 (1994) 390–409.

[7] K. Murota, Submodular flow problem with a nonseparable cost function, Combinatorica 19 (1999) 87-109.

[8] K. Murota, Convexity and Steinitz's exchange property, Adv. Math. 124 (1996) 272–311.

[9] K. Murota, Discrete convex analysis, Math. Prog. 83 (1998) 313–372.

[10] K. Murota, Discrete convex analysis — Exposition on conjugacy and duality, *in* Graph Theory and Combinatorial Biology (L. Lovász *et al.*, eds.), The János Bolyai Mathematical Society, 1999, 253-278.

[11] 室田一雄, 離散凸解析, 「離散構造とアルゴリズム V」 (藤重悟編), 近代科学社, 東京, 1998, 51–100.

[12] K. Murota, A. Shioura, Characterizations of quadratic M-convex and L-convex functions, in preparation.

[13] A. Shioura, Minimization of an M-convex function, Discrete Appl. Math. 84 (1998) 215–220.