2005－AL－101（3）
2005／5／19

電力取り引きにおける約定量決定問題の高速解法

清見礼[1]　宇野毅明[2]　松井知己[3]

Abstract

2005 年 4 月に施行された改正電気事業法により, 電力会社以外の多くの一般企業が電力を売買することが可能になった. この際の売買によって得られる社会的利潤を最大にするような約定を求める約定量決定問題は, 入札エリアに対応する少数の頂点と, 電力の売買を希望する企業に対応する多数の頂点からなるネットワーク上での最小費用流問題として定式化できる. 本稿では約定量決定問題に対し, 最小費用キャンセリングに基づく解法, および中央値発見による解法の 2 つの高速な解法を与える. 入札エリアの数を k, 電力を売買したい企業の数を n, 各企業の希望する売買量の最大値を C とすると, 前者は $\mathrm{O}(k(n+k^2)(\log C+\log k)(k^3+\log n))$ の時間で最適解を得ることができ, 後者は n に関して線形である $\mathrm{O}(3^k k!n)$ の時間で最適解を得ることができる. 実際の電力売買においては k の値は小さく, n の値は非常に大きいので, これらのアルゴリズムは高速である. なおこの問題は, 2005 年 4 月に開設された卸電力取引市場システムの仕様に基づいている.

Fast Algorithms for Execution Amount Problem on Electric Power Transactions

Masashi Kiyomi[4]　Takeaki Uno[5]　Tomomi Matsui[6]

Abstract

In Japan, the law about electric power industry was amended so that many private companies are now able to transact electric power with each other. In this paper, we consider a problem of maximizing the social benefit on the transactions. We can formulate the problem as a minimum cost flow problem on a network with few vertices corresponding to bidding area and many vertices corresponding to private companies which attend to the transactions. We propose two fast algorithms for the problem, one is based on minimum cycle canceling method and the other uses linear time median finding algorithm. For k bidding area and n private companies, the first algorithm finds an optimal solution in $\mathrm{O}(k(n+k^2)(\log C+\log k)(k^3+\log n))$ time, where C is the largest value of the amounts which companies want to transact. The second algorithm takes $\mathrm{O}(3^k k!n)$ time to solve the problem, which is leaner time in n. In practical sence, k is small and n is very large, hence these algorithms are fast.

1　はじめに

2005 年 4 月に日本卸電力取引所の取り引きが開始され, 我国でも一般企業が本格的に市場で電力を売買することが可能になった [1]. 一般企業間では普通, 電力をやりとりすることのできる電力線等の設備が存在しない. そこで, 電力の売買はそれぞれの企業が属している入札エリアの電力会社の設備を通して行われる. 入札エリアとは電力の売買に際し, 各企業が売買を行う場所の区分であり, 各一般企業は必ずちょうど一箇所の入札エリアに属し, 各入札エリアにはちょうど一つの電力会社が存在する. またいくつかの異なる入札エリアの電力会社間には大容量の電力線が存在し, それを通して, 異なる入札エリアの企業同士が電力を売買することも可能である. この際入札エリアを跨ぐことによる費用は設定されていないが, 電力会社間の電力線の容量は無限ではないので, 異なる入札エリアの企業間で売買できる電力の量は限られている. 電力の取り引きにあたっては, それぞれの企業が, 単位電力当たりの購入希望価格, 購入希望容量または単位電力当

[1]国立情報学研究所 masashi@grad.nii.ac.jp
[2]国立情報学研究所 uno@nii.jp
[3]東京大学 tomomi@misojiro.t.u-tokyo.ac.jp
[4]National Institute of Informatics　masashi@grad.nii.ac.jp
[5]National Institute of Informatics　uno@nii.jp
[6]University of Tokyo　tomomi@misojiro.t.u-tokyo.ac.jp

たりの売却希望価格, 売却希望容量を申告する．単位電力当たりの購入希望価格が売却希望価格以上であるような企業の組の間で取引が行われる．これを約定と呼ぶ．一つの企業が複数の企業と約定しても構わないし, 希望に沿うような相手がいない企業は約定をすることができない．

以上のような設定の下で, 支払額と受け取り額の差、つまり購入希望価格と売却希望価格の差に取引した数量をかけたものを社会的利潤と呼ぶ．約定量決定問題とは社会的利潤を最大にするような約定の組を求める問題である．

約定量決定問題は最小費用流問題として自然に定式化することができる．最小費用流問題は組合せ最適化の基礎的な問題であり, 理論 · 実用の両面において様々な研究がなされている．最小費用流問題の解法としては負閉路キャンセリング [7], 最短路繰り返し法 [3] 等がある．負閉路キャンセリングは枝の費用の和が負になり流れを増加させることができるような閉路を見つけて, 容量の許す限り流れを増加させるというアルゴリズムであるが, Goldberg と Tarjan は負閉路キャンセリングにおいて, 枝 1 本当たりの費用が最も小さい閉路に対して流れを増加させる, という最小平均閉路キャンセリングと呼ばれるアルゴリズムを提案した [5]. このアルゴリズムは頂点数が n で枝数が m のネットワークにおける最小費用流問題を $\mathrm{O}(nm(\log n)\log C)$ または $\mathrm{O}(nm^2(\log n)^2)$ 時間で得る多項式時間アルゴリズムである．また, 現在最も小さい計算量で最小費用流問題を解くアルゴリズは, Orlin による $\mathrm{O}(m(\log n)S(n,m))$ 時間で解を得るアルゴリズムである [8]. このアルゴリズムは最短路繰り返し法に容量スケーリングという手法を組み合わせたものである．今回は約定量決定問題の最小費用流問題への定式化において現れるネットワークの特殊性に注目し, これらよりも高速に解を得るアルゴリズムについて考える．

以下では, 2 節で約定量決定問題の最小費用流問題としての定式化について説明し, 3 節で Goldberg と Tarjan の最小負閉路キャンセリングをもとにしたアルゴリズムについて説明する．そして 4 節で中央値発見による企業数の線形時間アルゴリズムを説明する．

2 最小費用流問題としての定式化

与えられた購入希望企業全体の数を $\bar{n}$, 売却希望企業全体の数を $\underline{n}$ とし, 一般企業の総数を n とする．入札エリアの数を k として, 入札エリアの集合を $A = \{1, 2, \ldots, k\}$ とする．各企業は必ずちょうど 1 つの入札エリアに属し, 各入札エリアごとにちょうど一つの電力会社が存在する．入札エリア $i \in A$ の電力会社を電力会社 i とする．電力の購入を希望している一般企業を購入希望企業, 電力の売却を希望している一般企業を売却希望企業と呼ぶことにする．入札エリア $i \in A$ に属する購入希望企業の数を $\bar{n}_i$, 入札エリア $i \in A$ に属する売却希望企業の数を $\underline{n}_i$ とする．つまり

$$\bar{n} = \sum_{i \in A} \bar{n}_i,\ \underline{n} = \sum_{i \in A} \underline{n}_i,\ n = \bar{n} + \underline{n}$$

である．入札エリア $i \in A$ において, 購入希望企業の単位電力当たりの購入希望価格を並べたベクトルを $\bar{\boldsymbol{p}}_i \in \mathbf{R}^{\bar{n}_i}$, 売却希望企業の単位電力当たりの売却希望価格を並べたベクトルを $\underline{\boldsymbol{p}}_i \in \mathbf{R}^{\underline{n}_i}$ とする．また入札エリア $i \in A$ において, 購入希望企業, 売却希望企業の売買可能な電力の最大量を並べたベクトルを $\bar{\boldsymbol{u}} \in \mathbf{Z}^{\bar{n}_i}$, $\underline{\boldsymbol{u}} \in \mathbf{Z}^{\underline{n}_i}$ とする．さらに入札エリア $i \in A$ から入札エリア $i' \in A$ への電力線の容量を $u_{ii'}$ で表すことにする．

入札エリアと売却 · 購入希望企業からなる頂点集合 V を持ち, 入札エリア間の枝と, 各売却希望企業からその希望入札エリアへの枝, 各購入希望企業へのその希望入札エリアからの枝からなる枝集合 E を持つ有向グラフを $G = (V, E)$ とする．入札エリア i に属する売却希望企業から電力会社 i への電流を並べたベクトルを $\underline{\boldsymbol{x}}_i$, 入札エリア i に属する購入希望企業への電力会社 i からの電流を並べたベクトルを $\bar{\boldsymbol{x}}_i$, 入札エリア i から入札エリア i' への電流を $x_{ii'}$ とする．このとき, 約定量決定問題は以下のように定式化することが

できる.

$$
\begin{array}{ll}
\min. & \sum_{i\in A}(\underline{\boldsymbol{p}}_i^\top \underline{\boldsymbol{x}}_i - \bar{\boldsymbol{p}}_i^\top \bar{\boldsymbol{x}}_i), \\
\text{s. t.} & \underline{\boldsymbol{x}}_i^\top \mathbf{1}^{\underline{n}_i} - \bar{\boldsymbol{x}}_i^\top \mathbf{1}^{\bar{n}_i} \\
& - \sum_{i':(i,i')\in E} x_{ii'} + \sum_{i':(i',i)\in E} x_{i'i} = 0 \\
& \qquad\qquad\qquad (^\forall i \in \{1,2,\ldots,k\}) \ , \\
& \mathbf{0} \le \underline{\boldsymbol{x}}_i \le \underline{\boldsymbol{u}}_i \qquad (^\forall i \in \{1,2,\ldots,k\}), \\
& \mathbf{0} \le \bar{\boldsymbol{x}}_i \le \bar{\boldsymbol{u}}_i \qquad (^\forall i \in \{1,2,\ldots,k\}), \\
& 0 \le x_{ij} \le u_{ij} \qquad (^\forall (i,j) \in E).
\end{array}
$$

G に一つの人為頂点 w を追加し, すべての購入希望企業に対応する頂点から人為頂点 w に枝を張り, すべての売却希望企業に対応する頂点へ人為頂点から枝を張ったグラフ (図 1 参照) を G' とする. すると問題 (2) は G' の枝に以下のようにコストと容量を与えたネットワークでの最小費用流問題とみなすことができる. 以下ではこのネットワークを電力売買ネットワークと呼ぶことにする. 購入希望企業, 売却希望企業に対応する頂点の集合をそれぞれ $\bar{V}$,$\underline{V}$ とし, 電力会社に対応する頂点の集合を U とする. 電力売買ネットワーク上の電流の流れ方で, 容量の制約を満たし, また, U の各頂点において, 電流の流入量と流出量が等しくなるようなものをフローと呼ぶ. フローは各企業によって取引された電流の, 逆方向に行くものを打ち消しあったものに対応する.

- 枝 $e_{ij}(^\forall(i,j) \in (U,\bar{V}))$ の費用は (企業 j の購入希望価格) $\times(-1)$, 容量は企業 j の購入希望量.
- 枝 $e_{ji}(^\forall(j,i) \in (\underline{V},U))$ の費用は (企業 j の売却希望価格), 容量は企業 j の売却希望量.
- 枝 $e_{ii'}(^\forall(i,i') \in (U,U))$ の費用は 0, 容量は電力会社 i と電力会社 i' の間でやりとりできる電力の総量.
- 新たに加えた頂点 w と隣接する枝の費用は 0, 容量は ∞.

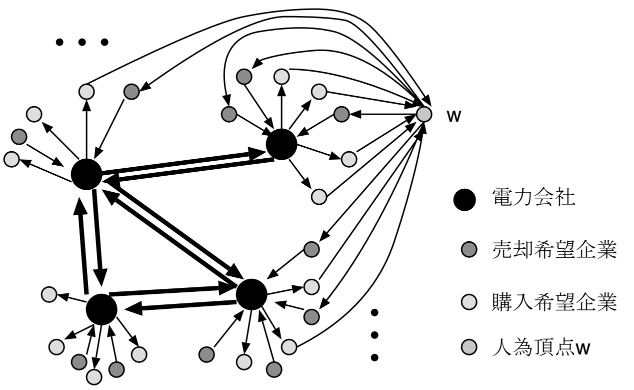

図 1: グラフ G' の例

3 最小平均閉路キャンセリングを用いたアルゴリズム

上記のネットワークの最小費用流を求めると, 社会的利潤を最大にする約定が求まる. 本節では, 最小平均閉路キャンセリングアルゴリズムを改良して, この電力売買ネットワークの最小費用流を短時間で求める, 最小平均閉路キャンセリングに基づいたアルゴリズムを解説する.

最小平均閉路キャンセリングは, 各反復において, 残余ネットワーク上で枝 1 本あたりの費用が最小の閉路を見つけ, それに沿ってフローを増加させるアルゴリズムである [5]. 残余ネットワークとは, 与えられた

ネットワークとフローに対して, フローの増減の上下限を表したネットワークである. このアルゴリズムが弱多項式時間および強多項式時間で収束することが Goldberg と Tarjan[5] により示されている. 以下では, 電力売買ネットワークにおいては, 最小平均閉路キャンセリングで最適解を見つけるのに必要な反復数が, 一般の場合に比べて少なくてすむことを示し, さらに最小平均閉路を見つける高速なアルゴリズムを用いることで最小平均閉路キャンセリング法がが高速化できることを示す.

論文 [5] では, 最適解への近さを表す数 ϵ に対し, ϵ- 最適と呼ばれる概念を用い, 最小平均閉路キャンセリングの各反復ごとに ϵ の値を評価している. これにより, 頂点数 $\tilde{n}$, 枝数 $\tilde{m}$ の重みつき有向グラフが与えられて, すべての枝にかかる費用が整数のとき, 最小平均閉路キャンセリングが

$$\lfloor \frac{s-1}{\tilde{m}} \rfloor \leq -\frac{\log(lC)}{\log(1-1/l)} \tag{1}$$

を満たすような最小の整数 s の反復で最適解を得て終了することが示されている. ただし, l はアルゴリズムで選ばれる閉路の中で枝数最大の閉路の枝数, C はすべての枝にかかる費用の最大値である.

電力売買ネットワークにおいて, 各電力会社間の辺の費用は 0 であるので, 電力会社のみを含むような閉路が最小平均閉路となることはない. すなわち, アルゴリズムで選ばれる閉路は常に購入希望企業 1 つおよび売却希望企業 1 つを含む閉路である. この閉路の長さは $\mathrm{O}(k)$ である. また, 約定量決定問題のグラフにおいて $\tilde{m} = \mathrm{O}(n+k^2)$ である. よって, これを式 (1) に代入し, 式 (1) を満たす最小の s を求めると $s = \mathrm{O}((n+k^2)k(\log C + \log k))$ となる. すなわち, 電力売買ネットワーク上の最小閉路消去法は, $\mathrm{O}((n+k^2)k(\log C + \log k))$ 反復で最適解が得られることが分かる.

アルゴリズムで選ばれる閉路が入札エリア i に属する購入希望企業 j を含むなら, j は入札エリア i に属する購入希望企業の中で購入希望価格が最大の企業でなければならない. 同様にアルゴリズムで選ばれる閉路が入札エリア i を希望する売却希望企業 j を含むなら, j は入札エリア i を希望する売却希望企業の中で売却希望価格が最小の企業でなければならない. そこで残余ネットワークにおいて入札エリアごとに入ってくる枝と出ていく枝を費用の大きさをキーとしてヒープで保持すれば, 各反復において $\mathrm{O}(k^3)$ の時間で最小平均閉路を見つけることが可能である. また, 各反復でフローは企業間を結ぶ $\mathrm{O}(k)$ の枝で変化するので, ネットワークの更新にかかる時間は $\mathrm{O}(k)$ である. さらに, 各反復でフロー流した 2 つの企業に対してヒープを更新する必要がある. ヒープの更新にかかる時間は $\mathrm{O}(n)$ である.

以上より, 以下の定理を得る.

定理 電力売買ネットワーク上での改良した最小平均閉路消去法は $\mathrm{O}(k(n+k^2)(\log C + \log k)(k^3 + \log n))$ 時間で最適解を得て終了する.

以下に電力売買ネットワーク上での最小閉路消去法のアルゴリズムを示す.

```
各エリアの購入希望企業,売却希望企業ごとに希望価格をキーにしたヒープを作成.
while (可能な売買が存在)
    · すべての入札エリアの組に対して
     (希望価格の差の最大値/企業間の最短路長) を比べることで最小平均閉路を見つける.
    · 見つけた閉路にそって容量が許す限りフローを増加し,残余ネットワークを更新する.
    · ヒープを更新する.
end while
得られたフローを出力する.
```

4 中央値発見によるアルゴリズム

前節のアルゴリズムは, 通常の最小平均閉路キャンセリングアルゴリズムに比べ高速である. また, 前節のアルゴリズムは n, k に関して多項式時間で解を得るアルゴリズムである. 一方で, 実際の電力売買におい

ては k の値は非常に小さいため, 定数とみなしてよい. この仮定の下では n に関してより高速なアルゴリズムを得ることができる.

ここでは中央値発見により約定量決定問題を解くアルゴリズムを提案する. まず, 電力売買ネットワーク上での最小費用流問題の最適性条件を示す. そして, これをもとに中央値発見を用いたアルゴリズムを構築する. その際始めに入札エリア数 k が 1 の場合を考える. k が一般の値を取る場合は, 入札エリア間のネットワークにおいて最適性条件を考慮することにより, 最適解で流れ得る電流の流れ方を限定し, その数だけ $k=1$ のアルゴリズムを繰り返し用いるという手法を用いる.

4.1 最適性条件

与えられた有向グラフ $G=(\tilde{V},\tilde{E})$ において, 枝の費用を $\boldsymbol{c}\in\mathbf{R}^{\tilde{E}}$, 枝の最小容量を $\boldsymbol{l}\in\mathbf{R}_+^{\tilde{E}}$, 枝の最大容量を $\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}_+^{\tilde{E}}$ とする. 今, ポテンシャル $\boldsymbol{p}\in\mathbf{R}^{\tilde{V}}$ を考え, 簡約費用 $\bar{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{p})\in\mathbf{R}^{\tilde{E}}$ を

$$\bar{c}_e(\boldsymbol{p}) = c_e + p_{\partial^+ e} - p_{\partial^- e},\ ({}^\forall e\in\tilde{E}), \tag{2}$$

で定義する. ここで $\partial^+ e$ は有向枝 e の始点で, $\partial^- e$ は有向枝 e の終点である. このとき, もし流れ $\boldsymbol{f}\in\mathbf{R}_+^{\tilde{E}}$ が

$$\begin{array}{l} \bar{c}_e(\boldsymbol{p}) > 0 \ \rightarrow\ f_e = l_e, \\ \bar{c}_e(\boldsymbol{p}) < 0 \ \rightarrow\ f_e = u_e, \end{array} \tag{3}$$

を満たすのなら, $\boldsymbol{f}$ は最適である [4].

次に上の条件を約定量決定問題に当てはめて考えてみる.

2 節で定義した電力売買ネットワーク G' において, 人為頂点 w に隣接するすべての枝の費用は 0 で容量は ∞ であるので, 一般企業の頂点と人為頂点におけるポテンシャルの値は等しいとしてよい. さらに, ポテンシャルには自由度が 1 つあるのでこの値が 0 であるとして一般性を失わない. よって約定量決定問題の最適条件は

$$ {}^\exists\boldsymbol{p}\in\mathbf{R}^U \left\{ \begin{array}{l} \forall e\in(\underline{V},U) \left\{ \begin{array}{l} c_e > p_{\partial^- e} \ \rightarrow\ f_e = 0 \\ c_e < p_{\partial^- e} \ \rightarrow\ f_e = u_e \end{array} \right. \\ \forall e\in(U,\bar{V}) \left\{ \begin{array}{l} p_{\partial^+ e} > -c_e \ \rightarrow\ f_e = 0 \\ p_{\partial^+ e} < -c_e \ \rightarrow\ f_e = u_e \end{array} \right. \\ {}^\forall e\in(U,U) \left\{ \begin{array}{l} p_{\partial^+ e} > p_{\partial^- e} \ \rightarrow\ f_e = 0 \\ p_{\partial^+ e} < p_{\partial^- e} \ \rightarrow\ f_e = u_e \end{array} \right. \end{array} \right. , \tag{4}$$

である. ポテンシャルの値が売却希望価格より大きければ売れるだけ売り, ポテンシャルの値が購入希望価格より小さければ買うだけ買う, さらに, ポテンシャルの値の大きい方にできるだけ電力を流す, というのが最適条件であることが分かる. 上で示した最適性条件において, 最適ポテンシャル $\boldsymbol{p}^*$ の値は適正な市場での電力の価格とみなすことができる.

4.2 1 エリア内のみでの最適化

この小節では $k=1$ の場合, つまり電力会社の数が全体で 1 つの場合についての約定量決定問題を考える.

$k=1$ の場合, 電力会社のポテンシャルを与えると, 最適性条件を満たす電流が定まる. すなわち, 購入希望価格がポテンシャルの値より大きい企業に対して, 容量の上限の電流を流し, 売却希望価格がポテンシャルより小さい企業から, 容量の上限の電流を流したものが最適性条件を満たした電流である. ここで, 希望価格がポテンシャルと等しくなる企業に隣接する枝に流す電流は任意である. もしこの電流が電力会社で超過, 不足しないのであれば, それが求める最適フローである. もし, 超過, 不足するのであれば, ポテンシャ

ルの値がそれぞれ大きすぎる, 小さすぎるということが分かる. これにより, ポテンシャルの値を二分探索のような手法で求めることができる. 以下に $k=1$ の場合に, 約定量決定問題を $\mathrm{O}(n)$ で解くアルゴリズムを示す.

B を $\bar{\boldsymbol{p}}_1$ の要素からなるマルチセット, S を $\underline{\boldsymbol{p}}_1$ の要素からなるマルチセットとする.
while $(|S|+|B|>0)$
  p を S と B のうち要素数が大きい方の中央値とする.
  (4) を満たすように各枝の電流を定め $\boldsymbol{f}$ とする.
  if ($\boldsymbol{f}$ がフロー)
    return p と $\boldsymbol{f}$.
  if (電力会社において (流入電流) $>$ (流出電流))
    頂点 $j \in \{x \in S \mid x \geq p\}$ から出る枝 e の電流を 0 に固定し,$S := S \setminus \{x \in S \mid x \geq p\}$.
    頂点 $j \in \{x \in B \mid x \geq p\}$ へはいる枝 e の電流を u_e に固定し, $B := B \setminus \{x \in B \mid x \geq p\}$.
  else
    頂点 $j \in \{x \in S \mid x \leq p\}$ から出る枝 e の電流を u_e に固定し, $S := S \setminus \{x \in S \mid x \leq p\}$.
    頂点 $j \in \{x \in B \mid x \leq p\}$ へはいる枝 e の電流を 0 に固定し,$B := B \setminus \{x \in B \mid x \leq p\}$.
end while

前節の結果から, もしこのアルゴリズムが停止すれば, アルゴリズムの返す $\boldsymbol{f}$ の値は, 約定量決定問題の最適解であることは明らかである. 以下では, このアルゴリズムが $\mathrm{O}(n)$ の時間で停止することを示す.

一般に N 個の要素の中から中央値を求めるのにかかる時間はたかだか $\mathrm{O}(N)$ である [2]. そこで, 上のアルゴリズムが一反復にかける時間は $\mathrm{O}(|S|+|B|)$ である. また, 反復ごとに, S と B のうち要素数が大きい方から少なくとも半分の要素が除去されているので, 反復ごとに $|S|+|B|$ の値は $\frac{3}{4}$ 以下になっていることが分かる. よって, アルゴリズムが終了するまでに要する時間 T は

$$\begin{aligned} T \quad & \leq Cn + \tfrac{3}{4}Cn + (\tfrac{3}{4})^2 Cn + \ldots + (\tfrac{3}{4})^{\lfloor \log_{4/3} n \rfloor + 1} Cn \\ & < 4Cn = \mathrm{O}(n) \end{aligned} \tag{5}$$

で与えられることが分かる. ここで C はある定数である.

このアルゴリズムで得られた最適ポテンシャル p^* に対し, すべての枝で最適性条件 (4) が満たされている限りにおいて, 値を加減したものも最適ポテンシャルである. つまり, 最適ポテンシャルには自由度があり, これはある区間で与えられる. この最適ポテンシャルの区間は, 一つの最適ポテンシャルの値が与えられれば, $\mathrm{O}(n)$ の時間で容易に求めることができる.

4.3 全体での最適化

以下では $k>1$ の場合を説明する. 基本的な考え方は, U の頂点のポテンシャルの大小関係をすべて列挙し, それぞれの場合に最適性条件を満たすように電流を流したとき, 解があるかどうかをチェックする, というものである. すなわち, 各企業に隣接する枝では前節と同様に電流を流し, U の頂点間では, ポテンシャルの値が小さい頂点から, ポテンシャルの値が大きい頂点へ容量ぎりぎりまで電流を流したとき, この電流がフローになっているかどうかをチェックすることになる. 以下ではまず始めに, すべての U の頂点のポテンシャルの値が異なる場合のチェックの仕方を解説し, 次に, 等しいポテンシャルを持つ頂点が存在する際のチェックの仕方を解説する.

$k>1$ の場合, 電力会社間でどれだけの電力をやりとりするかを決定することが必要である. もし, 電力会社間でやりとりされる電力の量があらかじめ分かっているのならば, $k>1$ の場合でも, それぞれの入札エリアに対して前節のアルゴリズムを走らせることで, 最適解を得ることができる. 電力会社に対応する頂点

でのポテンシャルの値がそれぞれの頂点で異なる値をとる場合, それらの大小関係のみを用いて, 最適性条件 (4) から, 最適解において電力会社間に流す電力の量を決定することができる. そこで, 電力会社上の強順序, すなわち各電力会社をポテンシャルの値の大きさで整列したすべての順列 $k!$ 通りについて, 前節のアルゴリズムを走らせてみるということが考えられる. 具体的には以下のようなアルゴリズムである.

for each (電力会社間の強順序 P)
- P において $i < i'$ を満たす i, i' について $p_i < p_j$ と仮定して, $f_{(ii')} = u_{(ii')}$, $f_{(i'i)} = 0$ とする.
- 各頂点のポテンシャルと残りの枝の電流を, $k = 1$ のときのアルゴリズムにより決定する.
- $\boldsymbol{f}$ が最適性条件を満たすフローなら終了.

end for

このアルゴリズムにかかる時間は $\mathrm{O}(k!n)$ であり, k を定数とみなせば $\mathrm{O}(n)$ である.

次に, 等しいポテンシャルを持つ U の頂点が存在する際のチェックの仕方を解説する. これは上で扱った電力会社上の強順序を, 弱順序に拡張して考えることに対応する. ポテンシャルの値が異なる, すなわち弱順序中で不等号が成立する頂点間については上と同様に流す電流を決定する. 次に, ポテンシャルの値が等しい U の頂点を, 図 2 のように縮約したひとつの頂点とみなすことにする. 縮約する際, 頂点間の枝は除去するものとする. そして, 上と同様にして, 縮約されたネットワーク上で最適性条件を満たすフローを求め

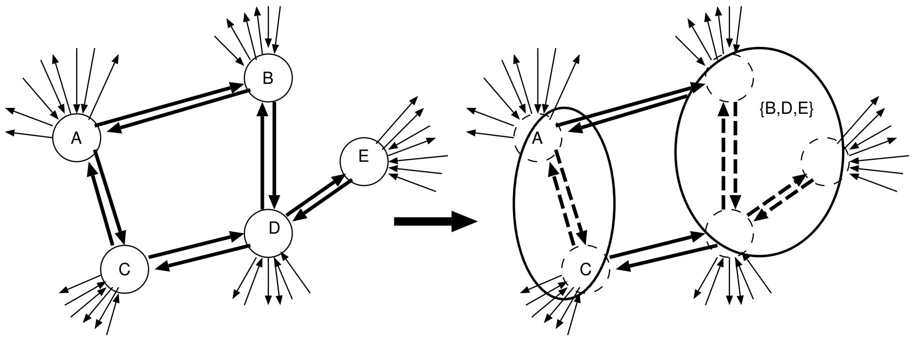

図 2: A, C および B, D, E のポテンシャルが等しい場合の縮約

る. 最後に, 縮約された頂点をもとに戻し, 縮約されていた頂点間でのフローを求める. 縮約されていた頂点への流入量, 流出量は固定されているので, 縮約されていた頂点間のフローは, 需要と供給のあるネットワーク上でのフローを求める問題とみなすことができる. これは最大流問題のアルゴリズムを用いて解くことができる. 縮約されていた頂点の数はたかだか k 個であるので, k を定数とみなせば, かかる時間は依然として $\mathrm{O}(n)$ である. 以下に, k の値が一般の場合のアルゴリズムを示す.

for each (電力会社の弱順序 P)
- P において $i < i'$ を満たす i, i' について $p_i < p_j$ と仮定して, $f_{(ii')} = u_{(ii')}$, $f_{(i'i)} = 0$ とする.
- P において順序が等しい頂点を 1 つに縮約する.
- 各頂点のポテンシャルと残りの枝の電流を, $k = 1$ のときのアルゴリズムにより決定する.
- **if** ($\boldsymbol{f}$ が最適性条件を満たすフローである)
  縮約した頂点間のフローを最大流問題のアルゴリズムで求め, 解が存在すれば終了.

end for

このアルゴリズムは約定量決定問題に解が存在する場合, 必ず最適解を与え, 最適解を得るのにかかる時間は $\mathrm{O}(3^k k!n)$ であり, k を定数とみなせば $\mathrm{O}(n)$ である.

5　まとめ

日本卸電力取引所の取り引きにおいて現実に現れる, 約定量決定問題について最小負閉路キャンセリングと, 中央値発見による二つの高速な多項式時間アルゴリズムを与えた. 電力の売買を希望する企業の数を n, 入札エリアの数を k とし, 各企業の売買希望量の最大値を C としたとき, 最小平均閉路キャンセリングによるアルゴリズムは $\mathrm{O}(k(n+k^2)(\log C+\log k)(k^3+\log n))$ の時間で最適解を求め, 中央値発見によるアルゴリズムは電力会社の数を定数とみなすことで $\mathrm{O}(n)$ の時間で最適解を求めることができる. ただし, 中央値発見によるアルゴリズムは k に関して $\mathrm{O}(3^k k!n)$ の時間がかかるアルゴリズムである. k の値は小さいことが想定されるが, k に関する計算量を小さくすることは課題である.

参考文献

[1] 澤敏之, 中田祐司, 杉山茂也, 上杉萬里夫: 卸電力取引所の市場分断約定方式の検討, 平成 *16* 年電気学会全国大会予稿集, pp. 75–76.

[2] Blum, M., Floyd, R. W., Pratt, V., Rivest, R. L., and Tarjan, R. E.: Time bounds for selection, *Jornal of Computer and System Sciences*, vol. 7(1973), pp. 448–461.

[3] Edmonds, J., and Karp, R. M.: Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems, *Journal of the ACM*, Vol. 19, No. 2(1972), pp. 248–264.

[4] Ford, JR., L. R., and Fulkerson, D. R.: *Flows in Networks*, Princeton University Press, Princeton, 1962.

[5] Goldberg, A. V., and Tarjan, R. E.: Solving minimum-cost flow problems by successive approximation, *Proceedings of the 19th Annual ACM Symposium on The Theory of Computing*, 1987, pp. 7–18.

[6] Goldberg, A. V., and Tarjan, R. E.: Finding minimum-cost circulations by canceling negative cycles, *Journal of ACM*, vol. 36, NO. 4(1989), pp. 873–886.

[7] Klein, M.: A primal method for minimal cost flows with applications to the assignment and transportation problems, *Management Science*, 14(1967), pp. 205–220.

[8] Orlin, J. B.: A faster strongly polynomial minimum cost flow algorithm, *Proceedings of the 20th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, 1988, pp. 377–387.