アルゴリズム 85－1
（2002. 7. 25）

ハイパーリングの厚さについて

青木 洋延　　山崎 浩一

群馬大学 工学部 情報工学科
〒376-8515 群馬県 桐生市 天神町 1-5-1

概要　与えられたグラフ $G=(V,E)$ に対し，$\bigcup_{i=1}^{k} E_i = E$ かつ各 $G_i=(V,E_i)$ は平面グラフ，を満たす最小の k をグラフ G の厚さと呼ぶ．ハイパーリングとは，対称性が高く直径が小さいあるグラフである．本論文では，2^n 頂点を持つハイパーリングの厚さが高々 $\left\lceil \frac{2n+3}{5} \right\rceil$ であることを示す．

On the thickness of a hyper-ring

Hironobu Aoki　　Koichi Yamazaki

Department of Computer Science Gunma University
1-5-1 Tenjin-cho, Kiryu zip:376-8515, Gunma, Japan

abstract　Given a graph G the thickness of G is the minimum number of planar subgraphs of G whose union is G. A hyper-ring is a graph with small diameter and high-symmetry. In this paper we show that the thickness of a hyper-ring of 2^n vertices is at most $\left\lceil \frac{2n+3}{5} \right\rceil$.

1 はじめに

入力として与えられたグラフ G が平面でないならば，辺の交差を避けるためそれぞれの層で平面性が保持されるように辺集合を幾つかの層に分割することを考える．このとき必要となる最小の層の数は，グラフの厚さ (*thickness*) と呼ばれる．グラフの厚さを求める問題は，1961 年に Harary によって提案された [1]．それ以来様々なグラフのクラスに対し，厚さについての上界，下界が求められて来た．下界に対しては，Euler の多面体の公式から得られる自明な下界しか知られていない．上界に対しては，完全 2 部グラフ [4]，K_5-minor なグラフ [8]，辺数をパラメータとして持つもの [5]，最大次数をパラメータとして持つもの [7] などが報告されている．上界と下界が一致しているクラスとしては，完全グラフ [2]，ハイパーキューブ [10] などがある．上記のグラフ理論的研究以外にも，アルゴリズム的研究も行われていて，任意のグラフの厚さを求める問題は NP 完全であることが知られている [11]．また，近似率が 3 倍の多項式時間近似アルゴリズム，近似率が 6 倍の線形時間近似アルゴリズムやいくつかの発見的アルゴリズムが知られて

いる [8, 5]. ハイパーリングとは高度な対称性を持ち, 直径が短くかつある程度の連結度を持つあるグラフである. その性質からハイパーリングはネットワークトポロジーの一つのモデルとして考えられている [11]. 本論文では, 2^n 頂点を持つハイパーリングの厚さが高々 $\left\lceil \frac{2n+3}{5} \right\rceil$ であることを示す.

2 諸定義

グラフ $G=(V,E)$ に対し、辺集合 $F \subseteq E$ で誘導される部分グラフを $\underline{G[F]}$ で表す.

定義 **2.1** グラフ $H=(V,E)$ を $\underline{2^n \text{ ハイパーリング}}$ と呼ぶ. ここで, $V=\{0,\ldots,2^n-1\}$, $E=\{(u,v) \mid |v-u| \ mod\ 2^n \text{または} n-|u-v| \ mod\ 2^n \text{が} 2 \text{の巾乗}\}$.

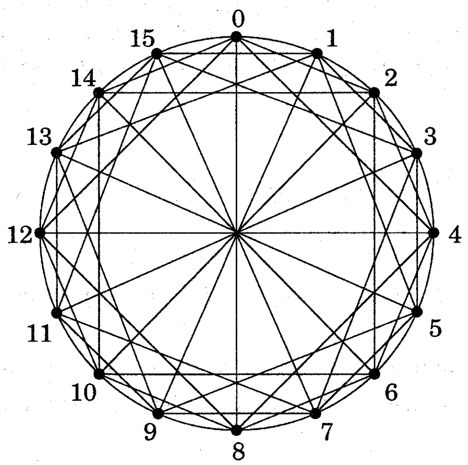


図 1: 2^4 ハイパーリング

2^n ハイパーリングの頂点数, 辺の本数, 次数は各々$|V(H)|=2^n$, $|E(H)|=(2n-1)2^{n-1}$, $^\forall u \in V(H), d_H(u)=2n-1$ である. 各辺 $\{u,v\} \in E(H)$ に対し, $\underline{\{u,v\} \text{の長さ}}$ を $\min\{|u-v|, n-|u-v|\}$ で定義し, $\underline{|\{u,v\}|}$ で表す. 各 $i(0 \le i \le n-1)$ に対し, 長さ 2^i の辺の集合を $\underline{E_i}$ で表す. すなわち, $E_i=\{\{u,v\} \mid |u-v|=2^i\}$. E_i の定義より明らかに, $H[E]=H[E_0 \cup E_1 \cup \ldots \cup E_{n-1}]$, $e_i \in E_i$ と $e_{i+k} \in E_{i+k}$ に対し, $2^k|e_i|=|e_{i+k}|(0 \le k \le n-i-1)$ が成り立つ.

定義 **2.2** 各 $0 \le i \le n-2$ 及び $0 \le j \le 2^i-1$ に対し, $H[E_i]$ に含まれるサイクルで頂点 j を持つものを $\underline{\text{レベル} i \text{における} v_j \text{を起点とするサイクル}}$ と呼び, $C(j)_i$ で表す. 混乱が生じない限り, $E(C(j)_i)$ を $C(j)_i$ 自身で表す.

定義より明らかに, $E_i=\bigcup_{j=0}^{2^i-1} C(j)_i$, $V(C(j)_i)=\{v_{j+k\cdot 2^i} \mid 0 \le k \le 2^{n-i}-1\}$.

注意 **2.3** $C(j)_i$ は長さ 2^{n-i} のサイクルで, $0 \le j_1 < j_2 \le 2^i-1$ ならば, $C(j_1)_i$ と $C(j_2)_i$ は互いに点素である.

表記 2.4 各 $0 \le j \le 2^{5i}-1$ に対し，$E(C(j)_{5i})$ を以下のように分割し，それぞれ $\underline{Even(C(j)_{5i})}$ と $\underline{Odd(C(j)_{5i})}$ で表す．

$$
\begin{aligned}
Even(C(j)_{5i}) &= \Big\{\{j, j+2^{5i}\}, \{j+2\cdot 2^{5i}, j+3\cdot 2^{5i}\}, \ldots, \{j+(2^{n-5i}-2)\cdot 2^{5i}, j+(2^{n-5i}-1)\cdot 2^{5i}\}\Big\} \\
Odd(C(j)_{5i}) &= \Big\{\{j+2^{5i}, j+2\cdot 2^{5i}\}, \{j+3\cdot 2^{5i}, j+4\cdot 2^{5i}\}, \ldots, \{j+(2^{n-5i}-1)\cdot 2^{5i}, j\}\Big\}
\end{aligned}
$$

表記 2.5 各 $0 \le i \le \lfloor \frac{n}{5} \rfloor - 1, 0 \le j \le 2^{5i}-1$ に対し，

$$
AEven_{5i} = \bigcup_{j=0}^{2^{5i}-1} Even\Big(C(j)_{5i}\Big), \quad AOdd_{5i} = \bigcup_{j=0}^{2^{5i}-1} Odd\Big(C(j)_{5i}\Big)
$$

と表す．

表記 2.6 $0 \le k \le 3$ に対し，$\underline{Odd(C(j)_{5i})\text{ を以下のように 4 分割したもの}}$ をそれぞれ $Oddquater(k)_{5i}$ で表す．すなわち，

$$
\begin{aligned}
Oddquater(k)_{5i} = \Bigg\{ & \Big\{j+(2k+1)\cdot 2^{5i}, j+(2k+2)\cdot 2^{5i}\Big\}, \\
& \Big\{j+(2k+9)\cdot 2^{5i}, j+(2k+10)\cdot 2^{5i}\Big\}, \\
& \ldots, \Big\{j+(2^{n-5i}+2k-7)\cdot 2^{5i}, j+(2^{n-5i}+2k-6)\cdot 2^{5i}\Big\}\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

定義 2.7 サイクル $C(j)_i$ に他の 2 つのサイクル $C(j)_{i+1}, C(j+2^i)_{i+1}$ を加えたものを $\underline{\text{拡張された } C(j)_i}$ と呼び，$eC(j)_i$ で表す (図 2 参照)．すなわち，$V(eC(j)_i) = V(C(j)_i)$, $E(eC(j)_i) = E(C(j)_i) \cup E(C(j)_{i+1}) \cup E(C(j+2^i)_{i+1})$．

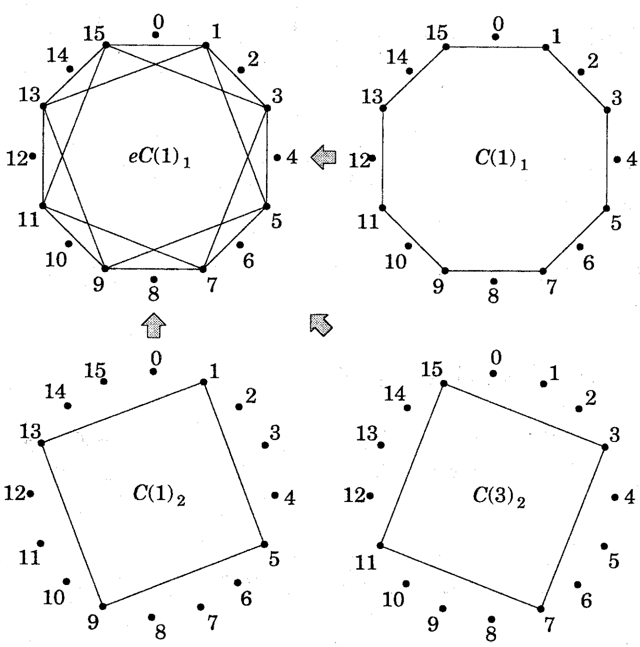


図 2: 頂点数 2^4 の $eC(1)_1$

定義 2.8 $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{5} \rfloor - 1$, $\ell \in \{5i+1, 5i+3\}$, $0 \leq j \leq 2^{\ell} - 1$とする. このとき, *3*つの辺からなる集合$\Big\{ \{j, j+2\cdot 2^{\ell}\}, \{j+2^{\ell}, j+3\cdot 2^{\ell}\}, \{j+2^{\ell}, j+2\cdot 2^{\ell}\} \Big\}$を<u>*remainder*</u>と呼び,$rem(j)_{\ell}$で表す.

表記 2.9 各$0 \leq j \leq 2^{5i}-1, \ell \in \{0,1\}$に対し, $eC(j+\ell\cdot 2^{5i})_{5i+1} - rem(j+\ell\cdot 2^{5i})_{5i+1}$を$\underline{eC^{-}(j+\ell\cdot 2^{5i})_{5i+1}}$で表し, $\bigcup_{j=0}^{2^{5i}-1} eC^{-}(j)_{5i+1}$を$\underline{E^{-}_{5i+1} \cup E^{-}_{5i+2}}$で表す.

表記 2.10 各$0 \leq j \leq 2^{5i}-1, 0 \leq k \leq 3, \ell \in \{2k+1, 2k+2\}$に対し, $eC(j+\ell\cdot 2^{5i})_{5i+3} - rem(j+\ell\cdot 2^{5i})_{5i+3}$を$\underline{eC^{-}(j+\ell\cdot 2^{5i})_{5i+3}}$で表し, $\bigcup_{j=0}^{2^{5i}-1} eC^{-}(j)_{5i+3}$を$\underline{E^{-}_{5i+3} \cup E^{-}_{5i+4}}$で表す.

3 証明の概略

定理$\theta(H) \leq \left\lceil \frac{2n+3}{5} \right\rceil$の証明の概略を説明するために, まず$\theta(H) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$を示す.

3.1 $\theta(H) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

補題 3.1 任意の$0 \leq i \leq n-2$に対し, $\theta(H[E_i \cup E_{i+1}]) = 1$.

証明 定義より, 各$0 \leq j \leq 2^i - 1$に対し, $V(C(j)_i) = V(C(j)_{i+1}) \oplus V(C(j+2^i)_{i+1})$は明らか. ここで$\oplus$は直和を表す. さらに, 拡張されたサイクルの定義より明らかに,

$$\theta\Big(H\Big[E(C(j)_i) \cup E(C(j)_{i+1}) \cup E(C(j+2^i)_{i+1})\Big]\Big) = 1.$$

よって, 注意2.3より,

$$\theta\left(H\left[\bigcup_{j=0}^{2^i-1}\Big(E(C(j)_i) \cup E(C(j)_{i+1}) \cup E(C(j+2^i)_{i+1})\Big)\right]\right) = 1.$$

従って, $E_i = \bigcup_{j=0}^{2^i-1} E(C(j)_i)$, $E_{i+1} = \bigcup_{j=0}^{2^i-1}(E(C(j)_{i+1} \cup E(C(j+2^i)_{i+1}))$より,
$\theta\left(H\left[E_i \cup E_{i+1}\right]\right) = 1$. □

定理 3.2 2^nハイパーリングの厚さは高々$\lceil \frac{n}{2} \rceil$である.

証明 2^nハイパーリングの辺は$H[E] = H[E_0 \cup E_1 \cup \ldots \cup E_{n-1}]$と分割できる. 補題3.1より$\theta(H[E_i \cup E_{i+1}]) = 1$であるので, 2つずつのペアを作ることにより厚さを$\lceil \frac{n}{2} \rceil$にすることができる.

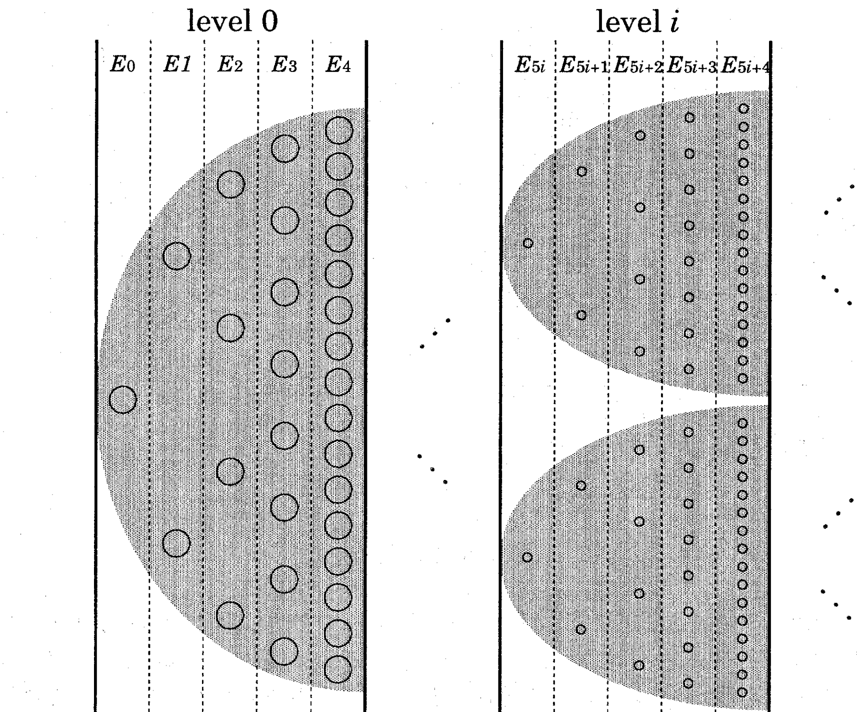
$$\underbrace{E_0 \cup E_1}_{1} \quad \underbrace{E_2 \cup E_3}_{2} \quad \underbrace{\cdots}_{\cdots} \quad \underbrace{E_{n-2} \cup E_{n-1}}_{\frac{n}{2}}$$

□

3.2 $\theta(H) \leq \left\lceil \frac{2n+3}{5} \right\rceil$

$\bigcup_{\ell=0}^{4} H[E_{5i+\ell}]$ をレベル i と呼び $H[E_{5i+\ell}]$ をレベル i のサブレベルと呼ぶ.

前述した定理 3.2 では, 2 つのレベル $i, i+1$ 上にあるすべてのサイクルを 1 枚に埋めこむことを考えた. レベル i がいくつかの辺を取り除いて 2 枚で埋めこみ可能なことが主定理の証明のポイントとなる (図 3 参照).



	E_0	$E1$	E_2	E_3	E_4		E_{5i}	E_{5i+1}	E_{5i+2}	E_{5i+3}	E_{5i+4}	
The length of cycle	2^n	2^{n-1}	2^{n-2}	2^{n-3}	2^{n-4}	· · ·	2^{n-5i}	2^{n-5i-1}	2^{n-5i-2}	2^{n-5i-3}	2^{n-5i-4}	· · ·
The number of cycles	1	2	4	8	16	· · ·	2^{5i}	2^{5i+1}	2^{5i+2}	2^{5i+3}	2^{5i+4}	· · ·

図 3: 全体の概略 1

各レベル i は, 2^{5i} 個の 層(図 3 の灰色部分) と呼ばれるサイクルの部分集合に分割できる. これらの各層は, 添字 j によって参照される. 異なる層に属する二つのサイクルは点に関して互いに素となる. レベル i の層 j について考える. サブレベル $H[E_{5i+1}], H[E_{5i+2}]$ は, 一部の辺を除いて $eC^{-}((j) + 0 \cdot 2^{5i})_{5i+1}$ と $eC^{-}((j) + 1 \cdot 2^{5i})_{5i+1}$ の 2 つに分割される (図 4 の左のより濃い灰色部分. 詳細は表記 2.9 参照). 一部の除かれた辺の集合は, $rem(j)_{5i+1}$ で参照される (図 4 の右の薄い灰色部分. 詳細は定義 2.8 参照). サブレベル $H[E_{5i+3}], H[E_{5i+4}]$ も, 一部の辺を除いて $eC^{-}((j + 2^{5i}) + 2k \cdot 2^{5i})_{5i+3}$ と $eC^{-}((j + 2^{5i}) + (2k+1) \cdot 2^{5i})_{5i+3}$ の 2 つに分割される (すなわち, $eC^{-}((j + 2^{5i}) + h \cdot 2^{5i})_{5i+3}, 0 \leq h \leq 7$ の 8 つに分割される). 一部の除かれた辺の集合は, $rem(j)_{5i+3}$ で参照される (図 4 参照).

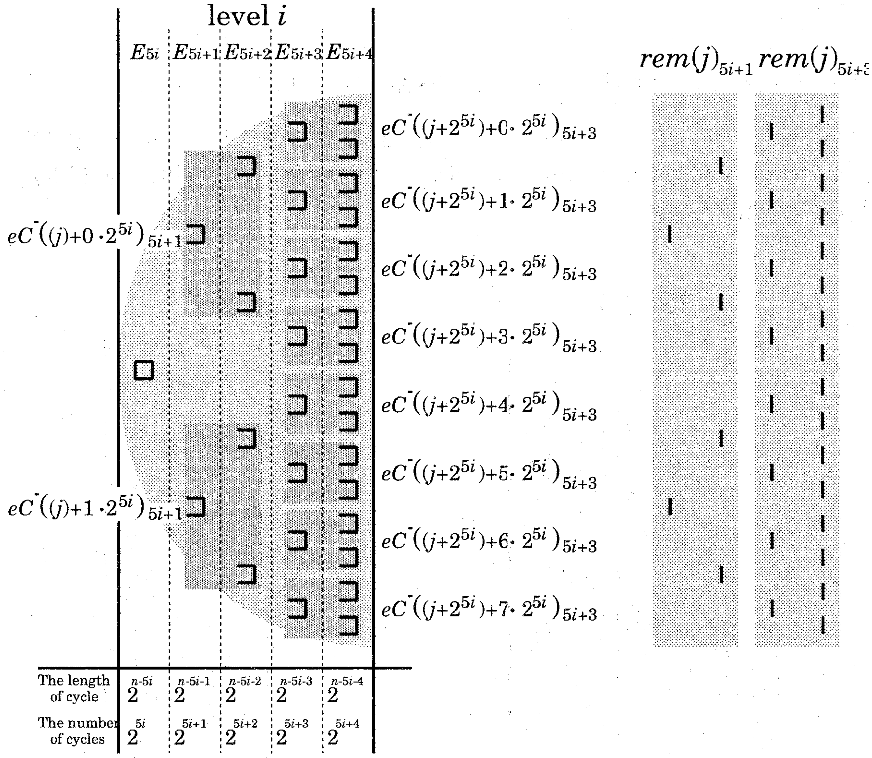


図 4: 全体の概略 2

補題 3.1 を用いると, $eC((j)+0\cdot 2^{5i})_{5i+1}$ と $eC((j)+1\cdot 2^{5i})_{5i+1}$ を 1 ページ (それを A と呼ぶ) にまとめ, $eC((j+2^{5i})+2k\cdot 2^{5i})_{5i+3}$ と $eC((j+2^{5i})+(2k+1)\cdot 2^{5i})_{5i+3}$ をさらに別の 1 ページ (それを B と呼ぶ) にまとめることができる. $\frac{2}{5}$ を実現するためには, もうこれ以上新しいページを使用することができないので, サブレベル $H[E_{5i}]$ にある長さ 2^{n-5i} のサイクルを, A, B どちらか, または両方のページのみを使って埋め込みを実現しなければならない. 証明の基本方針は, 以下の通りである (図 5 参照):

- サブレベル $H[E_{5i}]$ のサイクルの辺集合を $Even(C(j)_{5i})$ と $Odd(C(j)_{5i})$ の 2 つに分割する (表記 2.4 参照).
- $eC((j)+0\cdot 2^{5i})_{5i+1}$ と $eC((j)+1\cdot 2^{5i})_{5i+1}$ から定数個の辺 (つまり $rem(j)_{5i+1}$) を犠牲にする代わりに, より多くの辺 $Even(C(j)_{5i})$ を取り込み, それらを 1 ページで処理する.
- $eC((j+2^{5i})+2k\cdot 2^{5i})_{5i+3}$ と $eC((j+2^{5i})+(2k+1)\cdot 2^{5i})_{5i+3}$ から定数個の辺 (つまり $rem(j)_{5i+3}$) を犠牲にする代わりに, より多くの辺 $Odd(C(j)_{5i})$ を取り込み, それらを 1 ページで処理する.
- 各レベルと各層から生じた, 犠牲にした"定数個の辺"全体を定数ページで処理する (これが $\frac{2n+3}{5}$ の分子の 3 に対応する).

証明は 3 段階に分けられる. 第 1 段階では, まず以下を示す.

$$\theta\Bigl(H\left[E\Bigl(eC^-(j)_{5i+1}\Bigr)\cup E\Bigl(eC^-(j+2^{5i})_{5i+1}\Bigr)\cup Even(j)_{5i}\right]\Bigr)=1.$$

これより直ちに以下が証明できる.

$$\theta\left(H\left[E^-_{5i+1}\cup E^-_{5i+2}\cup AEven_{5i}\right]\right)=1.$$

第 2 段階では, サブレベル $H[E_{5i+3}]$ は長さ 2^{n-5i-3} のサイクルを持つ. $Odd(C(j)_{5i})$ を $Oddquater(k)_{5i}$ $0\le k\le 3$ の 4 つに分割し (表記 2.6 参照) 示すことができる.

$$\theta\left(H\left[\bigcup_{k=0}^{3}\left(E\left(eC^-\left(j+2k\cdot 2^{5i}\right)_{5i+3}\right)\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\cup E\left(eC^-\left(j+(2k+1)\cdot 2^{5i}\right)_{5i+3}\right)\cup Oddquater(k)_{5i}\right)\right]\right)=1.$$

これにより以下が証明できる.

$$\theta\left(H\left[E^-_{5i+3}\cup E^-_{5i+4}\cup AOdd_{5i}\right]\right)=1.$$

以上より, 以下が証明される.

$$\theta\left(H\left[E_i\cup E^-_{i+1}\cup E^-_{i+2}\cup E^-_{i+3}\cup E^-_{i+4}\right]\right)=2.$$

第 3 段階では, 除かれた辺 $rem(j)_{5i+1}, rem(j)_{5i+3}$ を以下のように埋めこむ.

$$\theta\left(H\left[\bigcup_{i=0}^{\lfloor\frac{n}{5}\rfloor-1}\left(\bigcup_{j=0}^{2^{5i}-1}\left(rem(j)_{5i+1}\cup rem(j)_{5i+3}\right)\right)\right]\right)=1$$

最後に, n が 5 の倍数でない場合は余分にさらに高々2 ページを追加することにより処理できるので, $\theta(H)\le\left\lceil\frac{2n+3}{5}\right\rceil$ が成り立つ.

参考文献

[1] F. Harry, Research Problem, (Bull. Amer. Math. Soc. 67, 1992), 542.

[2] V. B. Alekseev and V. S. Gončakov, The thickness of an arbitary, complete graph, Math. Sbornik 30,2, (1991), 187-202.

[3] L. W. Beineke, The decomposition of complete graphs into planar subgraphs, in: Graph theory and theoretical physics,Academic Press, New York (1967), 139-153.

[4] L. W. Beineke,F. Harary and J.W. Moon, On the thickness of the complete bipartite graph, Proc. Camb. Phil. Soc. 60(1964), 1-5.

[5] P. Mutzel, T. Odenthal and M. Scharbrodt, The Thickness of Graphs: A Survey, Research Report, Max-Planck-Institut für Informatik, Number MPI-I-96-1-009(1996).

[6] J. Halton, On the thickness of graphs of given degree, Info. Sci.,54 (1991) 219-238.

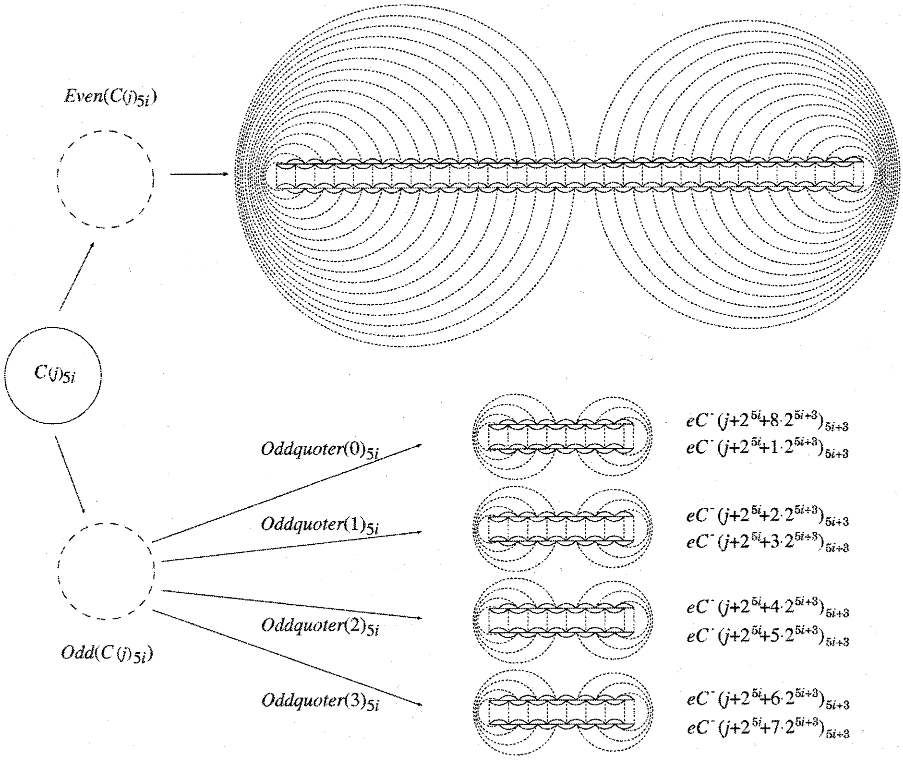


図 5: $eC(j)_{5i}$ の埋め込み

[7] M. Jünger, P.Mutzel, T.Odenthal and M. Scharbrodt, The thickness of a Minor-Excluded Class of Graphs, to appear in Discrete Mathematics, Special Volume on the Third Slovenian Inretnational Conference in Graph Theory,Bled (1994).

[8] 川野晋一郎, 山崎 浩一, グラフの厚さに関する近似アルゴリズム, 2001 年度 L A シンポジウム, 京都, 2002 年 2 月.

[9] M. Kleinert, Die Dicke des n-dimensionalen Würfel-Graphen, J. Comb. Theo. 3(1967), 10-15.

[10] A. Mansfiled, Determining the thickness of graphs is NP-hard, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 9(1983) 9-23.

[11] K. Obokata, Y. Nishitani, Y. Igarashi, A Probably Optimal Embedding of Hyper-Rings in Hypercubes, Information Processing Letters 58(3) (1996) 117-122.