アルゴリズム 84−8
(2002. 5. 23)

カックロの計算量

瀬田 剛広
東京大学

概要

パズルの面白さは計算量と関係があり、その多くは NP 完全だと予想されている。そこで、その予想を確かめるべく、本論文ではカックロの NP 完全性を示した。また、併せて、パズルの作成と関係が深いと思われる、別解問題 (ASP) についても、その NP 完全性を示した。さらに、3 個目以降、n 個目の解を探す問題について、それが別解問題の別解問題 (ASP^n) として表せることを述べ、任意の n についてその NP 完全性が成り立つことを示した。

The Complexity of CROSS SUM

SETA Takahiro
University of Tokyo

abstract

It is said that puzzle is interesting for people, because most of them are NP-complete. So, in this paper, first, the NP-completeness of CROSS SUM is proved as an examle to support the idea. Next, the NP-completeness of the Another Solution Problem (ASP), which is very important for designing puzzles, of CROSS SUM is proved. Last, it is pointed out that the problem to determine the existanse of the nth answer is considered as ASP of ASP (ASP^n), and the NP-completeness of that of CROSS SUM is proved for arbitarary n.

1 はじめに

多くのパズルは解答が分かってしまえばその正しさを確認するのは簡単なものが多く、NP に入る。逆に、パズルが人間にとって面白いのはその多くが本質的に難しい、つまり NP 完全だからであると予想されている。実際、お絵かきロジック [2] やスリザーリンク [4] などいくつかのパズルについてはそれが NP 完全であることが示されている。そこで、本研究ではカックロを例にとり、その NP 完全性を証明する。

また、パズルについてはその解が一つに定まることが要求されることが多いため、解が一意であるかどうかを判定する必要がある。そこで、一つ解が見つかったとき、他に解がないか判定する問題 ASP[2] というものが重要な意味を持つ。そこで、カックロについても、 ASP の計算量を考え、その NP 完全性を証明した。

2 定義

定義 ONE-IN-THREE 3SAT とは、次のような問題である。

入力 3SAT と同じ、3 つのリテラルからなる節の集合

問題 入力は変数への真偽の割り当てで、どの節も真になるリテラルがちょうど1つになるものを含むか。

定義 閉路分割 (PARTITION INTO HAMILTONIAN SUBGRAPHS) とは、次のような問題である。

入力 無向辺を許した有向グラフ G

問題 入力は頂点の分割で、各頂点集合から誘導されるグラフがハミルトン閉路を持つようなものを持つか。

定義 カックロ (CROSS SUM) とは、次のような問題である。

入力 次のような条件を満たす $W \times H$ の盤面

- 盤面は白マスと黒マスからなる。
- 和と呼ばれる数字が縦横に一直線に連続した各列に与えられている。(通常黒マスに書かれる)
- 白マスは連結している。(重要ではない、非連結ならパズルが分割されるだけ)
- クロスワードとは違い、黒マスが隣り合っていても良い。
- どの連続した白マスの列も最低2マスの白マスからなる。

問題 入力は次のような条件を満たす白マスへの数字の割り当て (解) を持つか？

- 白マスには1から9までの数が入る。
- 一直線に連続する白マスの和は与えられた和に一致する。
- 一直線に連続する白マスに同じ数字は二度表れない。

定義 問題 Π の別解問題 (ASP, Another Solution Problem) とは次のような問題である。

入力 Π の解を持つインスタンス1つとその解。

問題 入力されたインスタンスは与えられた解以外の解を持つか？

定義 問題 Π_1 から問題 Π_2 への変換が多項式時間1対1還元 (poly-time parsimonious reduction) であるとは、変換が次の条件を満たすこととする。

- Π_1 が YES ということと Π_2 が YES ということが同値である。
- 変換が多項式時間で計算できる。
- 二つの問題の解の間 (問題の間ではない) に1対1対応が存在する
- Π_1 の解から Π_2 の解への変換も多項式時間で計算できる。[1]

この還元は、Π_1 の ASP から Π_2 の ASP への多項式時間還元になる。

3 カックロのNP完全性

今回、カックロのNP完全性を示すにあたり、まず、ONE-IN-THREE 3SAT から、閉路分割の隣接点数3以下のグリッド上の平面グラフへの制限版への多項式時間1対1還元を示し、そこから、カックロへの多項式時間1対1還元を示すことで、カックロのNP完全性を示した。

[1] #P 問題などではこの対応の多項式時間計算可能性を定義に含めないが、ここでは含めるので注意

3.1 制限つき閉路分割の NP 完全性

部品として、XOR、OR を図 1,2 のように、XOR の交叉を図 3 のように SELECT(3 つの中から 1 つを選ぶもの) を図 4 のように作ると、図 5 のように、1 対 1 還元が実現される。[2]

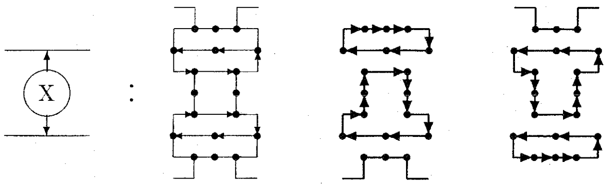

図 1: XOR の実現と可能な辺の選び方

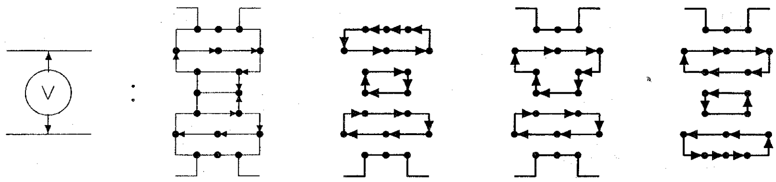

図 2: OR の実現と可能な辺の選び方

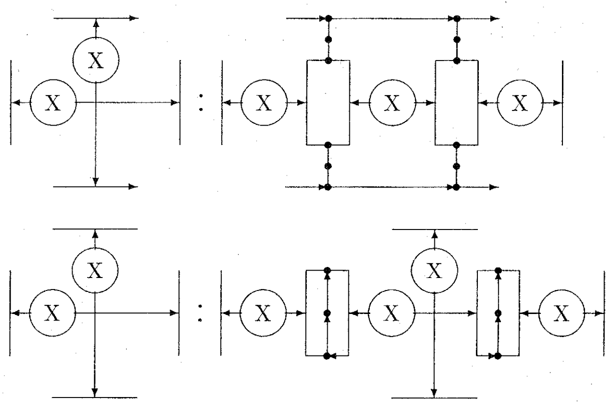

図 3: XOR の交叉の平面グラフ上での実現

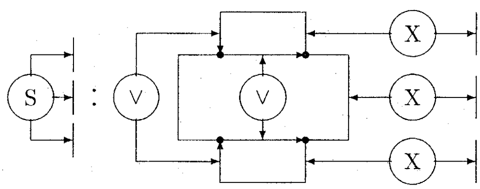

図 4: SELECT の実現

[2] この還元は [1] を参考にしている。

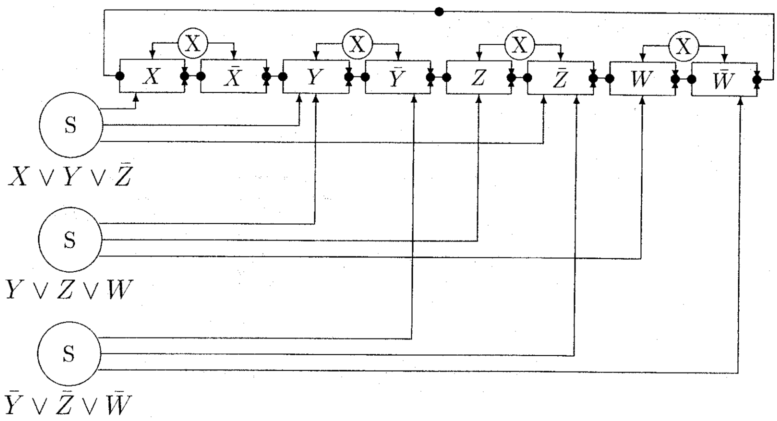

図 5: ONE IN THREE 3SAT から閉路分割への還元の例、SAT の変数の割り当てと上部の辺の選択とが対応する。

3.2 カックロののNP完全性

前節でグリッド上の隣接点数3以下のグラフに限った閉路分割問題のNP完全性が示されたので、そこからのカックロへの多項式時間1対1還元を示す。そのために、格子点に対してはT字路、直進路(I字路)、L字路を作り、格子点を結ぶ辺に対して部品を作る。格子点はそこがグラフの頂点であるときとそうでないときとがあり、頂点である場合のみ、その部品は必ず通らなければならないものとなる、それらは部品名に $\dot{\mathrm{I}}$ のようにドットをつけて表す。グラフの性質から、T字路には$\dot{\mathrm{T}}$ しかない。辺に対する部品は有効辺 $(\rightarrow)$ か無向辺 $(\leftrightarrow)$ かの二通りがある。

部品がそろえば、還元を次のように実現出来る。

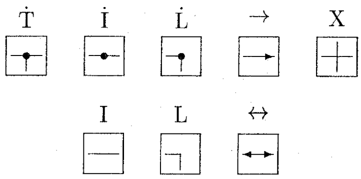

図 6: 還元に必要な部品と図示

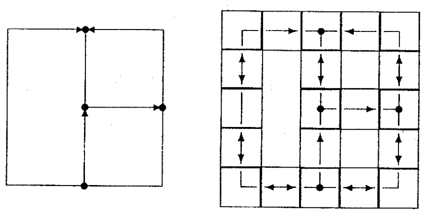

図 7: 閉路分割からカックロへの還元の例

元のグラフでの辺の選択とカックロでの数字の割り当てとには次のように対応をつける

- T字路、I字路、L字路については、端の白マスに1か3かが割り当てられたとき、対応する辺が選択されたものとする。2のときは選択されなかったものとする。
- 辺に対応する部品においては、端の白マスに9と7とが割り当てられたとき、その辺が選択されたものとする。8のときは選択されなかったものとする。
- 垂直方向には端の白マスに割り当てられた数字について、1から3、7から9の方へ閉路を向き付ける。
- 水平方向には垂直方向と逆に、3から1、9から7の方へ閉路を向き付ける。

辺と格子点との接合部の和はどの部品についても 10 にする。

以下に部品の実現を示す。なお、見易さと理解のし易さとのため、本来、数字の入らない白マスに数字の割り当ての例を入れている。また、紙面の都合上、黒マスのみで情報量が無い部分は省略してある。

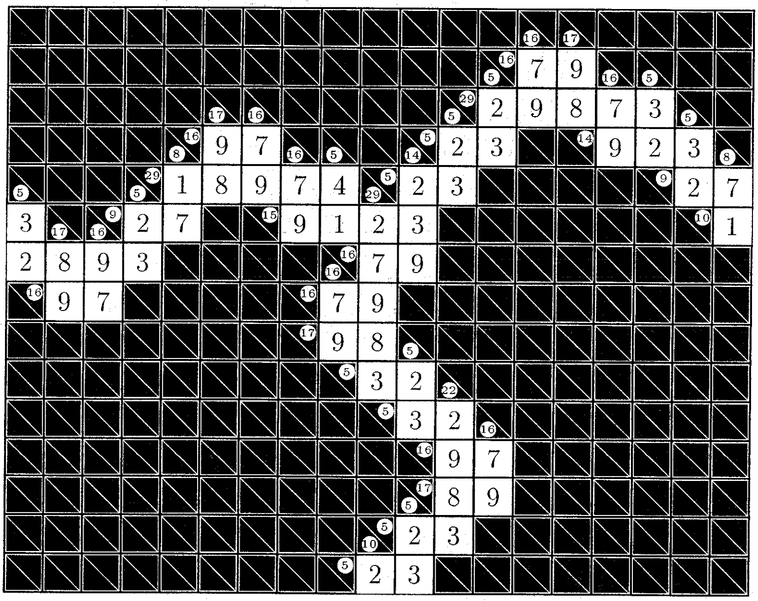

図 8: $\dot{\mathrm{T}}$ の実現。左から右へ (3 から 1 へ) 閉路は向き付けられている。下につながる辺は選択されていない。中央部で $6 = 1 + 2 + 3$ (正確には $15 = 1 + 2 + 3 + 9$ で 9 が固定) により、どの辺を選択するかを決定する。

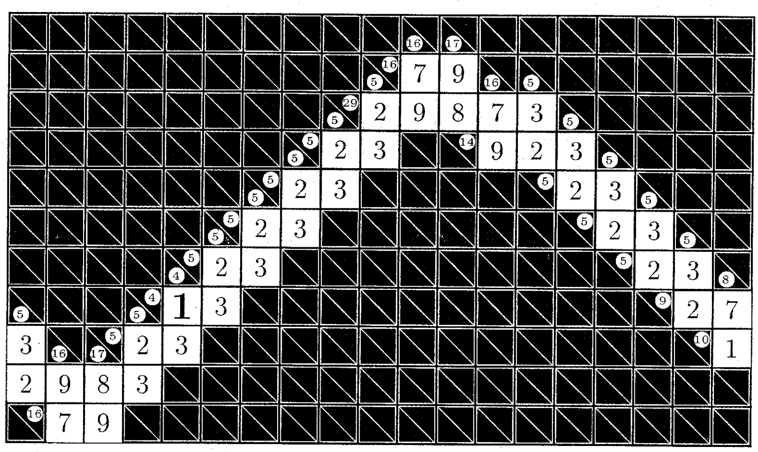

図 9: $\dot{\mathrm{I}}$ の実現。左から右へ (3 から 1 へ) 閉路は向き付けられている。カックロのルールにより、$4 = 2 + 2$ が使えないことから、閉路がこの部品を通らないことは拒否される。逆に、ボールド体で書かれた 1 を 2 にし、対応する行、列の和を 1 増やせば、I の実現になる。

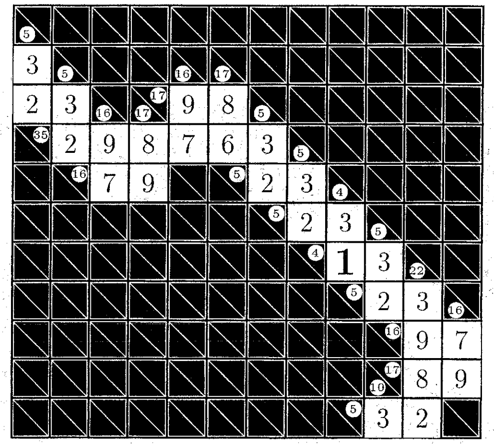

図 10: $\dot{\mathrm{L}}$ の実現。左から下へ (水平方向の 3 から垂直方向の 3 へ) 閉路は向き付けられている。$\dot{\mathrm{I}}$ と同じくボールド体で書かれた 1 を 2 にし、対応する行、列の和を 1 増やせば、L の実現になる。

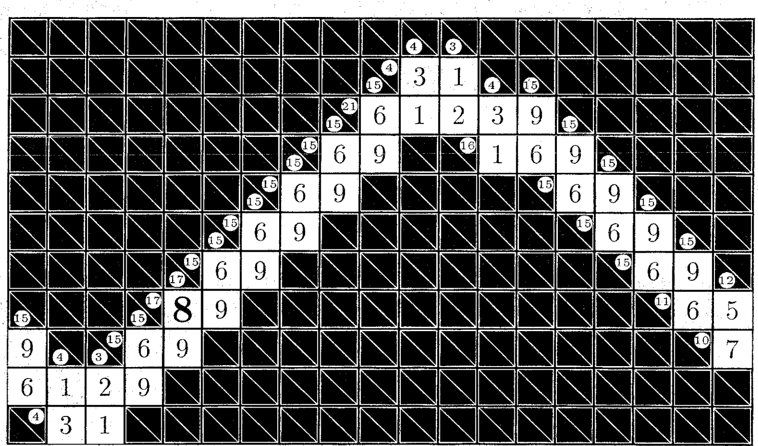

図 11: $\rightarrow$ の実現。辺が選択され、左から右へ (9 から 7 へ) 閉路は向き付けられている。$17 = 9 + 8$ であり、7 は出てこないことから、右から左への向きが拒否される。逆にボールド体で書かれた 8 を 6 にし、対応する行、列の和を 2 減らせば、$\leftrightarrow$ の実現になる。この部品が巣直方向に使われるとき、辺の向き付けが逆になることに注意。

以上でカックロの NP 完全性が示された。また、ここで (多項式時間)1 対 1 還元を用いたので、#ONE-IN-THREE 3SAT の ASP の#P 完全性からカックロの解を数える問題#CROSS SUM の#P 完全性も示されている。

4　ASP と ASP^n

4.1　カックロの ASP の NP 完全性

前節で ONE-IN-THREE 3SAT からカックロへの多項式時間 1 対 1 還元の存在が示されたので、ONE-IN-THREE 3SAT の ASP の NP 完全性を示されれば、カックロの ASP の NP 完全性が示される。よって、ここで、ONE-IN-THREE 3SAT から ONE-IN-THREE 3SAT の ASP への多項式時間 1 対 1 還元を示すことで、それを示す。

否定型リテラルの除去

まず、$T \vee F_1 \vee F_2, T \vee F_2 \vee F_3, T \vee F_3 \vee F_1$ という節を作り、常に偽になる変数 F_1 を作る。
そして、$\bar{A}$ を NA に書き換え、$A \vee NA \vee F_1$ という節を加える。
この変換は多項式時間 1 対 1 還元になる。

肯定型リテラルのみの ONE-IN-THREE 3SAT から ASP ONE-IN-THREE 3SAT への還元 変換元の問題を、N 変数 $V_i (1 \leq i \leq N)$、M 節 $V_{j,1} \vee V_{j,2} \vee V_{j,3} (1 \leq j \leq M)$ からなるものとする。
そして、新しい変数 A と $D_j (1 \leq j \leq M)$ とを用意する。
最後に全ての $V_{j,1} \vee V_{j,2} \vee V_{j,3}$ と言う形の節について、$V_{j,1} \vee V_{j,2} \vee \bar{D}_j, D_j \vee V_{j,3} \vee \bar{A}$ の様に分割する。最後に全ての変数を偽に割当てるというものを ASP に 1 つ目の解として与える。
この変換は多項式時間 1 対 1 還元になり、上と併せて、目的の多項式時間 1 対 1 還元が構成される。

4.2　ASP^n

ASP は「解が 1 つあったとき、もうひとつ (2 個目の) 解があるか」という問題だったが、「解が 2 個あったとき 3 個目の解があるか」という問題もさらなる別解を探す問題であり、別解問題といえ、一般に「解が n 個あったとき $n+1$ 個目の解があるか」という問題も別解問題ということが出来る。しかも、ASP を問題から問題への写像のようにとらえると ASP^n (ASP の n 乗の意味) という形でこれらの問題が書き表せる。つまり、ASP^n を次のように定義出来る。

定義 問題 Π の ASP^n とは次のような問題である。

入力 Π の最低 n 個の解を持つインスタンス 1 つとその解のうち n 個。

問題 入力されたインスタンスは与えられた n 個の解以外の解を持つか？

この記法によれば、ASP^0 でもともとの問題、ASP^1 で ASP が表わされる。
そして、1 対 1 還元について次の性質が成り立つ。

- 問題 Π から、ASP Π への多項式時間 1 対 1 還元が存在するとき、
それは ASP^n Π から ASP^{n+1} Π への多項式時間還元にもなっている。
- 問題 Π_1 から問題 Π_2 への多項式時間 1 対 1 還元が存在するとき、
それは ASP^n Π_1 から ASP^n Π_2 への多項式時間還元にもなっている。

ONE-IN-THREE 3SAT から ASP ONE-IN-THREE 3SAT への多項式時間 1 対 1 還元の存在が示され、ONE-IN-THREE 3SAT からカックロへの多項式時間 1 対 1 還元の存在が示されているので、カックロについて、任意の n について、この ASP^n も NP 完全であるということが示される。

5 まとめ

パズルの1つカックロについて、そのNP完全性が、そして、別解問題(ASP)及び、n個目の解を探す問題(ASP^n)についてもNP完全性が示され、解を数える問題については、その#P完全性が示された。結果として、パズルの多くがNP完全であるという予想に対する証拠が1つ加わった。また、別解を探すのもNP完全ということがわかったため、パズルの面白さと、その計算量との関係は単にパズルを解くところだけではないかもしれないということまで言う事も出来る。

さらにASP^nについてはその計算量を考えるときに使う道具がASPのものと全く同じであることから、一般に元の問題、及び、その問題のASPがNP完全ならば、任意のnについてASP^nがNP完全なのではないか、NP完全のみならず、その他の計算量についてもそれが成立するのではないか、と予想することも出来、更なる研究が期待される。

参考文献

[1] D. S. JOHNSON M. R. GAREY and R. ENDRE TARJAN. THE PLANAR HAMILTON CIRCUIT PROBLEM IS NP-COMPLETE. *SIAM J. COMPUT.*, Vol. 5, No. 4, December 1976.

[2] Nobuhisa UEDA and Tadaaki NAGAO. NP-completeness Results for NONOGRAM via Parsimonious Reductions. 1996.

[3] 瀬田剛広. パズルとカックロ、そして、その別解問題の計算量. http://www-imai.is.s.u-tokyo.ac.jp/~seta/. 卒業論文.

[4] 八登崇之. スリザーリンクのNP完全性について. 情報処理学会研究報告, 2000-AL-74.