局所情報を利用するグラフ上のランダムウォークのカバータイムについて

池田 諭 (東京農工大・工)　久保 泉 (広島大学・理)
奥本 哲大 ((株) 日立・金融システム事業部)　山下 雅史 (九州大学・工学部)

概要

有限グラフ上で隣接する頂点に等確率で遷移するランダムウォークのカバータイムは，グラフの頂点数を n とするとき $O(n^3)$ となることが知られている．このとき，隣接する頂点に等確率で遷移するという規則は，グラフ全体の接続情報を保持しないという状況を反映したものであると考えられる．よって，頂点の接続関係の局所情報を利用できる場合は，より望ましい遷移確率の規則を設計出来る可能性がある．本稿では，著者たちが提案した遷移確率行列 $\widehat{P} = (\widehat{p}_{uv})$ を用いるとカバータイムが $O(n^2 \log n)$ となることを示す．ここで，$N(u)$ を頂点 u に隣接する頂点の集合，$\deg(u)$ を頂点 u の次数とすると，$\widehat{P}$ とは，$v \in N(u)$ ならば $\widehat{p}_{uv} = \min\{1/\deg(u), 1/\deg(v)\}$ また，$\widehat{p}_{uu} = 1 - \sum_{v \notin N(u)} \widehat{p}_{uv}$ で定義されるものである．

Local Topological Information and Cover Time

Satoshi Ikeda(Tokyo University of Agri. & Tech.)　Izumi Kubo(Hiroshima University)
Norihiro Okumoto(Hitachi,Ltd)　Masafumi Yamashita(Kyushu University)

abstract

It is just amazing that the cover time of a random walk on a finite graph, in which the vertex visited next is selected from the adjacent vertices at random with the same probability, is bounded by $O(n^3)$ for any graph with order n, despite of the lack of global topological information. Thus a natural guess is that a better transition matrix is designable if more topological information is available. By investigating the transition matrix $\widehat{P} = (\widehat{p}_{uv})$ proposed by Ikeda et al., this paper shows that for any graph with order n, the cover time with respect to $\widehat{P}$ is bounded by $O(n^2 \log n)$, where $\widehat{p}_{uv} = \min\{1/\deg(u), 1/\deg(v)\}$ for $v \in N(u)$, $\widehat{p}_{uu} = 1 - \sum_{v \in N(u)} \widehat{p}_{uv}$, and $\deg(u)$ is the degree of a vertex u.

1 Introduction

応用数学やコンピュータサイエンスにおいて有限グラフ上のランダムウォークは興味深い研究対象であり，これまでに多くの研究成果が報告されている．例えば，Blom ら [9, Chap. 12] は，有限グラフ上のランダムウォークについて，隣接する頂点に等確率で遷移するという設定 [2, 3, 4, 5, 7, 8, 10] において，全ての頂点を訪問するのに必要な移動回数の平均について詳しく調査している．それによれば，Aleliunas [1] らは，頂点数 n，辺数 m の任意のグラフにおいて，カバータイムの上界が $2m(n-1)(= O(n^3))$ であることを示している．また，Fig. 1 の lollipop グラフと呼ばれるグラ

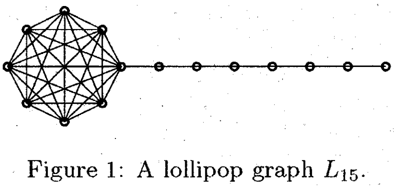

Figure 1: A lollipop graph L_{15}.

フ L_n のカバータイムが $\Omega(n^3)$ であることを示している．lollipop グラフ L_n とは，頂点数 $\lceil n/2 \rceil$

の完全グラフのいずれかの頂点に長さ $\lfloor n/2 \rfloor$ の線グラフが付いたグラフのことである．この意味でこのランダムウォークのカバータイムは，$\Theta(n^3)$ である．

本稿では，無向グラフ $G=(V,E)$ 上のランダムウォークを $V\times V$ 上での遷移確率行列 $P=(p_{uv})\in[0,1]^{V\times V}$ を持つマルコフ課程とみなすことにする．ここで，v が u に隣接しているならば，$p_{uv}=1/\deg(u)$，隣接していないならば $p_{uv}=0$ とする．また，$\deg(u)$ は $u\in V$ の次数を意味するものとする．P は，各々の頂点 u の局所報情 $\deg(u)$ だけを用いている．そこで，次のような推論はもっともらしい．

> グラフの位相的な情報をより多く利用できれば，カバータイムを小さくするような遷移確率行列を設計することができる

この推論は，多くの場合に実際正しい．例えば，完全グラフ K_n において遷移確率行列 P に対して，カバータイムは，$O(n\log n)$ であるが，理想的な遷移確率行列 Q を用いればカバータイムは $n-1$ に改善出来る[1]．しかし，グラフの完全な情報を保持してさえカバータイムを短縮する助けにならない場合もある．

本稿では，隣接しているグラフの次数の情報が利用可能ならば Aleliunas らの主張の意味で，$\Theta(n^3)$ が $\Theta(n^2\log n)$ へ改善出来ることを示す．すなわち，$N(u)$ を u の隣接した頂点の集合とするとき，遷移確率行列 $\widehat{P}=(\widehat{p}_{uv})$ を次のように定義する．

$$\widehat{p}_{uv}=\begin{cases}0 & \text{if } u\neq v \text{ and } v\notin N(u),\\ \min\{1/\deg(u),1/\deg(v)\} & \text{if } v\in N(u),\\ 1-\sum_{v\in N(u)}\widehat{p}_{uv} & \text{otherwise if } u=v.\end{cases}$$

このとき，次の 2 つの事実が成り立つことを示す．

1) 任意の無向グラフ G に対して カバータイムは $O(n^2\log n)$.

2) Fig. 2 で与えられる cobweb グラフ W_n は，$\Omega(n^2\log n)$ である．

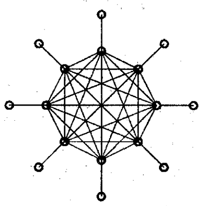

Figure 2: A Cobweb graph W_{16}.

我々の研究は，Israeli と Jalfon [6] による確率的な相互排除問題に動機付けられている．彼らの提案したアルゴリズムは，次のようなものである．グラフ G をその頂点と辺をそれぞれプロセスと通信リンクとみなした分散システムのモデルと考える．トークンを遷移確率行列 P に従ってグラフ G 上でランダムウォークさせる．そして，トークンを保持している頂点 (＝プロセス) に独占的に権限を与える．カバータイムとは，直観的には特権を得るための最も長い待ち時間の平均のことであり，既に述べたように最悪の場合 $\Theta(n^3)$ が必要である．また，P の定常分布を $\pi=(\pi_u)$ とすると，$\pi_u=deg(u)/2m$ (e.g., [10]) であることも知られている．これは，特権を得る回数が $deg(u)$ の比に等しいことを意味している．

全ての頂点が同じ頻度でトークンを受け取るために著者ら [12] は，Israeli–Jalfon のアルゴリズムの P の代わりに $\widehat{P}$ を提案した．またこのとき，($\widehat{P}$ に対する)lollipop グラフ L_n のカバータイムは $O(n^2)$ となるので $\widehat{P}$ の方が場合によっては P よりも望ましいことを指摘した．本稿で証明している $\Theta(n^2\log n)$ の上界は，[12] での予想についての肯定的な答えになっている．これは，Israeli–Jalfon のアルゴリズムにおいて，$\widehat{P}$ の方が P よりも望ましいことを意味している．また，($\widehat{P}$ に対して) 実際に $\Omega(n^2\log n)$ であるようなグラフが存在することはこれまで知られていなかった．そこで，本稿ではその例として cobweb グラフ W_n を紹介している．

[1] K_n の頂点を $\{0,1,\ldots,n-1\}$ とする．$q_{ij}=1 \iff j=i+1 (\mathrm{mod}\ n)$ で $Q=(q_{ij})$ を定める．このとき，Q に対するカバータイムは明らかに $n-1$ である．

2 Definitions and Notations

$G=(V,E)$ を連結な無向単純グラフとする．ここで，$n=|V|$ および $m=|E|$ とする．$u\in V$, に対して 隣接する頂点の集合を $N(u)=\Big\{v:(u,v)\in E\Big\}$ と記す．G は無向グラフなので，$v\in N(u) \iff u\in N(v)$ が常に成り立つ．$u\in V$ の次数を $\deg(u)=|N(u)|$ と定める．また，G の最大次数を $\deg(G)=\max_{v\in V}\deg(v)$ と記す．

頂点の無限列の集合を $\Omega=V^{\mathbf{N}\cup\{0\}}$ とする．ただし，$\mathbf{N}$ は自然数の集合である．$\omega=(\omega_0,\omega_1,\cdots)\in\Omega$, に対して，$(i+1)$ 番目の要素 w_i を $X_i(\omega)$ と記す．Ω 上のマルコフ測度全体の集合を $\mathcal{M}(\Omega)$ とする．$\mu\in\mathcal{M}(\Omega)$ は，初期分布 $\mathbf{q}^{(0)}=(q_v^{(0)})\in[0,1]^{V\times V}$ と遷移確率行列 $Q=(q_{uv})\in(0,1]^{V\times V}$ を持つとする．すなわち，$\omega=(\omega_0,\omega_1,\cdots)\in\Omega$, $t\in\mathbf{N}\cup\{0\}$, に対して，

$$X_t:\Omega\to V,\quad X_t(\omega)=\omega_t,$$

$$\sum_{v\in V}q_v^{(0)}=1,\quad \mu(X_0(\omega)=v)=q_v^{(0)}\quad\text{for any } v\in V,$$

$$\sum_v q_{uv}=1\quad\text{for any } u\in V,$$

かつ $u,v,x_0,x_1,\cdots,x_{i-1}\in V$ と $i\in\mathbf{N}$ に対して，

$$\begin{aligned}&\mu(X_{i+1}(\omega)=v|X_0(\omega)=x_0,X_1(\omega)=x_1,\cdots,X_{i-1}(\omega)=x_{i-1},X_i(\omega)=u)\\ =\ &\mu(X_{i+1}(\omega)=v|X_i(\omega)=u)=q_{uv}\end{aligned}$$

が成り立つものとする．このとき，グラフ $G=(V,E)$ 上のランダムウォークを扱うことから，一般性を失わずに

$$\begin{aligned}v\in N(u)\quad&\Longrightarrow\quad q_{uv}>0\\ v\notin N(u)\cup\{u\}\quad&\Longrightarrow\quad q_{uv}=0\end{aligned}$$

を仮定して良い．よって，以後

$$\mathcal{M}^+(\Omega)=\left\{\mu\in\mathcal{M}(\Omega)\,\middle|\, q_{uv}>0 \text{ if } v\in N(u)\ \text{ and }\ q_{uv}=0 \text{ if } v\notin N(u)\cap\{u\}\right\}$$

に測度を制限して議論をすることにする．

各辺のコストを定義するために，コスト行列 $K=(k_{uv})\in[0,\infty)^{V\times V}$ を用いる．$\omega\in\Omega$ に対して，

$$n(\omega)=\inf\Big\{i\in\mathbf{N}:\{X_0(\omega),X_1(\omega),\cdots,X_i(\omega)\}=V\Big\}$$

とする．ω が G 上でトークンがランダムウォークした道であるとき $n(\omega)$ は，G の全ての頂点をカバーするのに ω が要した移動回数を意味している．我々の興味は，

$$k(\omega)=\sum_{i=0}^{n(\omega)-1}k_{X_i(\omega)X_{i+1}(\omega)}.$$

にある．$k(\omega)$ は，全ての頂点を訪れるのに必要なコストを意味する．

$\mu\in\mathcal{M}(\Omega)$，コスト行列 K および $u,v\in V$ に対して，$H_\mu^{G,K}(u,v)$ および $C_\mu(G,K)$ を次のように定める．

$$H_\mu^{G,K}(u,v)=E_\mu\left[\sum_{i=0}^{t(\omega,v)-1}k_{X_i(\omega)X_{i+1}(\omega)}\middle|X_0(\omega)=u\right],\quad t(\omega,v)=\inf\Big\{i\geq1|X_i(\omega)=v\Big\}$$

$$C_\mu(G,K)=\max_{u\in V}C_\mu(G,K,u),\quad C_\mu(G,K,u)=\mathbf{E}_\mu\Big[k(\omega)|X_0(\omega)=u\Big].$$

一般に，$H_\mu^{G,K}(u,v) \neq H_\mu^{G,K}(v,u)$ が成り立つ．我々は，$H_\mu^{G,K}(u,v)$ を μ と K に関する u から v への重み付き平均ヒッティングタイム (*the weighted mean hitting time*)，また，$C_\mu(G,K)$ を G の μ と K に関する重み付きカバータイム (*the weighted cover time*) と呼ぶ．また，特にコスト行列 K^0 が次のように与えられるとき

$$k_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{if } v \in N(u) \cup \{u\}, \\ 0 & \text{otherwise} . \end{cases}$$

$H_\mu^{G,K^0}(u,v)$，$C_\mu(G,K^0)$ のことを，単にヒッティングタイムおよび カバータイムと呼ぶこともある．

以後断りがない限り，$\widehat{\nu}$ は，初期分布 $\widehat{\mathbf{p}}^{(0)} = (\widehat{p}_v^{(0)}) \in (0,1]^{V\times V}$ であり，遷移確率行列 $\widehat{P} = (\widehat{p}_{uv}) \in [0,1]^{V\times V}$ が

$$\widehat{p}_{uv} = \begin{cases} 0 & \text{if } u \neq v \text{ and } v \notin N(u), \\ \min\{1/\deg(u), 1/\deg(v)\} & \text{if } v \in N(u), \\ 1 - \sum_{v \in N(u)} \widehat{p}_{uv} & \text{otherwise if } u = v. \end{cases}$$

で定まる Ω 上のマルコフ測度とする．明らかに $\widehat{\nu} \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ である．

3 重み付きカバータイムの上界

はじめに，重み付きヒッティングタイムとカバータイムの関係について紹介する．次の定理は，[3] および [10] を一般化したものである．

Theorem 1 任意の $G = (V,E)$，コスト行列 K および $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ に対して，次の不等式が成立する．

$$H_{n-1} \min_{u \neq v \in V} H_\mu^{G,K}(u,v) \leq C_\mu(G,K) \leq H_{n-1} \max_{u \neq v \in V} H_\mu^{G,K}(u,v). \tag{3.1}$$

ただし，H_n は調和数とする．すなわち，$H_n = \sum_{i=1}^{n} i^{-1}$ である．

Proof S_V を V の全ての順列からなる集合とし，ν を S_V 上の一様測度とする．$\pi = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in S_V$ に対して，$\sigma_j(\pi) = v_j$ と記す．

固定した $u \in V$ に対して ν_u は，測度 ν を $\{\pi : \sigma_1(\pi) = u\}$ で条件付けた条件付き確率測度とし，また，μ_u は測度 μ を $\{\omega : X_0(\omega) = u\}$ で条件付けた条件付き確率測度とする．このとき，P_u を

$$P_u = \mu_u \times \nu_u$$

で定める．また，$\tau(\omega, v)$，$T_j(\omega,\pi)$ および $\ell_j(\omega,\pi)$ を，それぞれ次のように定義する．

$$\tau(\omega, v) = \inf\{t \geq 0 : X_t(\omega) = v\}, \quad T_j(\omega,\pi) = \max_{i \leq j} \tau(\omega, \sigma_i(\pi)) \quad \text{and} \quad \ell_j(\omega,\pi) = X_{T_j(\omega,\pi)}(\omega),$$

明らかに，

$$T_{j-1}(\omega,\pi) < T_j(\omega,\pi) \quad \Longleftrightarrow \quad \ell_{j-1}(\omega,\pi) \neq \ell_j(\omega,\pi)$$

であるから，Fubini の定理により以下が成り立つ．

$$\begin{aligned} P_u(\ell_{j-1}(\omega,\pi) \neq \ell_j(\omega,\pi)) &= P_u(T_{j-1}(\omega,\pi) < T_j(\omega,\pi)) \\ &= P_u(\tau(\omega,\sigma_i(\pi)) < \tau(\omega,\sigma_j(\pi)),\ 2 \leq i < j) \\ &= \int_\Omega \nu_u(\{\pi : \tau(\omega,\sigma_i(\pi)) < \tau(\omega,\sigma_j(\pi)),\ 2 \leq i < j\}) d\mu_u(\omega) \\ &= \int_\Omega \frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-j)!} \times \frac{(j-2)!(n-j)!}{(n-1)!} d\mu_u(\omega) = \frac{1}{j-1}. \end{aligned}$$

任意の $\pi \in S_n$ に対して $T_n(\omega,\pi) = n(\omega)$ が成り立つので,

$$\begin{aligned}
& C_\mu(G,K,v) \\
= \ & E_{P_u}\left[\sum_{s=0}^{T_n(\omega,\pi)-1} k_{X_s(\omega)X_{s+1}(\omega)}\right] \\
= \ & \sum_{j=2}^{n} E_{P_u}\left[\sum_{s=0}^{T_j(\omega,\pi)-1} k_{X_s(\omega)X_{s+1}(\omega)} - \sum_{s=0}^{T_{j-1}(\omega,\pi)-1} k_{X_s(\omega)X_{s+1}(\omega)}\right] \\
= \ & \sum_{j=2}^{n} E_{P_u}\left[\sum_{s=T_{j-1}(\omega,\pi)}^{T_j(\omega,\pi)-1} k_{X_s(\omega)X_{s+1}(\omega)} : \ell_{j-1}(\omega,\pi) \neq \ell_j(\omega,\pi)\right] \\
= \ & \sum_{j=2}^{n} \sum_{\xi\neq\eta\in V} E_{P_u}\left[\sum_{s=T_{j-1}(\omega,\pi)}^{T_j(\omega,\pi)-1} k_{X_s(\omega)X_{s+1}(\omega)} : \ell_{j-1}(\omega,\pi) = \xi, \ell_j(\omega,\pi) = \eta\right]. \\
= \ & \sum_{j=2}^{n} \sum_{\xi\neq\eta\in V} H_\mu^{G,K}(\xi,\eta) P_u(\ell_{j-1}(\omega,\pi) = \xi, \ell_j(\omega,\pi) = \eta). \\
\leq \ & \max\{H_\mu^{G,K}(\xi,\eta) : \xi \neq \eta \in V\} \sum_{j=2}^{n} \sum_{\xi\neq\eta} P_u(\ell_{j-1}(\omega,\pi) = \xi, \ell_j(\omega,\pi) = \eta) \\
= \ & \max\{H_\mu^{G,K}(\xi,\eta) : \xi \neq \eta \in V\} \sum_{j=2}^{n} P_u(\ell_{j-1}(\omega,\pi) \neq \ell_j(\omega,\pi))
\end{aligned}$$

を得る. 以上から不等式 (3.1) の右側が示された.

左側も同様にして示すことが出来るので, 証明は省略する. □

Theorem 1 の評価は最良である. 例えば、完全グラフ K_n のカバータイムを不等式 (3.1) を使って評価することを考える。

$$\min_{u\neq v\in V} H_{\hat{\nu}}^{K_n,K^0}(u,v) = \max_{u\neq v\in V} H_{\hat{\nu}}^{K_n,K^0}(u,v)$$

かつ

$$C_{\hat{\nu}}(K_n,K^0) = H_{n-1} H_{\hat{\nu}}^{K_n,K^0}(u,v)$$

だから Theorem 1 は, 完全グラフの正確なカバータイムを与えることがわかる.

Theorem 1 は, 更に次のように一般化することが出来る. 4 章では, この定理を使って $\hat{\nu}$ に対するカバータイムの下界を与えるグラフの存在を示す. 証明は, Theorem 1 と同様なので省くことにする.

与えられたグラフ $G = (V,E)$, コスト行列 K, $\mu \in M^+(\Omega)$ および $u \in V' \subseteq V$ に対して, $C_\mu(G,V',K)$ を

$$C_\mu(G,V',K) = \max_{u\in V'} C_\mu(G,V',K,u), \quad C_\mu(G,V',K,u) = E_\mu[k_{V'}(\omega) | X_0(\omega) = u]$$

と定義する. ただし, $k_{V'}(\omega)$ は次のように定義されるものとする.

$$k_{V'}(\omega) = \sum_{i=0}^{n_{V'}(\omega)-1} k_{x_i(\omega)x_{i+1}(\omega)}, \ n_{V'}(\omega) = \inf\left\{i \in \mathbf{N} \mid \{X_0(\omega), X_1(\omega), \cdots, X_{i-1}(\omega)\} = V'\right\}.$$

$C_\mu(G,V',K)$ を $G = (V,E)$ 上のランダムウォークについての $V' \subset V$ に対する重み付きカバータイム (*the weighted cover time for the subset V' of V*) と呼ぶ.

Theorem 2 任意の $G=(V,E)$，コスト行列 K, $\mu \in \mathcal{M}^{+}(\Omega)$ および $V' \subseteq V(|V'|=n')$ に対して

$$H_{n'-1} \min_{u \neq v \in V'} H_{\mu}^{G,K}(u,v) \leq C_{\mu}(G,V',K) \leq H_{n'-1} \max_{u \neq v \in V'} H_{\mu}^{G,K}(u,v)$$

が成り立つ.

与えられた $G=(V,E)$，遷移確率行列 Q およびコスト行列 K に対して，重み付き平均コスト (*the weighted average cost*) $\overline{k}=\overline{k}(G,Q,K)$ を，$\{X_t\}$ の定常測度に関する $k_{X_0(\omega),X_1(\omega)}$ の平均値とする．このとき，$Q=\widehat{P}$ の場合は

$$\overline{k}(G,\widehat{P},K)=\frac{1}{n}\sum_{u\in V}\sum_{v\in V} p_{uv}k_{uv}$$

となることがわかる.

本稿の主要な結果を次に述べる.

Theorem 3 任意の $G=(V,E)$，コスト行列 K に対して

$$C_{\widehat{\nu}}(G,K) \leq 2n(3n-4)H_{n-1}\overline{k}.$$

が成り立つ.

Proof 定義により，

$$H_{\widehat{\nu}}^{G,K}(u,v)=\sum_{w\in V}\widehat{p}_{uw}(k_{uw}+H_{\widehat{\nu}}^{G,K}(w,v))-\widehat{p}_{uv}H_{\widehat{\nu}}^{G,K}(v,v) \tag{3.2}$$

が成り立つ．P は重確率行列だから，

$$\begin{aligned}\sum_{u\in V} H_{\widehat{\nu}}^{G,K}(u,v) &= \sum_{u\in V}\sum_{w\in V}\widehat{p}_{uw}(k_{uw}+H_{\widehat{\nu}}^{G,K}(w,v))-\sum_{u\in V}\widehat{p}_{uv}H_{\widehat{\nu}}^{G,K}(v,v)\\ &= \sum_{u\in V}\sum_{w\in V}\widehat{p}_{uw}k_{uw}+\sum_{w\in V}H_{\widehat{\nu}}^{G,K}(w,v)-H_{\widehat{\nu}}^{G,K}(v,v)\end{aligned}$$

であるから，

$$H_{\widehat{\nu}}^{G,K}(v,v)=\sum_{u\in V}\sum_{w\in V}\widehat{p}_{uw}k_{uw}=\overline{k}(G,K)n \quad \text{for any} \quad v\in V. \tag{3.3}$$

式 (3.2) において $u=v$ と置くと，$w\notin N(v)\cup\{v\} \implies \widehat{p}_{vw}=0$ なので，

$$H_{\widehat{\nu}}^{G,K}(v,v)=\sum_{w\in V}\widehat{p}_{vw}k_{vw}+\sum_{w\in N(v)}\widehat{p}_{vw}H_{\widehat{\nu}}^{G,K}(w,v)\geq\sum_{w\in N(v)}\widehat{p}_{vw}H_{\widehat{\nu}}^{G,K}(w,v).$$

それゆえ，任意の $u\in N(v)$ に対して

$$H_{\widehat{\nu}}^{G,K}(v,v)\geq\widehat{p}_{vu}H_{\widehat{\nu}}^{G,K}(u,v)=\Big(\max\{\deg(u),\deg(v)\}\Big)^{-1}H_{\widehat{\nu}}^{G,K}(u,v)$$

を得る．よって，式 (3.3) とあわせて，

$$H_{\widehat{\nu}}^{G,K}(u,v)\leq\max\{\deg(u),\deg(v)\}\,\overline{k}(G,\widehat{P},K)n \quad \text{for any } v\in V,\ u\in N(v) \tag{3.4}$$

を得る．次に，式 (3.4) を用いて重み付きヒッティングタイムの評価をする．$u\neq v$ であるような任意の $u,v\in V$ に対して $1\leq i<i+2<j\leq l$ であれば

$$\Big(N(v_i)\cup\{v_i\}\Big)\bigcap\Big(N(v_j)\cup\{v_j\}\Big)=\emptyset \tag{3.5}$$

となる u, v の最短路 $u = v_0, v_1, \cdots, v_l = v$ を選ぶことが出来る．もし，$j > i + 2$ であるような i と j に対して $w \in N(v_i) \cap N(v_j)$ を満たす $w \in V$ が存在するならば，

$$u = v_0, v_1, \cdots, v_i, w, v_j, \cdots, v_l = v,$$

は u と v を結ぶ長さ l より短い経路となるので，$u = v_0, v_1, \cdots, v_l = v$ が最短路であることに反するからである．式 (3.5) を満たす道に対して，

$$\sum_{i=0}^{l} \deg(v_i) \leq 3n - 4 \tag{3.6}$$

であることがわかる．任意の $x, y, z \in V$ に対して $H_{\widehat{\nu}}^{G,K}(x, y) \leq H_{\widehat{\nu}}^{G,K}(x, z) + H_{\widehat{\nu}}^{G,K}(z, y)$ であるから，

$$H_{\widehat{\nu}}^{G,K}(u, v) \leq \sum_{i=0}^{l-1} H_{\widehat{\nu}}^{G,K}(v_i, v_{i+1}) \tag{3.7}$$

が成り立つ．式 (3.4)，(3.6) および (3.7) から

$$H_{\widehat{\nu}}^{G,K}(u, v) \leq 2n(3n-4)\overline{k} \quad \text{for any} \quad u, v \in V \tag{3.8}$$

を得る．Theorem 3 は，式 (3.8) を Theorem 1 に適用することで得られる． □

4 カバータイムが $\Theta(n^2 \log n)$ となるグラフの存在

この章では，カバータイムの上限が $\Theta(n^2 \log n)$ であることを示す．$\overline{k}(G, \widehat{P}, K^0) \equiv 1$ であるから，Theorem 3 はカバータイムの一般的な上界を与えている．

Corollary 1 任意の $G = (V, E)$ に対して，

$$C_{\widehat{\nu}}(G, K^0) = O(n^2 \log n)$$

が成り立つ．

よって，カバータイムの上限が $\Theta(n^2 \log n)$ であることを示すためにはカバータイムが $\Omega(n^2 \log n)$ となるグラフが存在を示せば良い．1 章で紹介した Cobweb グラフ W_n その例になっていることが Theorem 2 を用いて簡単な計算で示すことが出来る．

Theorem 4

$$C_{\widehat{\nu}}(W_n, K^0) = \Theta(n^2 \log n).$$

Proof $K_{n/2}$ に属していない頂点の集合を V_O^n とおく．$u \neq v$ であるような任意の $u, v \in V_O^n$ に対して，

$$H_{\widehat{\nu}}^{G,K^0}(u, v) = \frac{1}{2}n^2 + n$$

であることがわかる．よって，Theorem 2 により

$$C_{\widehat{\nu}}(W_n, V_O^n, K^0) \geq (\frac{1}{2}n^2 + n)H_{(n-2)/2}$$

であることがわかる．明らかに，$C_{\widehat{\nu}}(W_n, K^0) \geq C_{\widehat{\nu}}(W_n, V_O^n, K^0)$ であるから，

$$(\frac{1}{2}n^2 + n)H_{(n-2)/2} \leq C_{\widehat{\nu}}(W_n, K^0). \tag{4.1}$$

Corollary 1 と式 (4.1) より

$$(\frac{1}{2}n^2 + n)H_{(n-2)/2} \leq C_{\widehat{\nu}}(W_n, K^0) \leq 2n(3n-2)H_{n-1}$$

を得る．これは，Theorem 4 を意味している． □

5 まとめ

有限グラフ上のランダムウォークの話題は，応用数学およびコンピュータサイエンスにおいて数多く取り上げられてきた．グラフ全体の情報を保持していないときは，遷移確率行列 P の規則の下で，カバータイムは $O(n^3)$ となることが知られているが周辺の情報を利用できる場合は，カバータイムをより小さく改善するような別な遷移規則を定めることが可能かもしれない．本稿では，遷移規則 $\widehat{P}$ に対するカバータイムを調べた．遷移規則 $\widehat{P}$ は，隣接した頂点の次数の情報を利用出来る設定に対応するものである．

その結果，$\widehat{P}$ に対応するカバータイムは，$O(n^2 \log n)$ になることを発見した．また，cobweb グラフ W_n が $\Omega(n^2 \log n)$ であることを示すことで，この $\widehat{P}$ に対応するカバータイムの評価は，オーダとしては最良であることを示した．

References

[1] R. Aleliunas, R.M Karp, R.J. Lipton, L. Lovaász, and C. Rackoff, "Random walks, universal traversal sequences, and the complexity of maze problems", Proc. 20th Ann. Symposium on Foundations of Computer Science, 218–223, 1979.

[2] D.J. Aldous, "On the time taken by random walks on finite groups to visit every state", Z.Wahrsch. verw. Gebiete 62 361-393, 1983.

[3] P. Matthews, "Covering Problems for Markov Chain", The Annals of Probability Vol.16, No.3, 1215-1228, 1988.

[4] A.Z. Broder and Karlin, "Bounds on covering times", In 29th Annual Symposium on Foundations of Computer science, 479-487, 1988.

[5] G. Brightwell and P. Winkler, "Maximum hitting time for random walks on graphs", J. Random Structures and Algorithms, 3, 263-276, 1990.

[6] A. Israeli and M. Jalfon, "Token management schemes and random walks yield self stabilizing mutual exclusion", Proc. of the 9th ACM Symposium on Principles of Distributed Computing, 119–131, 1990.

[7] J.L. Palacios, "On a result of Aleiliunas et al. concerning random walk on graphs," *Probability in the Engineering and Informational Sciences,* 4, 489–492, 1990.

[8] D. Coppersmith, P. Tetali, and P. Winkler, "Collisions among random walks on a graph", SIAM Journal on Discrete Mathematics, 6, 3, 363–374, 1993.

[9] G. Blom, L. Holst, and D. Sandell, "Problems and Snapshots from the World of Probability", Springer-Verlag, New York, NY, 1994.

[10] R. Motowani and P. Raghavan, "Randomized Algorithms", Cambridge University Press, New York, 1995.

[11] N. Okumoto, " A study on random walks of tokens on graphs ", M.E.thesis, Hiroshima Univ., 1996.

[12] S. Ikeda, I. Kubo, N. Okumoto, and M. Yamashita, "Fair circulation of a token," *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems,* Vol.13, No.4, pp.367-372, 2002.