アルゴリズム 79－1
(2001. 7. 27)

# 量子エントロピーの離散構造

今井浩

東京大学情報理工学系研究科コンピュータ科学専攻
ERATO 今井量子計算機構, JST

アブストラクト：Shannon のエントロピーのもつ離散構造として，同時分布の周辺分布のエントロピーの集合関数がポリマトロイドとなることが藤重により示されている．本稿では，量子情報理論の von Neumann エントロピーについて，完全に古典確率の場合を含んだ形でこの結果が拡張できることを示す．

# Discrete Structure of the Quantum Entropy

Hiroshi Imai

Department of Information Science, University of Tokyo, Tokyo 113-0033, Japan
ERATO Quantum Computation and Information Project, JST, Tokyo 113-0033, Japan
E-mail: imai@qci.jst.go.jp

**Abstract:** As discrete structure of the Shannon entropy, the entropy of marginal distributions forms a polymatroid, as shown by Fujishige. In this paper, we extend this result for the von Neumann entropy in quantum information theory.

## 1 はじめに

情報理論において，Shannon のエントロピーは最も基本的であり，様々な性質がわかっている．$n$ 確率変数の同時確率分布を固定したとき，任意の部分集合への周辺分布のエントロピーが定まり，この集合関数がポリマトロイドをなすことが Fujishige [2] によって示されている．

本稿では，この結果を量子情報理論に拡張することを行う．具体的には，$n$ 個の Hilbert 空間のテンソル積の空間で量子状態を表現する密度行列を固定したとき，元の Hilbert 空間の部分集合への部分トレースの密度行列を考え，その部分集合に対してこの密度行列の von Neumann エントロピーを対応させる集合関数を定義すると，この関数がポリマトロイドをなすことを示す．これは古典確率の場合を完全に含む結果である．

この関数の単調性は，作用素凸関数の性質より導かれる．劣モジュラ性は，量子ダイバージェンスに関して，2つの密度行列の間のダイバージェンスは，それらを完全正写像 (CP-map) で変換した密度行列のダイバージェンス以上であるという Petz の定理 [7] より導かれる．このように証明そのものは，方針が明確でかつ既存の基本的結果を直接適用するものである．この von Neumann エントロピーから導かれる集合関数が劣加法性を満たすことは既に知られており，その証明は量子ダイバージェンスの非負性を用いるので，本稿の結果はその拡張にもなっている．

このように主結果の証明そのものは簡明であるが，一方で量子情報の基礎に関して平易に書かれた文献はあまり見当たらないので，本稿のもう1つの目的として，この基礎部分を平易に複素ベクトル空間の線形代数の範囲内で記述することも目

指す．

このポリマトロイド構造がどのように生かせるかは，今後の課題である．

## 2　量子情報基礎

量子力学を記述するには，Hilbert 空間と線形作用素が一般に用いられる．しかし，次元を有限に限れば，複素ベクトル空間での線形代数で完全に記述できる．以降，全ての記述を後者の方針で行う．また，量子力学ではよくケットベクトル，ブラベクトルという記法が用いられるが，本稿では通常のベクトル記法を用いる．

$N$ 次元の量子状態を扱うには，複素 $N$ 次元ベクトル空間を土台とする．このとき，量子状態は複素 $N\times N$ 行列 $\rho\in\mathbb{C}^{N\times N}$ で，

- $\rho=\rho^*\geq 0$
- $\mathrm{Tr}\,\rho=1$

の条件を満たすものである．ここで，$*$ は複素共役転置を表し，行列 $\rho$ について $\rho\geq 0$, $\rho>0$ はそれぞれ $\rho$ が非負定値，正定値であることを表し，Tr は行列の対角要素の和である．すなわち，$\rho$ は Hermite 非負定値でトレースが 1 の行列である．このような行列を密度行列という．

密度行列 $\rho$ の固有値を $\lambda_1,\ldots,\lambda_N$ とすると，

$$\lambda_i\geq 0\quad(i=1,\ldots,N),\qquad \sum_{i=1}^{N}\lambda_i=1$$

である．その固有ベクトル(固有値に重複したものがある場合は，重複固有値に対応する部分を適当に直交したもの)を正規化したものを $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_N$ とする．すなわち，

$$\|\boldsymbol{v}_i\|^2=\boldsymbol{v}_i^*\boldsymbol{v}_i=1,\qquad \boldsymbol{v}_i^*\boldsymbol{v}_j=0\quad(i\neq j)$$

で，$\rho$ は次のように固有値分解される．

$$\rho=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i^*$$

$\rho$ のランクが 1 のとき，この量子状態を純粋状態といい，それが 2 以上のとき，混合状態という．

ある量子状態を他の量子状態に変換するもっとも一般的な変換は，完全正写像 (Completely Positive map; 略して CP-map) である．$N$ 次元の量子状態を $M$ 次元の量子状態に変換する完全正写像 $T$ は，$k$ 個の行列 $A_j\in\mathbb{C}^{M\times N}$ で，

$$\sum_{j=1}^{k}A_j^*A_j=I$$

($I$ は $\mathbb{C}^{N\times N}$ の単位行列) を満たすものによって，

$$T(\rho)=\sum_{j=1}^{k}A_j\rho A_j^*$$

と表される．

$T(\rho)$ が $\mathbb{C}^{M\times M}$ の密度行列であることは，容易に確認できる．定義よりすぐに Hermite 行列であり，非負定値性も任意のベクトルを用いて 2 次形式を作ると，$\rho$ の 2 次形式になるので，$\rho$ の非負定値性より導かれる．トレースについては，行列 $A,B$ について $\mathrm{Tr}\,AB=\mathrm{Tr}\,BA$ であることを用いて，$\mathrm{Tr}\,T(\rho)=\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Tr}(A_j\rho A_j^*)=\mathrm{Tr}((\sum_{j=1}^{k}A_jA_j^*)\rho)=\mathrm{Tr}\,\rho=1$ と途中で条件 $\sum_{j=1}^{k}A_j^*A_j=I$ を用いて示される．

$\mathcal{H},\mathcal{K}$ をそれぞれ $N$ 次元, $M$ 次元の複素ベクトル空間とする．

$$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_N\end{pmatrix}\in\mathcal{H},\qquad \boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_M\end{pmatrix}\in\mathcal{K}$$

に対して，そのテンソル積 $\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}\in\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ を

$$\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}v_1\boldsymbol{u}\\ \vdots\\ v_N\boldsymbol{u}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1u_1\\ \vdots\\ v_1u_M\\ \vdots\\ v_Nu_1\\ \vdots\\ v_Nu_M\end{pmatrix}$$

で定める．$\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ は $NM$ 次元複素ベクトル空間である．

$\mathcal{H},\mathcal{K}$ 上の行列 $A=(a_{ij})$, $B$ に対して，そのテンソル積 $A\otimes B$ を

$$A\otimes B=\begin{pmatrix}a_{11}B&\cdots&a_{1n}B\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}B&\cdots&a_{nn}B\end{pmatrix}$$

で定める．$A \otimes B$ は $NM$ 次元複素ベクトル空間上の行列である．容易にわかるように，

$$(A \otimes B)(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}) = (A\boldsymbol{u}) \otimes (B\boldsymbol{v})$$

であり，さらに $C, D$ を $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ 上の行列として，

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$$

である．$\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ それぞれの上の密度行列 $\rho$, $\sigma$ に対して，$\rho \otimes \sigma$ は $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ の上の密度行列となる．テンソル積は式としては可換でない．

$\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ の密度行列 $\rho$ に対して，$\mathcal{K}$ をトレースアウト (trace out) して得られる部分トレース (partial trace) $\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\, \rho$ は，

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\, \rho = \sum_{i=1}^{M} (I_{\mathcal{H}} \otimes \boldsymbol{e}_i^*) \rho (I_{\mathcal{H}} \otimes \boldsymbol{e}_i),$$

で定義される．ここで，$\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ を $\mathcal{K}$ の任意の正規直交基底であり，$I_{\mathcal{H}}$ は $\mathcal{H}$ 上の単位行列である．後にも示すように，部分トレースは古典確率の場合で $\mathcal{K}$ の部分の和をとって周辺分布を求めることに対応する．

部分トレースで $A_i = I_{\mathcal{H}} \otimes \boldsymbol{e}_i^*$ とすると，$\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\, \rho = \sum_{i=1}^{M} A_i \rho A_i^*$ で

$$\sum_{i=1}^{M} A_i^* A_i = I_{\mathcal{H}} \otimes (\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i^*) = I_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}}$$

(なぜなら，$\sum_{i=1}^{M} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i^* = I_{\mathcal{K}}$ ゆえ) となるので，部分トレースは完全正写像である．

また，$\rho$, $\sigma$ が $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ 上の密度行列のとき，

$$\sum_{i=1}^{M} (\boldsymbol{e}_i^* \sigma \boldsymbol{e}_i) = \mathrm{Tr}(\sigma(\sum_{i=1}^{M} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i^*)) = \mathrm{Tr}\, \sigma = 1$$

であるので，

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\, \rho \otimes \sigma = \sum_{i=1}^{M} \rho \otimes (\boldsymbol{e}_i^* \sigma \boldsymbol{e}_i) = \rho$$

であり，部分トレースはこの意味でテンソル積の逆操作である．

以降，密度行列は正則であるとする (正則でない場合は，適当に極限をとることになる)．すると，固有値が全て正となる．$\mathbb{C}^{N \times N}$ 上の密度行列 $\rho$ とその固有値分解 $\rho = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^*$ に対して，定義域が固有値の存在範囲を含む実数値関数 $f$ を密度行列 $\rho$ に対する関数に次のように拡張する．

$$f(\rho) = \sum_{i=1}^{N} f(\lambda_i) \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^*$$

$\mathbb{C}^{N \times N}$ 上の任意の密度行列 $\rho, \sigma$, そして $0 \leq \lambda \leq 1$ なる実数 $\lambda$ に対して，$f(x) = -\log x$ は次の条件を満たす．

$$\lambda f(\rho) + (1-\lambda) f(\sigma) \geq f(\lambda\rho + (1-\lambda)\sigma)$$

この条件を満たす関数を作用素凸関数といい，次の補題が知られている．

**補題 1** ([3] など参照). $\mathbb{C}^{N \times N}$ 上の密度行列 $\rho$ とその空間からの完全正写像 $T$ に対して，

$$-\log(T(\rho)) \leq T(-\log \rho).$$

ここで，不等号は行列に関するもので $\log(T(\rho)) - T(\log \rho)$ が非負定値であることを意味する．

$\mathbb{C}^{N \times N}$ の密度行列 $\rho$ の von Neumann エントロピー $H(\rho)$ を

$$H(\rho) = -\mathrm{Tr}\, \rho \log \rho$$

で定める．固有値分解を用いると，

$$\begin{aligned} H(\rho) &= -\mathrm{Tr}\left(\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^*\right)\left(\sum_{j=1}^{N} \log \lambda_j \boldsymbol{v}_j \boldsymbol{v}_j^*\right)\right) \\ &= -\mathrm{Tr}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \lambda_i \log \lambda_j (\boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^* \boldsymbol{v}_j \boldsymbol{v}_j^*)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{N} -\lambda_i \log \lambda_i \mathrm{Tr}(\boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^*) \\ &= \sum_{i=1}^{N} -\lambda_i \log \lambda_i \end{aligned}$$

となる．固有値の和は 1 で非負なので，量子状態 $\rho$ の von Neumann エントロピーは，その固有値の Shannon エントロピーとなることがわかる (今は正定値を仮定してるので固有値は正であるが，0 となっても $0 \log 0 = 0$ で一般の場合も成り立つ)．

$\mathbb{C}^{N \times N}$ の密度行列 $\rho, \sigma$ について，$\rho$ から $\sigma$ への量子ダイバージェンス $D(\rho \| \sigma)$ を

$$D(\rho \| \sigma) = \mathrm{Tr}(\rho(\log \rho - \log \sigma))$$

と定義する．本稿では，補題1とともに，次に補題として述べるこの量子ダイバージェンスの完全正写像に関する単調性を用いる．より一般の量子ダイバージェンスについても成り立つ．

**補題 2** (Petz [7]). $\mathbb{C}^{N\times N}$ から $\mathbb{C}^{M\times M}$ への完全正写像 $T$ に対して,

$$D(\rho\|\sigma) \geq D(T(\rho)\|T(\sigma)).$$

この定理は色々と有用で，たとえば $D(\rho\|\sigma) \geq 0$ という量子ダイバージェンスの非負性という最も基本的な性質も，単に通常のトレースを完全正写像として用いれば出てくる (これを示すには大きすぎる道具であるが).

最後に古典の有限離散分布が量子状態としてどう表されるかを見ておこう．1 から $N$ の $N$ 個の値をとる確率変数 $Z$ を考える．$Z$ が値 $i$ をとる確率 $\Pr(Z=i)=p_i$ とすると，ベクトル $\boldsymbol{p}=(p_i)$ がこの確率分布を表す．これを $N$ 次元の有限離散分布という．これに対して，このベクトルを対角ベクトルとする密度行列を対応させる．ここでは量子状態の測定には踏み込まないが，基本的な測定によって古典確率をそのまま表現できる．また，この量子状態の von Neumann エントロピーは，元の有限離散分布の Shannon エントロピーとなる．

量子情報基礎については，[1, 3, 6] 等を参照されたい．

## 3 Shannon エントロピーの離散構造

本節では Fujishige [2] により示された Shannon エントロピーから導かれるポリマトロイドについてまとめる (ポリマトロイドについてはより一般の枠組みの劣モジュラ流に関する最近の解説 [4] とその文献を参照されたい). $n$ 個の確率変数 $Z_i$ で，各 $Z_i$ は 1 から $k_i$ の整数の値をとるものからなる同時確率分布

$$\Pr(Z_1=i_1,\, Z_2=i_2,\ldots,\, Z_n=i_n)$$
$$(1\leq i_j\leq k_j,\ j=1,\ldots,n)$$

を固定する．これは $\prod_{i=1}^n k_i$ 次元の有限離散分布である．

$E=\{1,2,\ldots,n\}$ とし，$S\subseteq E$ に対して $S$ に入っていない添字についてすべて和をとると，$\prod_{i\in S} k_i$ 次元の有限離散分布が周辺分布として得られる．この $S$ に関する周辺分布の Shannon エントロピーを $h(S)$ と定める．$h$ は $h\colon 2^S\to\mathbb{R}$ の集合関数である．

**定理 1** (Fujishige [2]). (1) $h(\emptyset)=0$
(2) $h(X)\leq h(Y)$ $(X\subseteq Y)$
(3) $h(X)+h(Y)\geq h(X\cup Y)+h(X\cap Y)$

(2) は集合関数としての単調非減少性であり，(3) は劣モジュラ性である．この定理の (1), (2), (3) の条件を満たす集合関数は，ポリマトロイドのランク関数であり，ポリマトロイドを定める．このように，同時分布を固定して得られる周辺分布の Shannon エントロピーは，ポリマトロイドを構成する．

## 4 von Neumann エントロピーの離散構造

部分トレースのところで述べたように，部分トレースは周辺分布をとる操作に対応する．まず，この点を説明しよう．

$\mathcal{H}_i=\mathbb{C}^{k_i}$ とし，$\mathcal{H}=\otimes_{i=1}^n\mathcal{H}_i$ とする．$\prod_{i=1}^n k_i$ 次元の有限離散分布の同時分布は，$\Pr(Z_1=i_1, Z_2=i_2,\ldots,Z_n=i_n)$ を対角要素とする $\mathcal{H}$ 上の対角行列の密度行列に対応する．このとき，部分トレースがまさしく周辺分布をとる操作になっていることは容易にみてとれる．このように密度行列が対角行列の場合は，古典確率の世界での話になっている．

$X\subseteq E$ に対して，$\mathcal{H}(X)=\otimes_{i\in X}\mathcal{H}_i$ と $\mathcal{H}$ の部分空間を定める．$I_{\mathcal{H}(X)}$ は $\mathcal{H}(X)$ 上の単位行列である．$\dim\mathcal{H}(X)$ で $\mathcal{H}(X)$ の次元を表す．

部分空間に関する次の補題を以下で用いる．

**補題 3.** $\rho$ を $\mathcal{H}$ 上の密度行列，$\sigma$ を $\mathcal{H}(X)$ $(X\subseteq E)$ 上の密度行列とする．このとき，

$$\mathrm{Tr}(\rho(\sigma\otimes I_{\mathcal{H}(E-X)}))=\mathrm{Tr}((\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}(E-X)}\,\rho)\sigma))$$

**証明:** $\mathcal{H}(E-X)$ の正規直交基底を $\{e_i,\ldots,e_m\}$ $(m=\dim\mathcal{H}(E-X))$ としたとき,

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}(E-X)}\,\rho=\sum_{i=1}^m (I_{\mathcal{H}(X)}\otimes e_i^*)\rho(I_{\mathcal{H}(X)}\otimes e_i)$$

であり，$\sigma \otimes I_{\mathcal{H}(X)}$ は

$$\sum_{i=1}^{m}(I_{\mathcal{H}(X)} \otimes e_i)\sigma(I_{\mathcal{H}(X)} \otimes e_i^*)$$

であるので，あとは全体のトレースの中で

$$(I_{\mathcal{H}(X)} \otimes e_i^*)$$

の順序を交換すればよい．□

$\mathcal{H}(X)$ 上の密度関数で，対角行列であって全体各要素が等しい，すなわち $1/\dim \mathcal{H}(X)$ であるようなものを $\mathcal{I}_{\mathcal{H}(X)}$ とする．

**補題 4.** $\mathcal{H}(X)$ 上の密度関数 $\sigma$ について，

$$\begin{aligned}&\log(\sigma \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{H}(E-X)})\\ &= (\log\sigma) \otimes I_{\mathcal{H}(E-X)} - \log(\dim \mathcal{H}(E-X))I_{\mathcal{H}}\end{aligned}$$

**証明:** $\sigma$ の固有値分解を $\sigma = \sum_i \mu_i u_i u_i^*$ とすると，

$$\begin{aligned}\log(a\sigma) &= \sum_i \log(a\mu_i)u_i u_i^*\\ &= \log\sigma + \sum_i(\log a)u_i u_i^*\\ &= \log\sigma + (\log a)I_{\mathcal{H}(X)}\end{aligned}$$

であり，あとは $a = 1/\dim \mathcal{H}(E-X)$ としてテンソル積すればよい．□

いよいよ量子エントロピーの離散構造を調べよう．以下，$\mathcal{H}$ の密度行列 $\rho$ を1つ固定する．$X \subseteq E$ に対して，

$$h_\rho(X) = H(\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}(E-X)}\,\rho)$$

と定める．このとき，次の定理が成り立つ．

**定理 2.** (1) $h_\rho(\emptyset) = 0$
(2) $h_\rho(X) \le h_\rho(Y)$ $(X \subseteq Y)$
(3) $h_\rho(X) + h_\rho(Y) \ge h_\rho(X \cup Y) + h_\rho(X \cap Y)$

**証明:** (1) 定義より．

(2) $X \subseteq Y$ に対して

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}(E-X)}\,\rho = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}(Y-X)}(Tr_{\mathcal{H}(E-Y)}\,\rho)$$

であるので，一般性を失わず $Y = E$ としてよい．

部分トレースは完全正写像であるから，補題1で

$$-\log(T(\rho)) \le T(-\log\rho)$$

と $T$ を部分トレースとしたものが成り立つ．非負定値な行列2つの乗算のトレースは非負であるから，

$$\mathrm{Tr}(-T(\rho)\log(T(\rho))) \le \mathrm{Tr}(-T(\rho)T(\log\rho)).$$

右辺を部分トレースの定義に戻って書き下すと，$m$ を $\mathcal{H}(E-X)$ の次元とし，$\{e_1,\dots,e_m\}$ をその正規直交基底として，(2) の間は $I = I_{\mathcal{H}(E-X)}$ として

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}(-T(\rho)T(\log\rho))\\ &= \mathrm{Tr}\Bigg(-\left(\sum_{i=1}^{m}(I\otimes e_i^*)\rho(I\otimes e_i)\right)\\ &\qquad\left(\sum_{j=1}^{m}(I\otimes e_j^*)\log\rho(I\otimes e_j)\right)\Bigg)\\ &= \mathrm{Tr}\Big(-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\\ &\qquad\big((I\otimes e_j)(I\otimes e_i^*)\rho(I\otimes e_i)(I\otimes e_j^*)\big)\log\rho\Big)\\ &= \mathrm{Tr}\Big(-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\big((I\otimes e_j e_i^*)\rho(I\otimes e_i e_j^*)\big)\log\rho\Big)\\ &= \mathrm{Tr}(-\rho\log\rho) = h_\rho(Y)\end{aligned}$$

となり，$h_\rho(X) \le h_\rho(Y)$ である．

(3) 一般性を失わず，$X \cup Y = E$ としてよい．Petz の定理を適用して，

$$\begin{aligned}&D(\rho\|(\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}(E-X)}\,\rho)\otimes\mathcal{I}_{\mathcal{H}(E-X)})\\ &\ge D(\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}(E-Y)}\,\rho\|\\ &\qquad\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}(E-Y)}((\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}(E-X)}\,\rho)\otimes\mathcal{I}_{\mathcal{H}(E-X)}))\end{aligned}$$

である．ここで，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}(\rho\log((\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}(E-X)}\,\rho)\otimes\mathcal{I}_{\mathcal{H}(E-X)}))\\ &= \mathrm{Tr}\Big(\rho\Big(\log(\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}(E-X)}\,\rho)\otimes I_{\mathcal{H}(E-X)}\\ &\qquad - \log(\dim\mathcal{H}(E-X))I_{\mathcal{H}}\Big)\Big)\\ &= \mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}(E-X)}\rho\log(\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}(E-X)}\,\rho))\\ &\qquad - \log(\dim\mathcal{H}(E-X))\end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}(E-Y)}((\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}(E-X)}\,\rho)\otimes\mathcal{I}_{\mathcal{H}(E-X)})\\ &= (\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}(E-(X\cap Y))}\,\rho)\otimes\mathcal{I}_{\mathcal{H}(Y-(X\cap Y))}\\ &= (\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}(E-(X\cap Y))}\,\rho)\otimes\mathcal{I}_{\mathcal{H}(E-X)}\end{aligned}$$

($E = X \cup Y$ と仮定したことより $Y - (X \cap Y) = E - X$ である．) また，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}(E-Y)}\,\rho \log((\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}(E-(X\cap Y))}\,\rho) \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{H}(E-X)})) \\
&= \mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}(E-Y)}\,\rho(\log(\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}(E-(X\cap Y))}\,\rho) \otimes I_{\mathcal{H}(E-X)}) \\
&\quad - \log(\dim \mathcal{H}(E-X)) I_{\mathcal{H}(E-Y)}) \\
&= \mathrm{Tr}((\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}(E-(X\cap Y))}\,\rho) \log(\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}(E-(X\cap Y))}\,\rho))) \\
&\quad - \log(\dim \mathcal{H}(E-X))
\end{aligned}
$$

これと Petz の定理を量子ダイバージェンスに適用した式とまとめると，

$$
\begin{aligned}
&-h_\rho(X \cup Y) + h_\rho(X) + \log(\dim \mathcal{H}(E-X)) \\
&\geq -h_\rho(Y) + h_\rho(X \cap Y) + \log(\dim \mathcal{H}(E-X))
\end{aligned}
$$

となり，劣モジュラ性が示された □

## 5 おわりに

Petz の定理 [7] は，作用素凸な関数 $f$ を用いて定義される量子 $f$ ダイバージェンスと呼ばれるより一般のダイバージェンスで成り立つので，そのような場合でもエントロピー関数の集合関数としての単調性・劣モジュラ性を示すことができる．

Iwata, Fleischer, Fujishige [5] により，劣モジュラ関数は強多項式時間で最小化できることが示されており，このエントロピー関数に適当な (劣) モジュラ関数 (たとえば，$h_\rho(X)$ に $\log|E-X|$ という $\beta_0$ 関数から構成した劣モジュラ関数を加えるなど) を加えた関数の最小化がどういう意味をもつのかなど，このポリマトロイド構造がどのように生かせるかが，今後の課題である．

## 参考文献


[1] S.-I. Amari and H. Nagaoka: *Methods of Information Geometry*. Oxford University Press, 2000.

[2] S. Fujishige: Polymatroidal Dependence Structure of a Set of Random Variables. *Information and Control*, Vol.39, No.1 (1978), pp.55–72.

[3] 日合文雄, 柳研二郎: ヒルベルト空間と線形作用素. 牧野書店, 1998.

[4] 岩田覚: 劣モジュラ流問題. 離散構造とアルゴリズム VI (藤重悟編), 近代科学社, 1999, pp.127–170.

[5] S. Iwata, L. Fleischer and S. Fujishige: A Combinatorial Strongly Polynomial Algorithm for Minimizing Submodular Functions. *Journal of the Association for Computing Machinery*, to appear.

[6] 小川朋宏: 量子力学系における仮説検定と通信路符号化の漸近特性に関する 研究. 学位論文, 電気通信大学大学院情報システム学研究科, 2000.

[7] D. Petz: Quasi-Entropies for Finite Quantum Systems. *Reports on Mathematical Physics*, Vol.23, No.1 (1986), pp.57–65.