

# リアライザの列挙

山中 克久<sup>†</sup> 中野 眞一<sup>†</sup>

E-mail: †{yamanaka, nakano}@msc.cs.gunma-u.ac.jp

## 概要

極大平面グラフ (全ての面が三角形である平面グラフ) が与えられたとき, ある条件を満たすような内辺の分割をそのグラフのリアライザと呼ぶ. リアライザは平面グラフの描画アルゴリズム等に応用がある. グラフ  $G$  が与えられたとき,  $G$  のリアライザを列挙するアルゴリズムは, これまで知られていなかった. 本文は, まず, 左優先順序という極大平面グラフの点の順序づけを定義し, そして, 左優先順序とリアライザには 1 対 1 の対応関係があることを示す. このことを利用して, リアライザを重複も抜けもなく高速に列挙するアルゴリズムを与える. 本文のアルゴリズムは,  $n$  点からなる極大平面グラフのリアライザを, 重複も抜けもなく, リアライザ 1 つあたり  $O(n)$  時間で生成する.

## Generating All Realizers

Katsuhisa YAMANAKA<sup>†</sup> Shin-ichi NAKANO<sup>†</sup>

E-mail: †{yamanaka, nakano}@msc.cs.gunma-u.ac.jp

## abstract

A *realizer* of a triangulated plane graph  $G$  is a partition of interior edges of  $G$ , satisfying some conditions. The realizer has many application, including graph drawing algorithms. Given a triangulated plane graph  $G$ , no algorithm to generate all realizers of  $G$  is known. In this paper, we first give an algorithm to generate all realizers. we first define a *left canonical ordering* for vertices of input graph, then show that there is a bijection between the left canonical orderings and realizers. Based on the bijection, we give an algorithm to generate all realizers. The algorithm generates each realizer in  $O(n)$  time per realizer without duplications, where  $n$  is the number of vertices in the graph.

## 1 はじめに

近年, ビジュアル計算機言語, ビジュアル設計支援, ビジュアルネットワーク管理等, 様々な分野でグラフを“適切に”自動描画する技術が求められている. この分野の最も基本的な描画のひとつとして, 平面グラフの平面格子直線描画がある. これは, グラフの各点を整数座標をもつ格子点に配置し, 各辺を互いに交差しない直線分として描くものである. 平面格子直線描画を求めるアルゴリズムの一つに“リアライザ法 [S90]”がある. このアルゴリズムは, 平面グラフに辺を追加して極大平面グラフを作り, その極大平面グラフのリアライザと呼ばれる構造にもとづき, 元の平面グラフの描画を求める. 一般に, 極大平面グラフは複数のリアライザをもつので, それぞれのリアライザを

もとに, 様々な描画を求めることができる. 本研究は, 極大平面グラフのリアライザを全て列挙する高速なアルゴリズムを設計する. リアライザの列挙アルゴリズムは, これまで知られていなかった. リアライザを列挙し, これらをもとに様々な平面格子直線描画を求めることにより, これらのうちから様々な意味で“適切な”描画を目的に応じて選ぶことが可能となる. またリアライザには, 描画のほかにも, フロアプラン設計を含む多くの応用がある [B96, B02, C01, L01].

## 2 定義

本章では, 用語の定義を与える.

自己ループや多重辺をもたないグラフ  $G = (V, E)$  のみを本文では扱う. ここで,  $V$  は  $G$  の点集合であり,  $E$  は  $G$  の辺集合である.  $n$  はグラフの点の個数とする. 本文では,  $n \geq 3$  と仮定する. グラフ  $G$  を辺が

<sup>†</sup>群馬大学工学部情報工学科 〒 376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1.

<sup>†</sup>Department of Computer Science, Gunma University, 1-5-1 Tenjin-Cho, Kiryu, 〒 376-8515

互いに交差しないように平面に描画したものを  $G$  の平面描画という. 平面描画できるグラフを平面的グラフといい, また平面への埋め込みを固定した平面的グラフを平面グラフという. 平面グラフは, 平面を面と呼ばれる連結成分に分割する. 無限遠点を含む唯一の面を外面と呼び, 他の面を内面と呼ぶ. 平面グラフ  $G$  の外周の点辺列を  $G$  の輪郭といい,  $C_o(G)$  と表す. 輪郭上にない点を内点と呼び, 輪郭上にない辺を内辺と呼ぶ. 極大平面グラフとは, 全ての面が三角形であるような平面グラフである. 図1に極大平面グラフの例を示す.

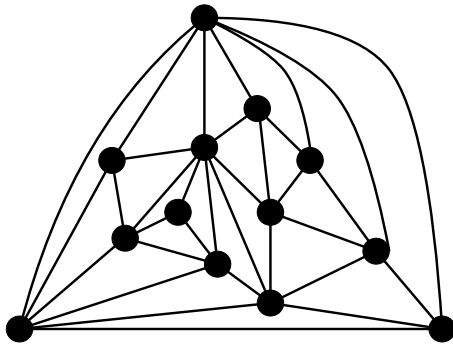


図 1: 極大平面グラフの例

$G = (V, E)$  は  $n \geq 3$  なる極大平面グラフとする.  $C_o(G)$  上の 3 点を  $r_r, r_b, r_y$  とする. この 3 点をそれぞれ red root, blue root, yellow root と呼ぶ. 3 点  $r_r, r_b, r_y$  は  $G$  の外周上に時計回りにこの順で現れるとしてよい.  $G$  の内辺の分割  $\Pi = (E_r, E_b, E_y)$  が下記の条件 (re1)-(re3) を満たすとき,  $\Pi$  を  $G$  のリアライザという [S90]. ここで  $E_r$  中のすべての辺が誘導するグラフを  $T_r$  とする. 同様に,  $E_b$  と  $E_y$  のすべての辺が誘導するグラフをそれぞれ  $T_b$  と  $T_y$  とする.

(re1)  $T_r$  はすべての内点と点  $r_r$  を含む木である. 同様に,  $T_b$  はすべての内点と点  $r_b$  を含む木であり,  $T_y$  はすべての内点と点  $r_y$  を含む木である.

(re2)  $r_r$  に接続するすべての内辺は  $T_r$  に含まれる. 同様に,  $r_b$  に接続するすべての内辺は  $T_b$  に含まれ,  $r_y$  に接続するすべての内辺は  $T_y$  に含まれる.

(re3) 各内辺の向きを次のように定義する. 点  $r_r$  を木  $T_r$  の根とし,  $T_r$  の各辺の向きを子から親への向きと定義する. 同様に, 点  $r_b, r_y$  を木  $T_b, T_y$  の根とし,  $T_b$  と  $T_y$  の各辺の向きも, それぞれ子から親への向きと定義する. このとき, 各内点  $v$  において  $v$  に接続する辺は  $v$  の回りに時計回りに次の順で現れる (図 2 参照).

- $v$  から他の点へ向かう, ちょうど一本の  $T_r$  の辺.
- $v$  へ向かう, 0 本以上の  $T_y$  の辺.

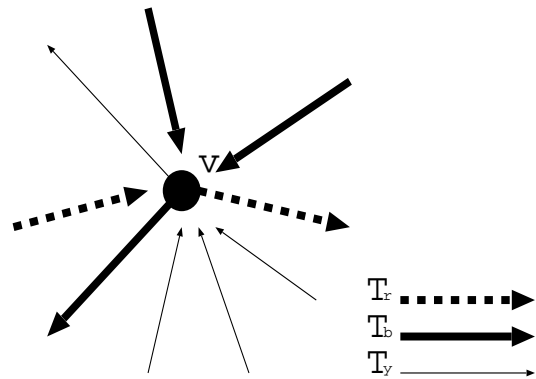


図 2: 条件 (re3)

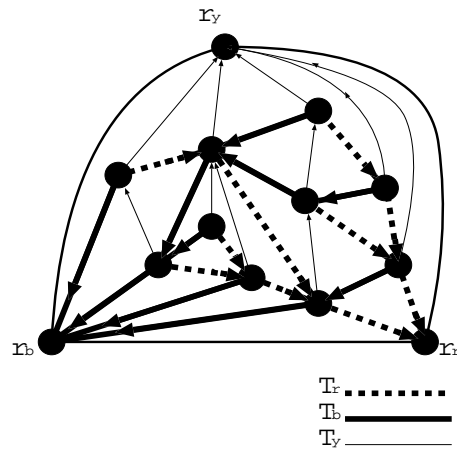


図 3: リアライザの例

- $v$  から他の点へ向かう, ちょうど一本の  $T_b$  の辺.
- $v$  へ向かう, 0 本以上の  $T_r$  の辺.
- $v$  から他の点へ向かう, ちょうど一本の  $T_y$  の辺.
- $v$  へ向かう, 0 本以上の  $T_b$  の辺.

リアライザの例を図 3 に示す. 任意の  $n \geq 4$  なる極大平面グラフ  $G$  はリアライザをもち,  $G$  のリアライザは線形時間で求められることが知られている [S90].  $n = 4$  なる極大平面グラフは 1 個のみであり, このグラフはちょうど 1 個のリアライザをもつ. すなわち, リアライザの列挙は自明である. よって, 以下では  $n \geq 5$  としよう.

### 3 左優先順序

本章は、グラフの点の順序づけである左優先順序を新たに定義する。いくつかの準備からはじめよう。

極大平面グラフ  $G = (V, E)$  の  $C_o(G)$  上の 3 点を  $r_r, r_b, r_y$  とする。辺  $(r_r, r_b)$  を含み、 $r_y$  を含まない単純サイクル  $C = (w_0 = r_b, w_1, \dots, w_m = r_r) \neq C_o(G)$  が与えられたとしよう。  $C$  上の点および  $C$  の内側の点が誘導する  $G$  の平面部分グラフを  $G' = (V', E')$  とする。  $C$  は単純であるので  $G'$  は 2 連結平面グラフであり、かつ、  $G$  は極大平面グラフであるので  $G'$  のすべての内面は三角形である。

$V'$  中に 2 つ以上の隣接点をもつような点  $v \in V - V'$  を、  $G'$  の多重隣接点とよぼう。  $G'$  の定義より  $v$  は  $G'$  の外面にあり、また  $v$  の  $V'$  中の隣接点はすべて  $C = C_o(G')$  上にあることに注意しよう。  $G'$  の多重隣接点  $v$  の、  $V'$  中の隣接点のすべてが、もし、  $C_o(G')$  上で連続し、かつ、  $v$  の回りでも連続するならば、  $v$  は  $G'$  の扇点であるといい、そうでないならば、  $v$  は  $G'$  のスキップ点であるという。

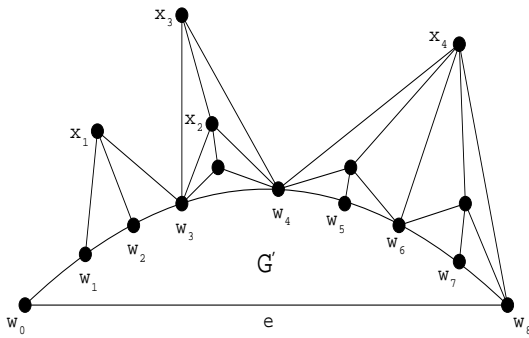


図 4: 扇点とスキップ点の例図

例えば、図 4 の  $x_1$  は扇点であり、点  $x_2, x_3, x_4$  はいずれもスキップ点である。扇点  $v$  の  $C_o(G')$  上の隣接点の列を  $v$  の連続区間とよぶ。例えば図 4 の扇点  $x_1$  の連続区間は  $(w_1, w_2, w_3)$  である。

次にスキップ区間を定義しよう。  $G'$  のスキップ点  $v$  が、  $C_o(G') = (w_0, w_1, \dots, w_m)$  上の 2 点  $w_p$  と  $w_q$  (ただし  $p < q$  とする) に隣接し、かつ、  $v$  の隣接点を反時計回りに並べたとき、  $w_p$  より後で、  $w_q$  より前にあるものが 1 つ以上あり、かつ、それらのいずれも  $C_o(G')$  上にはないとき、  $(w_p, w_q)$  をスキップ点  $v$  のスキップ区間とよぶ。スキップ点はスキップ区間を 1 つ以上もつことに注意しよう。例えば、図 4 の点  $x_3$  のスキップ区間は  $(w_3, w_4)$  であり、点  $x_4$  のスキップ区間は  $(w_4, w_6)$  と  $(w_6, w_8)$  である。  $G$  は平面グラフであるので、  $G'$  のすべてのスキップ点のすべてのスキップ区間は、いれ子構造をもつ。また、  $C$  の選び方より、もし  $|V'| \leq n - 2$  ならば  $r_y$  はスキップ点であり、スキップ区間は少なくとも 1 つは存在する。一方、そう

でないときは  $|V'| = n - 1$  であり、このとき  $r_y$  は扇点である。以下、  $|V'| \leq n - 2$  とする。特に、他のスキップ区間を真に含まないスキップ区間を極小スキップ区間とよぶ。任意の 2 つの異なる極小スキップ区間  $(w_p, w_q)$  と  $(w_{p'}, w_{q'})$  において、  $w_q \leq w_{p'}$  もしくは  $w_{q'} \leq w_p$  のいずれか一方が成立する。  $w_q \leq w_{p'}$  のとき  $(w_p, w_q)$  は  $(w_{p'}, w_{q'})$  より左にあるという。一番左にある極小スキップ区間  $(w_p, w_q)$  を最左スキップ区間といい、これに対応するスキップ点を  $x$  としよう。ただし、そのようなスキップ点  $x$  が複数個あるときは、  $\{x\} \cup \{w_p, w_{p+1}, \dots, w_q\}$  が誘導するサイクルの内部の点の個数が最小となるように点  $x$  を選ぼう。  $x$  を最左スキップ点という。例えば、図 4 の  $G'$  の最左スキップ区間は  $(w_3, w_4)$  であり、最左スキップ点は  $x_3$  ではなく、  $x_2$  である。

最左スキップ区間が  $(w_p, w_q)$  のとき、  $(w_0, w_1, \dots, w_q)$  をアクティブ区間とよぶ。(ただし  $p = 0$  かもしれない。また、便宜的に、  $|V'| = n - 1$  のときはスキップ区間は存在しないが、  $(w_0, w_1, \dots, w_m)$  をアクティブ区間とよぼう。) このとき、次がいえる。

**補題 3.1** 連続区間が最左スキップ区間に包含されるような扇点が存在する。

**証明.** 背理法による。連続区間が最左スキップ区間に包含されるような扇点が存在しないと仮定する。

最左スキップ点を  $x$  とし、最左スキップ区間を  $(w_p, w_q)$  とする。これらから構成されるサイクルを  $C = (x, w_p, w_{p+1}, \dots, w_q)$  とする。  $x$  はスキップ点であることより、  $C$  の内側に 1 つ以上点が存在する。また、最左スキップ区間は極小スキップ区間であるので、  $C$  の内側にスキップ点は存在しない。また、仮定より  $C$  の内側に扇点は存在しない。したがって、  $C$  の内側の各点は、  $C_o(G_k)$  上に高々 1 つの隣接点をもつことになる。これは  $G$  が極大平面グラフであり、すべての内面が三角形であることに矛盾する。 ■

さて、極大平面グラフ  $G = (V, E)$  が与えられたときに、次のように  $V$  の順序  $\pi = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  を定義しよう。  $n \geq 5$  としよ。  $G_i$  は  $\{v_1, v_2, \dots, v_i\}$  が誘導する  $G$  の平面部分グラフとする。  $C_o(G)$  上の 3 点を  $r_r, r_b, r_y$  とする。

まず  $v_1 = r_b, v_n = r_y, v_2 = r_r$  とする。  $v_1, v_2$  を含む内面が  $(v_1, v_3, v_2)$  となるように点  $v_3$  を定める。次に、各  $i = 4, 5, \dots, n - 1$  について、次の条件 (co1) と (co2) を満足するように  $v_4, v_5, \dots, v_{n-1}$  を選ぼう。

(co1)  $v_i$  は  $G_{i-1}$  の扇点である。

(co2)  $v_i$  の  $G_{i-1}$  上の連続区間は (1)  $v_{i-1}$  を含む、もしくは、 (2)  $v_{i-1}$  より右にある、のいずれかである。

$\pi$  を  $V$  の左優先順序とよぶ。(co1) のみを満足するとき、  $\pi$  はカノニカル順序 [Ka96, CN98] とよばれる

が、左優先順序はこれに条件 (co2) を追加したものとなっている。本論文は、左優先順序とリアライザの対応を第 4 章で示し、これを利用して、リアライザの列挙を行う。

(co1) より、 $G_4, G_5, \dots, G_{n-1}$  はいずれも 2 連結である。また、(co2) より、小さな番号が直感的には左にあらわれることがわかる。よって、“左優先”順序である。次の補題がいえる。

**補題 3.2**  $\pi$  は左優先順序とする。各  $i = 3, 4, \dots, n-1$  について、次の条件 (co3) が成立する。

(co3)  $v_i$  は  $G_i$  のアクティブ区間に含まれる。

**証明.** 背理法による。 $v_k$  は  $G_k$  のアクティブ区間に含まれないと仮定しよう。もし、 $k = n-1$  ならば、 $C_o(G_{n-1})$  上の点は全てアクティブ区間に含まれ、かつ、 $v_{n-1}$  は  $C_o(G_{n-1})$  上にあるので仮定に反する。また、 $3 \leq k \leq n-2$  のときは、 $v_n$  はスキップ点であり、連続区間が最左スキップ区間(これを  $(w_p, w_q)$  としよう。)に包含されるような扇点  $x$  が存在する。 $x = v_l$ ,  $l > k$  としよう。 $i = k+1, k+2, \dots, l-1$  において (co2) が成立するので、 $v_{l-1}$  の連続区間は  $w_q$  より右にある。また  $w_q \neq v_{l-1}$  である。このとき、 $v_l$  の連続区間は  $v_{l-1}$  より左にあることになり、(co2) に矛盾する。 ■

すなわち、 $v_4, v_5, \dots, v_{n-1}$  のいずれかで (co3) を満たさないならば順序  $\pi$  は左優先順序ではない。一方、(co1)-(co3) を満たすように順に  $v_i$  を選べば、途中で次の点を選べない状況になることなく、左優先順序が必ず得られることを次の補題で示そう。

**補題 3.3** 各  $i = 4, 5, \dots, n-1$  について、条件 (co1)-(co3) を満たすように順に  $v_i$  を選べば左優先順序が得られる。

**証明.** まず、途中で次の点を選べない状況にならないことを示そう。

はじめに、 $i = 3$  において (co3) は成立している。なぜならば、 $G_3$  の最左スキップ区間は  $(v_1, v_3)$ ,  $(v_3, v_2)$ ,  $(v_1, v_2)$  のいずれかであり、いずれの場合も  $v_3$  は最左スキップ区間に含まれているからである。

次に、一般に  $v_1, v_2, \dots, v_k$ , ( $3 \leq k \leq n-2$ ), まで選択し、かつ、 $i = k$  で条件 (co3) が成立しているとき、 $i = k+1$  でも (co1)-(co3) が成立するように  $v_{k+1}$  を 1 通り以上選べることを示そう。 $C_o(G_k) = (w_0 = v_1, w_1, \dots, w_m = v_2)$ ,  $v_k = w_a$  とする。 $G_k$  の最左スキップ点を  $x$  とし、最左スキップ区間を  $(w_b, w_c)$  とする。これらが構成するサイクルを  $C = (x, w_b, w_{b+1}, \dots, w_c)$  とする。(co3) より  $a \leq c$  である。辺  $(w_{a-1}, w_a)$  を含む内面で  $C_o(G_k)$  の外側にあるものが  $(w_{a-1}, y, w_a)$  となるように点  $y$  を定める。 $y$  は  $C_o(G_k)$  に 2 つ以上の隣接点をもつので、扇点もしくはスキップ点のいずれかである。2 つの場合を考えよう。

**場合 1:** 点  $y$  が扇点であるとき。

$v_{k+1} = y$  とする。(このとき  $v_{k+1}$  は  $G_k$  の扇点であり、 $v_{k+1}$  の  $G_k$  上の連続区間は  $v_k$  を含む。すなわち、 $i = k+1$  において (co1) と (co2) を満たす。) もしくは、連続区間が  $(w_a, w_c)$  に包含されるような扇点があれば、そのような点のいずれかを  $v_{k+1}$  とする。(このとき  $v_{k+1}$  は  $G_k$  の扇点であり、 $v_{k+1}$  の  $G_k$  上の連続区間は  $v_k$  を含む、もしくは  $v_k$  より右にある。すなわち、 $i = k+1$  において (co1) と (co2) を満たす。) これら以外に  $v_{k+1}$  となりうる点はない。連続区間が  $(w_c, w_m)$  に包含されるような扇点を  $v_{k+1}$  とすると、 $i = k+1$  において (co3) に反することに注意しよう。

**場合 2:** 点  $y$  がスキップ点であるとき。

$y$  のスキップ区間は  $w_a$  の“右側”にしかない。なぜならば、もし  $y$  のスキップ区間が  $w_{a-1}$  の“左側”にあれば、(co3) が  $i = k$  で成立していることに矛盾するからである。同様の理由より、最左スキップ区間は  $w_a$  を含む、もしくは、 $w_a$  の右に存在する。補題 3.1 より、連続区間が最左スキップ区間  $(w_b, w_c)$  に包含されるような扇点が存在する。連続区間が  $(w_a, w_b)$  もしくは  $(w_b, w_c)$  に包含されるような扇点のいずれかを  $v_{k+1}$  とする。このとき、 $i = k+1$  において (co1) と (co2) を満たすことに注意しよう。また、これら以外に  $v_{k+1}$  となりうる点はない。

すなわち、いずれの場合も (co1) と (co2) を満たすような  $v_{k+1}$  が 1 通り以上選べることになる。

最後に、場合 1, 2 にもとづいて  $v_{k+1}$  を選んだとき、いずれの場合も  $i = k+1$  において (co3) が成立することを示そう。4 つの場合にわけて考えよう。

**場合 A:** 点  $x$  が  $G_{k+1}$  ではスキップ点でないとき。

サイクル  $C$  が内部にちょうど 1 個の点  $z$  を含み、 $v_{k+1} = z$  としたときのみである。図 5(a) 参照。このとき  $G_{k+1}$  の最左スキップ区間は、(i)  $(w_b, w_c)$  を包含する、もしくは (ii)  $w_c$  より右にある、のいずれかであり、どちらの場合も  $i = k+1$  で (co3) が成立する。

**場合 B:** 点  $x$  は  $G_{k+1}$  のスキップ点であるが、 $(w_b, w_c)$  は  $G_{k+1}$  の極小スキップ区間でないとき。

$x$  が 2 つ以上のスキップ区間をもち、サイクル  $C$  がちょうど 1 個の点  $z$  を含み、 $v_{k+1} = z$  としたとき (図 5(a) 参照)、もしくは、サイクル  $C$  の内部の点で  $v_{k+1}$  に隣接する点新たにスキップ点になったとき (図 5(b), (c) 参照)、もしくは、 $x$  が  $v_{k+1}$  に隣接していて新たに  $v_{k+1}$  を端にもつ極小スキップ区間ができたとき (図 5(d) 参照)、のいずれかである。いずれの場合も  $i = k+1$  で (co3) が成立する。

**場合 C:** 点  $x$  は  $G_{k+1}$  のスキップ点であり、 $(w_b, w_c)$  は  $G_{k+1}$  の極小スキップ区間であるが、 $(w_b, w_c)$  は  $G_{k+1}$  の最左スキップ区間でないとき。

$v_{k+1}$  に隣接する点  $z$  が新たに最左スキップ点になったとき (図 5(e) 参照) のみである.  $v_{k+1}$  は新しい最左スキップ区間の端になるので (co3) が成立する.

**場合 D:**  $G_k$  の最左スキップ区間は,  $G_{k+1}$  の最左スキップ区間と同じであるとき.

図 5(f) 参照. (co3) が成立する. ■

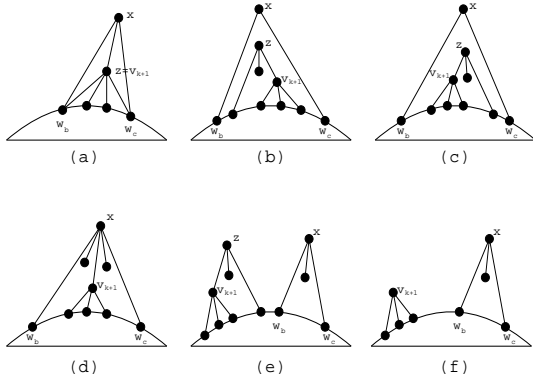


図 5: 補題 3.3 の例図

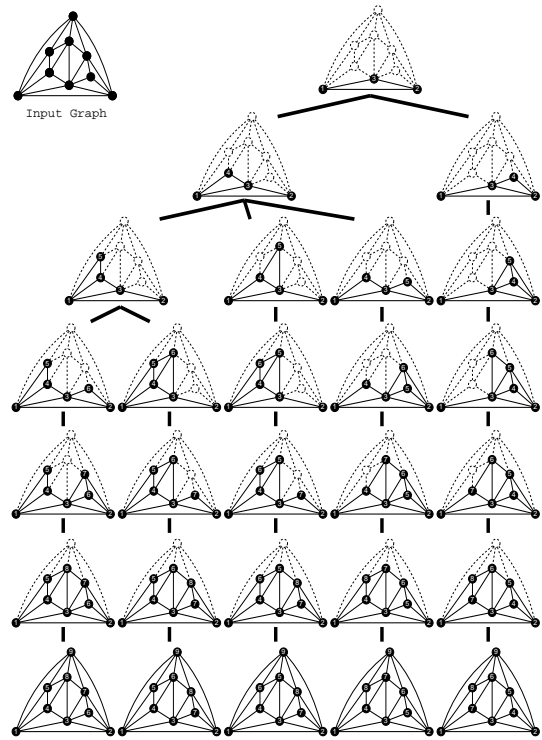


図 6: 左優先部分順序の木構造  $T_G$

$G$  の左優先順序  $\pi = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  の部分順序  $\pi_i = (v_1, v_2, \dots, v_i)$ ,  $3 \leq i \leq n$ , を  $G$  の左優先部分順序とよぶ. また 2 つの左優先部分順序  $\pi_i = (v_1, v_2, \dots, v_i)$  と  $\pi_{i+1} = (v_1, v_2, \dots, v_{i+1})$  のように,  $\pi_{i+1}$  の最後の点を除去すると  $\pi_i$  が得られるとき,  $\pi_i$  を  $\pi_{i+1}$  の親とし,  $\pi_{i+1}$  は  $\pi_i$  の子とする. 補題 3.3 において,  $v_1, v_2, \dots, v_k$  まで選ぶと  $\pi_k = (v_1, v_2, \dots, v_k)$  が得られ, 次に  $v_{k+1}$  を選ぶと  $\pi_k$  の子  $\pi_{k+1} = (v_1, v_2, \dots, v_{k+1})$  が得られることになる.  $\pi_k$  は 1 つ以上の子をもつことに注意しよう. また, 定義より  $\pi_3$  は 1 通りしかない.

以上より,  $G$  のすべての左優先部分順序は木構造  $T_G$  をもつ (図 6 参照). ここで  $T_G$  の各点は  $G$  の各左優先部分順序に対応し,  $T_G$  の各辺は両端点に対応する 2 つの左優先部分順序の親子関係に対応する. また  $T_G$  の各葉は  $G$  の各左優先順序に対応する.

#### 4 左優先順序とリアライザ

本章は, 左優先順序からリアライザを求める方法, および, リアライザから左優先順序を求める方法を説明する.

極大平面グラフ  $G = (V, E)$  の  $C_o(G)$  上の 3 点を  $r_r, r_b, r_y$  とし,  $\pi = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  は  $G$  の左優先順序としよう.  $v_1 = r_b, v_2 = r_r, v_n = r_y$  とする.  $G_i$  は  $\{v_1, v_2, \dots, v_i\}$  が誘導する  $G$  の平面部分グラフとする.  $C_o(G_i) = (w_0 = v_1, w_1, \dots, w_m = v_2)$  とする.

辺  $(v_1, v_2)$  以外の  $G_i$  の辺の分割  $\Pi_i = (E_r^i, E_b^i, E_y^i)$ ,  $3 \leq i \leq n-1$ , が次の条件 (re4) を満たすとき  $\Pi_i$  を  $G_i$  のリアライザとよぼう.

(re4)  $G_i$  の外面に点  $x$  と辺  $(x, w_0), (x, w_1), \dots, (x, w_m)$  を追加して得られる極大平面グラフを  $G'_i$  とすると,  $\Pi'_i = (E_r^i, E_b^i, E_y^i \cup \{(x, w_1), (x, w_2), \dots, (x, w_{m-1})\})$  は  $G'_i$  のリアライザである.

例を図 7 に示す.

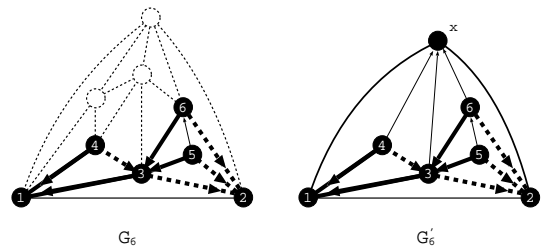


図 7:  $G_6$  のリアライザの例

左優先順序  $\pi$  を用いると, 各  $G_i, i = 3, 4, \dots, n-1$ , のリアライザを次のようにして構成できる.

まず,  $G_3$  について考えよう.  $\Pi_3 = (E_r^3 = \{v_3, v_2\}, E_b^3 = \{v_3, v_1\}, E_y^3 = \emptyset)$  とする. 図 8(a) に示すように  $\Pi_3$  は  $G_3$  のリアライザである.

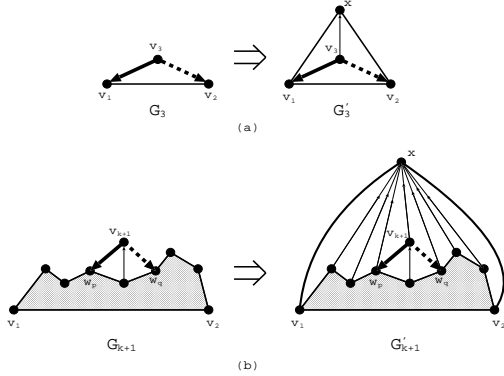


図 8:  $G_{k+1}$  のリアライザの例

次に一般に,  $G_k$  のリアライザ  $\Pi_k = (E_r^k, E_b^k, E_y^k)$  が得られたときに,  $G_{k+1}$  のリアライザ  $\Pi_{k+1}$  を求めよう.  $C_o(G_k) = (w_0, w_1, \dots, w_m)$  とし,  $v_{k+1}$  の  $C_o(G_k)$  上の連続区間を  $(w_p, w_{p+1}, \dots, w_q)$  としよう.  $\Pi_{k+1} = (E_r^k \cup \{(v_{k+1}, w_q)\}, E_b^k \cup \{(v_{k+1}, w_p)\}, E_y^k \cup \{(v_{k+1}, w_{p+1}), (v_{k+1}, w_{p+2}), \dots, (v_{k+1}, w_{q-1})\})$  とする. 図 8(b) に例を示すように  $\Pi_{k+1}$  は  $G_{k+1}$  のリアライザとなる.

また,  $G'_{n-1} = G$  であるので,  $\Pi'_{n-1}$  は  $G$  のリアライザとなる.

すなわち  $G$  の各々の左優先順序から  $G$  のリアライザがひとつ得られる. 必要な計算時間は  $O(n)$  である. 次の補題がいえる.

**補題 4.1**  $G$  の左優先順序  $\pi_1$  と  $\pi_2$  より上のアルゴリズムによってリアライザ  $H_1$  と  $H_2$  を構成したとしよう. このとき  $\pi_1 \neq \pi_2$  ならば  $H_1 \neq H_2$  である.

**証明.** 背理法による.  $H_1 = H_2$  と仮定する.

$\pi_1 = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ,  $\pi_2 = (v'_1, v'_2, \dots, v'_n)$  とする.  $v_k \neq v'_k$  なる最小の  $k$  を選ぶ. すると,  $v_k$  と  $v'_k$  は  $G_{k-1}$  の扇点である. また,  $v_k$  は  $v'_k$  の '左にある' とし,  $v_k, v'_k$  の  $G_{k-1}$  に対する連続区間をそれぞれ  $(w_s, w_{s+1}, \dots, w_t)$ ,  $(w_{s'}, w_{s'+1}, \dots, w_{t'})$ ,  $s < t \leq s' < t'$  とする.

2つの場合にわけて考えよう.

**場合 1:**  $v_k$  と  $v'_k$  が隣接するとき.

辺  $e = (v_k, v'_k)$  とする.  $H_1$  では,  $e \in E_b$ , もしくは,  $e \in E_y$  かつ  $v_k$  から  $v'_k$  の向き, のいずれかである.  $H_2$  では,  $e \in E_r$ , もしくは,  $e \in E_y$  かつ  $v'_k$  から  $v_k$  の向き, のいずれかである. よって  $H_1 \neq H_2$  であり, 矛盾である.

**場合 2:**  $v_k$  と  $v'_k$  が隣接しないとき.

辺  $e' = (v_k, w_t)$  とする.  $H_1$  では,  $e' \in E_r$  となる.  $H_2$  では,  $e' \in E_y$  となることを示そう.  $\pi_2$  において  $v'_l = v_k$  としよう.  $l > k$  である. 任意の  $v \in V(G_{l-1}) - V(G_{k-1})$  の連続区間は  $w_t$  の右にある. そうでないとすると, (co2) に矛盾するからである. (co2) より,  $v'_{l-1}$  は  $v'_l$  に隣接する.  $(v'_l, v'_{l-1}) \in E_r$  かつ  $(v'_l, w_s) \in E_b$  となるので,  $e' \in E_y$  である. ゆえに,  $H_1 \neq H_2$  であり, 矛盾である. ■

また,  $G$  のリアライザ  $\Pi = (E_r, E_b, E_y)$  から  $G$  の左優先順序  $\pi$  を次のようにして構成できる.

$v_1 = r_b, v_2 = r_r, v_n = r_y$  とする.  $G_i$  は  $V - \{v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_n\}$  が誘導する  $G$  の平面部分グラフとする.  $C_o(G_{n-1}) = (w_0 = v_1, w_1, \dots, w_m = v_2)$  とする. このとき  $\Pi_{n-1} = (E_r, E_b, E_y - \{(v_n, w_1), (v_n, w_2), \dots, (v_n, w_{m-1})\})$  は  $G_{n-1}$  のリアライザである.

まず  $v_{n-1}$  を選ぼう. リアライザの条件より,  $(w_0, w_1) \in E_b$ ,  $(w_{m-1}, w_m) \in E_r$ ,  $\{(w_1, w_2), (w_2, w_3), \dots, (w_{m-2}, w_{m-1})\} \subset E_r \cup E_b$  である. よって,  $(w_{a-1}, w_a) \in E_b$  かつ  $(w_a, w_{a+1}) \in E_r$  なる  $a$ ,  $0 < a < m$ , が存在する. そのような  $a$  で最大のものを選び,  $v_{n-1} = w_a$  としよう.

このとき,  $G_{n-1}$  中の  $v_{n-1} = w_a$  の隣接点を  $w_{a-1}, u_1, u_2, \dots, u_b, w_{a+1}$ , とし, これらは  $w_a$  のまわり反時計回りにこの順であらわれるとしよう.  $C_o(G_{n-2}) = (w_0, w_1, \dots, w_{a-1}, u_1, u_2, \dots, u_b, w_{a+1}, w_{a+2}, \dots, w_m)$  となる. このとき  $\Pi_{n-2} = (E_r - \{(w_a, w_{a+1})\}, E_b - \{(w_{a-1}, w_a)\}, E_y - \{(w_a, u_1), (w_a, u_2), \dots, (w_a, u_b)\})$  は  $G_{n-2}$  のリアライザである.

同様に,  $v_n, v_{n-1}, \dots, v_{k+1}$  まで選んだとき  $v_k$  を選ぶことができる. このとき,  $G_k$  のリアライザ  $\Pi_k$  がすでに得られており,  $v_k$  を選んだのち,  $G_{k-1}$  のリアライザ  $\Pi_{k-1}$  を得ることができる.

このようにしてリアライザ  $\Pi$  から順序  $\pi$  を求めることができる. 次の補題がいえる.

**補題 4.2** 上のアルゴリズムで求めた  $\pi$  は左優先順序である.

**証明.** まず, 次がいえる.  $C_o(G_{n-1}) = (w_0 = r_b, w_1, \dots, w_m = r_r)$  とすると, 定義より,  $G_{n-1}$  のアクティブ区間は  $(w_0, w_1, \dots, w_m)$  であり, これは  $v_{n-1}$  を含む. すなわち,  $i = n-1$  において (co3) は成立している.

次に, 一般に,  $i = k+1$  において (co3) が成立しているとしよう.  $C_o(G_{k+1}) = (w_0 = r_b, w_1, \dots, w_m = r_r)$ ,  $v_{k+1} = w_a$  とする. このとき  $i = k$  においても (co1)-(co3) が成立することを示そう. 2つの場合にわけて考えよう.  $G_k$  中の  $v_{k+1}$  の隣接点を  $w_{a-1}, u_1, u_2, \dots, u_b, w_{a+1}$  とし, これらは  $w_a$  のまわり反時計回りにこの順であらわれるとしよう.

**場合 1:**  $G_{k+1}$  の最左スキップ区間と  $G_k$  の最左スキップ区間が同じであるとき。

$v_{k+1}$  の選び方より,  $v_k \notin \{w_{a+2}, w_{a+3}, \dots, w_m\}$  である. すなわち,  $v_k \in \{w_1, w_2, \dots, w_{a-1}, u_1, u_2, \dots, u_b, w_{a+1}\}$  である. (co3) が  $G_{k+1}$  で成立していることより,  $G_{k+1}$  の最左スキップ区間は (i)  $v_{k+1}$  を含むか, (ii)  $v_{k+1}$  より右にあるかのいずれかである. (i) と (ii) のいずれの場合も  $i = k$  において (co1)-(co3) が成立する.

**場合 2:** 場合 1 でないとき.

$G_{k+1}$  の最左スキップ区間が  $G_k$  のスキップ区間でなくなる, もしくは,  $G_k$  において新たな最左スキップ区間が生じるかのいずれかである. 2 つの場合にわけて考えよう.

**場合 2 (a):**  $G_{k+1}$  の最左スキップ区間は  $G_k$  のスキップ区間でないとき.

$v_{k+1}$  が  $G_{k+1}$  の最左スキップ区間の端であったときのみである. このとき  $G_k$  の最左スキップ区間は,  $G_{k+1}$  の最左スキップ区間を包含したもの, もしくは, 点  $w_{a+1}$  より右にある, のいずれかとなる. いずれの場合も  $v_k \in \{w_1, w_2, \dots, w_{a-1}, u_1, u_2, \dots, u_b, w_{a+1}\}$  より,  $i = k$  において (co1)-(co3) が成立する.

**場合 2 (b):**  $G_k$  において新たな最左スキップ区間が生じるとき.

新しいスキップ区間に対応するスキップ点を  $x$  とする. このスキップ区間は  $G_{k+1}$  においてはスキップ区間ではなかったことより, 3 辺  $(x, w_{a-1}), (x, w_a), (x, w_{a+1})$  が存在することがわかる. すなわち,  $G_k$  の新たなスキップ区間は  $(w_{a-1}, w_{a+1})$  である.  $i = k + 1$  において (co3) が成立していたことにより, この新たな最左スキップ区間は,  $G_{k+1}$  の最左スキップ区間に包含される, もしくは,  $G_{k+1}$  の最左スキップ区間より左にある, のいずれかとなる. いずれの場合も  $v_k \in \{w_1, w_2, \dots, w_{a-1}, u_1, u_2, \dots, u_b, w_{a+1}\}$  より,  $i = k$  において (co1)-(co3) が成立する. ■

上の補題 4.2 より, リアライザから左優先順序が得られることがわかる.

さらに, 次の補題がいえる.

**補題 4.3**  $G$  のリアライザ  $H_1$  と  $H_2$  より上のアルゴリズムによって左優先順序  $\pi_1$  と  $\pi_2$  を求めたとしよう. このとき  $H_1 \neq H_2$  ならば  $\pi_1 \neq \pi_2$  である.

**証明.**

背理法による.  $\pi_1 = \pi_2 = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  と仮定しよう.  $H_1 \neq H_2$  であるから, 点  $v_k$  に接続する辺集合の  $T_r, T_b, T_y$  への分割が  $H_1$  と  $H_2$  において異なるような点  $v_k$  が存在する. そのような点のう

ち  $k$  が最大のものを  $v_k$  とする.  $v_k$  は  $G_{k-1}$  の扇点であるので,  $G_{k-1}$  中の  $v_k$  の隣接点は  $C_o(G_{k-1})$  上に連続してあらわれる. これを  $(w_p, w_{p+1}, \dots, w_q)$  としよう. リアライザから左優先順序を求める方法により,  $(v_k, w_p) \in T_b, (v_k, w_q) \in T_r$  である. (re3) より  $(v_k, w_{p+1}), (v_k, w_{p+2}), \dots, (v_k, w_{q-1}) \in T_y$  である. すなわち  $v_k$  に接続する辺集合の  $T_r, T_b, T_y$  への分割は一意であり, これは  $v_k$  の選び方に矛盾する. ■

以上より  $G$  の左優先順序の個数とリアライザの個数は同じであり, かつ両者の間に対応があることがわかる. したがって,  $G$  の左優先順序を列挙すれば, リアライザを列挙することにもなる.

## 5 列挙アルゴリズム

本章は  $G$  が与えられたとき左優先順序を高速に列挙するアルゴリズムを与える. 前章で, 左優先順序の個数とリアライザの個数は同じであることと, 両者の間に対応があることを示したので, これはリアライザの列挙アルゴリズムになっている.

3 章で示したように,  $G$  の左優先部分順序は木構造  $T_G$  をもつ. 左優先部分順序が与えられたとき, すべての子の左優先部分順序は, 補題 3.3 の場合 1 と 2 により求められる. これを再帰的に行うことにより, 次の列挙アルゴリズムが得られる.

**Algorithm Find-Child( $\pi_i$ )**

**begin**

if  $\pi_i$  が左優先順序である ( $i = n$  である)

then  $\pi_i$  に対応するリアライザを出力;

else begin

補題 3.3 の場合 1 と 2 にもとづき  $v_{i+1}$

の候補  $u_j = u_1, u_2, \dots$  を選ぶ;

$\pi_i$  の最後に  $u_j$  を追加したものを  $\pi_{i+1}^j$  とする;

for 各  $u_j$

Find-Child( $\pi_{i+1}^j$ )

end

**end**

データ構造は次のようにする.

各点に接続する辺の時計回り順のリストを格納する. 各辺は両端点のリスト中にあわせて 2 回現れるが, これらを双方向ポインタで結ぶ. 各辺  $e \in E(G) - E(G_k)$  には,  $C_o(G_k)$  上の点と接続するか否かの情報を格納する. また, 各スキップ区間, スキップ点のいれ子構造を記憶する. 例えば, 図 9 のように木として記憶する. さらに, 各扇点を連続区間が  $C_o$  上にあらわれる順にリストとして記憶する. 図 9 では, これらを水平線分の列として示している. 補題 3.3 の場合 1 と 2 にもとづき  $v_{k+1}$  を選び, 子のリアライザを得るとき, これらのデータ構造は  $O(d(v_{k+1}))$  時間で更新できる. これらのデータ構造により  $\pi_i$  が与えられたとき, もし  $\pi_i$

の子が  $k$  個あるならば,  $O(k)$  時間でそれらの子を列挙できる. ただし, 出力は  $\pi_i$  と各子の差分であるとする.

以上より次の定理がいえる.

**定理 5.1** 極大平面グラフ  $G$  が与えられたとき,  $G$  のリアライザを 1 個あたり  $O(n)$  時間で列挙できる.

## 6 まとめ

本文は, 極大平面グラフのリアライザを全て列挙する, 高速なアルゴリズムをはじめて与えた.

## 参考文献

- [B96] G. Di Battista, R. Tamassia and L. Vismara, *Output-Sensitive Reporting of Disjoint Paths*, Proc. of COCOON'96, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 1090, 81-91, 1996.
- [B02] N. Bonichon, B.L. Saëc and M. Mosbah, *Wagner's Theorem on Realizers*, Proc. of ICALP 2002, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 2380, 1043-1053, 2002.
- [C01] Yi-Ting Chiang, Ching-Chi Lin and Hsueh-I Lu, *Orderly Spanning Trees with Applications to Graph Encoding and Graph Drawing*, Proc. of 12th SODA, 506-515, 2001.
- [CN98] M. Chrobak and S. Nakano, *Minimum-width Grid Drawings of Plane Graphs*, Computational Geometry, Vol. 11, 29-54, 1998.
- [Ka96] G. Kant, *Drawing Planar Graphs Using the Canonical Ordering*, Algorithmica, 16, 4-32, 1996.
- [L01] Chien-Chi Liao, Hsueh-I Lu and Hsu-Chun Yen, *Floor-Planning via Orderly Spanning Trees*, Proc. of Graph Drawing 2001, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 2265, 367-377, 2001.
- [S90] W. Schnyder, *Embedding Planar Graphs on the Grid*, Proc. of 1st SODA, 138-147, 1990.

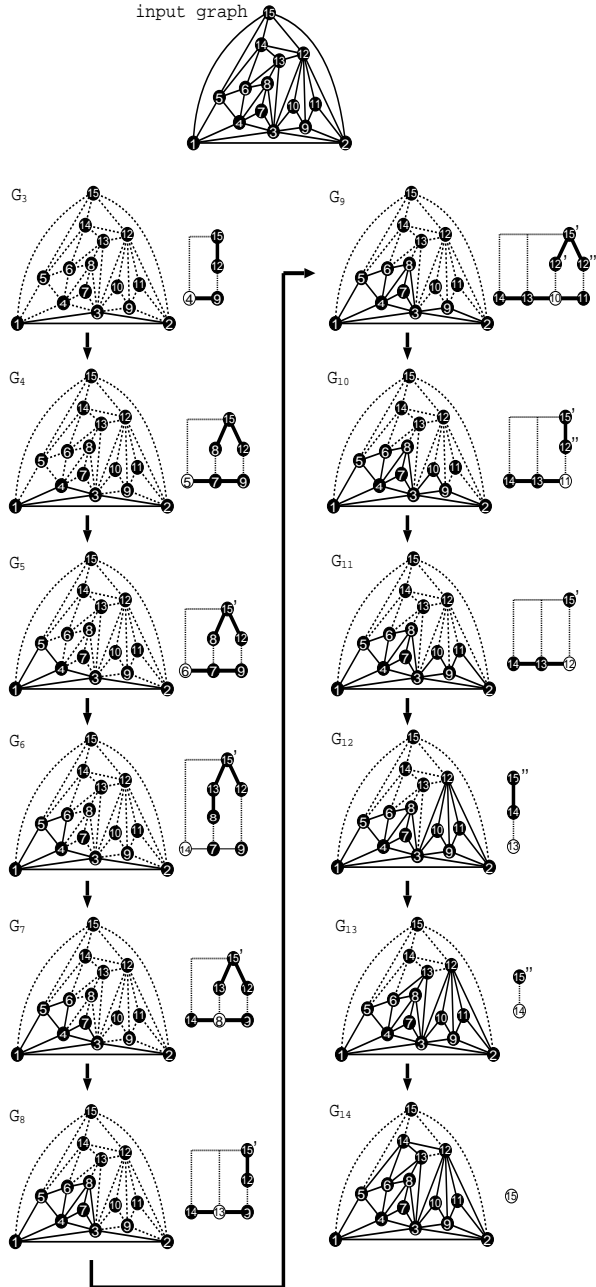


図 9: 各データ構造の説明図