

トーラス型ネットワーク上の効率的なブロードキャスト方式について

岡崎龍太郎¹ 小野廣隆² 貞廣泰造³ 山下雅史²

¹ 同志社大学工学部知識工学科

² 九州大学工学部大学院システム情報科学研究所

³ 熊本県立大学総合管理学部

概要: Peters と Syska は [1] において 2 次元トーラス型の回線交換式ネットワーク上での効率的なブロードキャスト方式を示した。本稿ではこれを高次元化された記数法とそれが生成する自己相似的な構造をもつタイル貼りを用いて再定式化する。この定式化によりアルゴリズムとその証明を簡潔で代数的に記述することが出来る。また 3 次元への拡張を行う。

Efficient broadcastings on torus networks

Ryotaro Okazaki¹ Hirotaka Ono² Taizo Sadahiro³ Masafumi Yamashita²

¹ Department of Knowledge Engineering and Computer Sciences, Doshisha University

² Department of Computer Science and Communication Engineering, Kyushu University

³ Department of administration, Kumamoto Prefectural University

Abstract: Peters and Syska[1] showed efficient circuit switched broadcastings on 2-dimensional torus networks. We give an algebraic and simple formulation of this algorithm using numeration systems and tilings on finite tori. Using this formulation, we extend the algorithm to 3-dimensional torus networks.

1 回線交換方式ネットワーク上でのブロードキャスト問題

Peters と Syska は [1] において 2 次元トーラス型の回線交換方式ネットワーク上での効率的なブロードキャスト方式を示した。本稿ではこのブロードキャストアルゴリズムを一般化された記数法 (numeration system) とそれから生成される自己相似的な性質をもつタイル貼りを用いて再定式化する。この定式化によりアルゴリズムの簡潔で代数的な記述を与えることが出来、自然に高次元への拡張が可能となる。また、この定式化からこのブロードキャスト方式は超一様分布列 (low discrepancy sequence) である van der Corput 列の構成 [3] と非常に似通っていることが分かる。

最初に回線交換方式のネットワーク (circuit switching network) 上のブロードキャストの問題を定式化しておく。以下で用いる通信モデルは Peters と Syska の論文 [1] における短いメッセージの通信に対して仮定されたものと同じである。 G を頂点集合 $V(G)$ 、辺集合 $E(G)$ をもつ無向グラフとする。頂点と辺を交互にならべたもの

$$w = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k \quad v_i \in V(G) \quad e_i \in E(G)$$

が、各 $i = 1, 2, \dots, k$ について v_{i-1}, v_i が e_i の両端点となっているとき、道と呼ぶ。 k を w の長さ呼び、 $l(w) = k$ と表すことにする。また v_0 を w の始点と呼び $s(w)$ で表す。 v_k を終点と呼び、 $t(w)$ で表す。道の集合 W に対して $t(W) = \{t(w) \mid w \in W\}$, $s(W) = \{s(w) \mid w \in W\}$ と定義する。

G のある頂点 v は同時に最大 $\deg(v)$ 個の頂点にグラフ中の道を通してデータを送信することが出来ると仮定する。 $\deg(v)$ は頂点 v の次数である。道 w を経由する通信に要する時間を

$$\alpha + l(w)\delta$$

と仮定する。ここに α は通信初期化のための時間であり、 δ はスイッチングコストとよばれる正の定数である。 $o = v_0, v_1, \dots, v_r = v \in V(G)$ を $r + 1$ 個の G の頂点とする。次のような状況を考える。メッセージの最初の発信者 o は v_1 に道 w_1 を通してメッセージを送る。メッセージをうけた v_1 はそのメッセージを v_2 に道 w_2 を通して転送する。以下、同様にして v_3, v_4, \dots と順にメッセージを受信して、最終的に $v = v_r$ がメッセージを受信する：

$$(o =) v_0 \xrightarrow{w_1} v_1 \xrightarrow{w_2} \dots \xrightarrow{w_{r-1}} v_{r-1} \xrightarrow{w_r} v_r (= v)$$

このとき、 v が最終的にメッセージを受信するために要する時間は

$$r\alpha + \delta \sum_{i=1}^r l(w_i)$$

であると仮定する。メッセージを受信した頂点は $\deg(v)$ 個以下の頂点に同時に転送することが出来る。転送が繰り返され、最終的にすべての頂点がメッセージを受信する。この過程をブロードキャストと呼ぶことにする。これをより正確に、道の集合の族を用いて次のように定義する。

定義 1. G 上の頂点 $o \in V(G)$ を起点とするブロードキャストとは G 上の道の集合族 $\{W_r\}_{r=1}^R$ で次の条件を満たすものである。

1. $s(W_1) = \{o\}$
2. $s(W_r) \subset \bigcup_{i=1}^{r-1} t(W_i) \cup \{o\}$
3. 任意の $v \in t(W_{r-1})$ について $\#\{w \in W_r \mid s(w) = v\} \leq \deg(v)$.
4. $\bigcup_{r=1}^R t(W_r) \cup \{o\} = V(G)$, $\#\left(\bigcup_{r=1}^R W_r\right) = \#V(G) - 1$.
5. W_r に属するどの道も始点以外では交わらない。

ブロードキャスト $\{W_r\}_{r=1}^R$ の添字の r をラウンドと呼ぶことにする。ブロードキャスト $\{W_r\}_{r=1}^R$ に対して $I(W, r) = \bigcup_{i=1}^r t(W_i) \cup \{o\}$, $1 \leq r \leq R$ と定義する。これは第 r ラウンド終了時に情報を得ている頂点の集合を表す。便宜上、 $I(W, 0) = \{o\}$ と定義しておく。上の条件 2 は情報を受信したプロセッサのみが情報を転送できることを意味し、条件 4 は第 R ラウンド終了時にはすべてのノードが一度だけメッセージを受信していることを意味する。条件 4, 5 より、どの頂点 $v \in V(G)$ に対してもある道の列 $w_1 w_2 \dots w_k$, $w_r \in W_r$ が唯一つ存在して、 $2 \leq r \leq k$ について $t(w_{r-1}) = s(w_r)$ 、および $t(w_k) = v$ が成り立つ。ここで、 $l_{W,v} = \sum_{i=1}^k l(w_i)$ と定める。 $\max_{v \in V(G)} \{l_{W,v}\}$ を $\{W_r\}_{r=1}^R$ の最大通信パス長と呼ぶことにする。

問題は効率的なブロードキャストを構成することである。つまり、ラウンド数 R と最大通信パス長の小さなブロードキャストを設計する。ラウンド数と通信パス長について次のあきらかな下界が存在する。

$$R \geq \log_{p+1} \#V(G), \quad \max_{v \in V(G)} \{l_{W,v}\} \geq \Delta(G).$$

ただし、ここで $p = \max_{v \in V(G)} \deg(v)$ で $\Delta(G)$ はグラフの直径である。

n, d を任意の自然数とし、 $e_i \in \mathbb{Z}^d$ を

$$e_i = (\overbrace{0, 0, \dots, 0}^{i-1}, 1, \overbrace{0, \dots, 0}^{d-i})$$

と定める。また $S = \{\pm e_k \mid k = 1, 2, \dots, d\}$ とする。グラフ G は頂点集合 $V(G) = \mathbb{Z}^d / n\mathbb{Z}^d$ をもち、2つの頂点 $x, x' \in V(G)$ は $x - x' \in S$ のとき、またそのときに限り一つの辺によって結ばれるものとする。(つまり、 G は $\mathbb{Z}^d / n\mathbb{Z}^d$ の生成元を S とするケイリーグラフである。) このグラフ G を本稿では次元 d 、サイズ n のトーラスネットワークと呼ぶことにする。図 1 は $d = 2, n = 5$ のトーラスネットワークを表す。

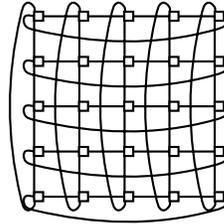


図 1: 2次元 サイズ5のトーラスネットワーク

本稿の目的は、まず Peters と Syska のブロードキャストアルゴリズムを一般化された記数法と自己相似的性質を持つタイリングを用いて再定義し、つぎに 3次元トーラスに対するアルゴリズムを代数的な手法を用いて設計することで、本稿で導入した代数的手法の有効性を示すことにある

2 有限トーラス上の記数法とタイル貼り

$B \in M_d(\mathbb{Z})$ を整数成分の d 次正方形行列とし、 $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}^d$ を \mathbb{Z}^d の部分群 $B\mathbb{Z}^d$ による剰余類の完全代表系とする。つまり、任意の $x \in \mathbb{Z}^d$ に対して $d_x \equiv x \pmod{B\mathbb{Z}^d}$ となる $d_x \in \mathcal{D}$ がただ一つ存在する。さらに

$$B^d = (\det B)I$$

であると仮定する。証明を省略するが次が成立する。

補題 2. m を任意の自然数、 $\det B = b$ とする。任意の $x \in \mathbb{Z}^d / b^m \mathbb{Z}^d$ に対して

$$x = a_0 + Ba_1 + \dots + B^{dm-1} a_{dm-1} \pmod{b^m \mathbb{Z}^d} \quad (1)$$

となる $a_k \in \mathcal{D}$, $0 \leq k \leq dm - 1$ が一意に存在する。

つまり、 $\mathbb{Z}^d/b^m\mathbb{Z}^d$ の任意の元は \mathcal{D} 上の長さ dm の語として一意に表される。ここで

$$\mathsf{T}^{(k)} = \{\mathbf{a}_0 + B\mathbf{a}_1 + \cdots + B^k\mathbf{a}_k \mid \mathbf{a}_i \in \mathcal{D}\},$$

$$L^{(k)} = \{B^{k+1}\mathbf{a}_{k+1} + B^{k+2}\mathbf{a}_{k+2} + \cdots + B^{dm-1}\mathbf{a}_{dm-1} \mid \mathbf{a}_i \in \mathcal{D}\}$$

と定義する。 $V(G) = \mathbb{Z}^d/b^m\mathbb{Z}^d$ は次のように分割される。

$$V(G) = \bigcup_{\mathbf{c} \in L^{(k)}} (\mathbf{c} + \mathsf{T}^{(k)}) \pmod{b^m\mathbb{Z}^d}. \quad (2)$$

$\mathbf{c} \in L^{(k)}$ に対して $\mathbf{c} + \mathsf{T}^{(k)}$ をレベル k のタイルと呼ぶことにする。(2) は $V(G)$ が $\mathsf{T}^{(k)}$ の平行移動によってすき間なく、また重なりなく埋めつくされることを意味する。また、タイル自身もより小さなレベルのタイルによって分割される。

$$\mathsf{T}^{(k+1)} = \bigcup_{\mathbf{c} \in B^{k+1}\mathcal{D}} (\mathbf{c} + \mathsf{T}^{(k)}).$$

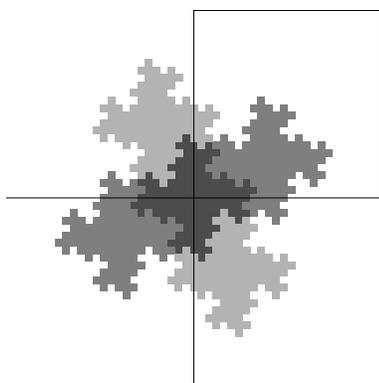


図 2: トーラス上のタイル貼り

例 3. $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ 、 $\mathcal{D} = \{(0,0)^T, \pm(1,0)^T, \pm(0,1)^T\}$ とすると \mathcal{D} は $\mathbb{Z}^2/B\mathbb{Z}^2$ の完全代表系をなす。
タイルを図示するため

$$\hat{\mathsf{T}}^{(k)} = \mathsf{T}^{(k)} + U$$

とする。ただし、ここに $U = \{(x,y) \mid -0.5 \leq x \leq 0.5, -0.5 \leq y \leq 0.5\}$ である。図 2 は $\hat{\mathsf{T}}^{(2)}$ とその平行移動がトーラス $\mathbb{R}^2/5^2\mathbb{Z}^2$ を敷き詰めている様子を表している。

3 ブロードキャストアルゴリズム

3.1 ブロードキャストアルゴリズム

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D} = \{(0,0)^T, \pm(1,0)^T, \pm(0,1)^T\}$$

とすると $B^2 = 5I$ であり、 \mathcal{D} は \mathbb{Z}^2 の部分群 $B\mathbb{Z}^2$ の完全剰余代表系をなす。このとき、補題より次が成立することが分かる。 m を任意の自然数とすると、任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2/5^m\mathbb{Z}^2$ に対して

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}_0 + B\mathbf{a}_1 + \cdots + B^{2m-1}\mathbf{a}_{2m-1} \pmod{5^m\mathbb{Z}^2} \quad (3)$$

となる $a_k \in \mathcal{D}$, $0 \leq k \leq 2m-1$ が一意に存在する。よって、任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2/B\mathbb{Z}^2$ は長さ $2m$ の \mathcal{D} 上の語として表現できることがわかる。

任意の頂点 \mathbf{v} は $\mathbf{v} \pm (1,0)^T, \mathbf{v} \pm (0,1)^T$ の 4 頂点と辺で結ばれている。この 4 つの辺をそれぞれ、 X, \bar{X}, Y, \bar{Y} で表す。こうして、ある頂点から出発する道を $\{X, Y, \bar{X}, \bar{Y}\}$ の 4 個のアルファベットを用いて表すことができる。例えば頂点

$$\mathbf{o} = (0,0)^T, (0,1)^T, (1,1)^T, (2,1)^T, (2,0)^T$$

を順にめぐる長さ 4 の道を $(\mathbf{o}, YXX\bar{Y})$ と表現する。またアルファベット α の k 回の繰り返しを α^k のように表す。例えば $YYYY = Y^4$ である。

ブロードキャストはラウンド 1 からラウンド $2m$ までの計 $2m$ 個のラウンドから構成される。ラウンド $r-1$ が終了した時点ですでにメッセージを受信しているノード \mathbf{v} はラウンド r において 4 個の未受信ノード $\mathbf{v} + B^{2m-r}\mathcal{D}^*$ に送信する。ただし、ここで $\mathcal{D}^* = (\mathcal{D} \setminus \{\mathbf{0}\})$ である。このとき通信に使う道の集合 W_r を次のように定める。

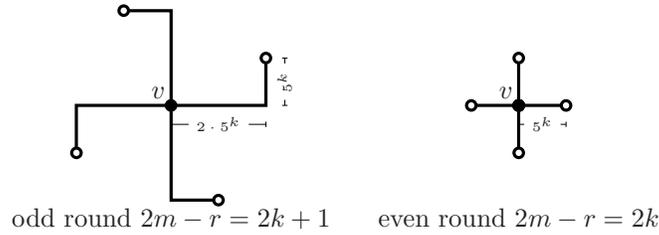


図 3: paths in W_r starting from \mathbf{v}

- $r \equiv 1 \pmod{2}$ のとき

$2m - r = 2k + 1$ となる $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ が存在する。 \mathbf{v} は $\mathbf{v} + B^{2k+1}\mathcal{D}^* = \mathbf{v} + \{\pm 5^k(2,1)^T, \pm 5^k(1,-2)^T\}$ に図 3 左に示す 4 本の道を用いてメッセージを送る。 $u = 5^k$ として

$$W_r(\mathbf{v}) = \{(\mathbf{v}, X^{2u}Y^u), (\mathbf{v}, \bar{X}^{2u}\bar{Y}^u), (\mathbf{v}, Y^{2u}\bar{X}^u), (\mathbf{v}, \bar{Y}^{2u}X^u)\}$$

- $r \equiv 0 \pmod{2}$ のとき

$2m - r = 2k$ となる $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ が存在する。 \mathbf{v} は $\mathbf{v} + B^{2k}\mathcal{D}^* = \mathbf{v} + \{\pm 5^k(1,0)^T, \pm 5^k(0,1)^T\}$ に図 3 右に示す 4 本の道を用いてメッセージを送る。この 4 本の道は $u = 5^k$ として

$$W_r(\mathbf{v}) = \{(\mathbf{v}, X^u), (\mathbf{v}, \bar{X}^u), (\mathbf{v}, Y^u), (\mathbf{v}, \bar{Y}^u)\}.$$

図4はこのアルゴリズムを $m = 2$ の場合に適用した各ラウンドを表している。黒い小円 ● はすでに受信した頂点で、白い小円 ○ は新たにメッセージを受信した頂点を表している。

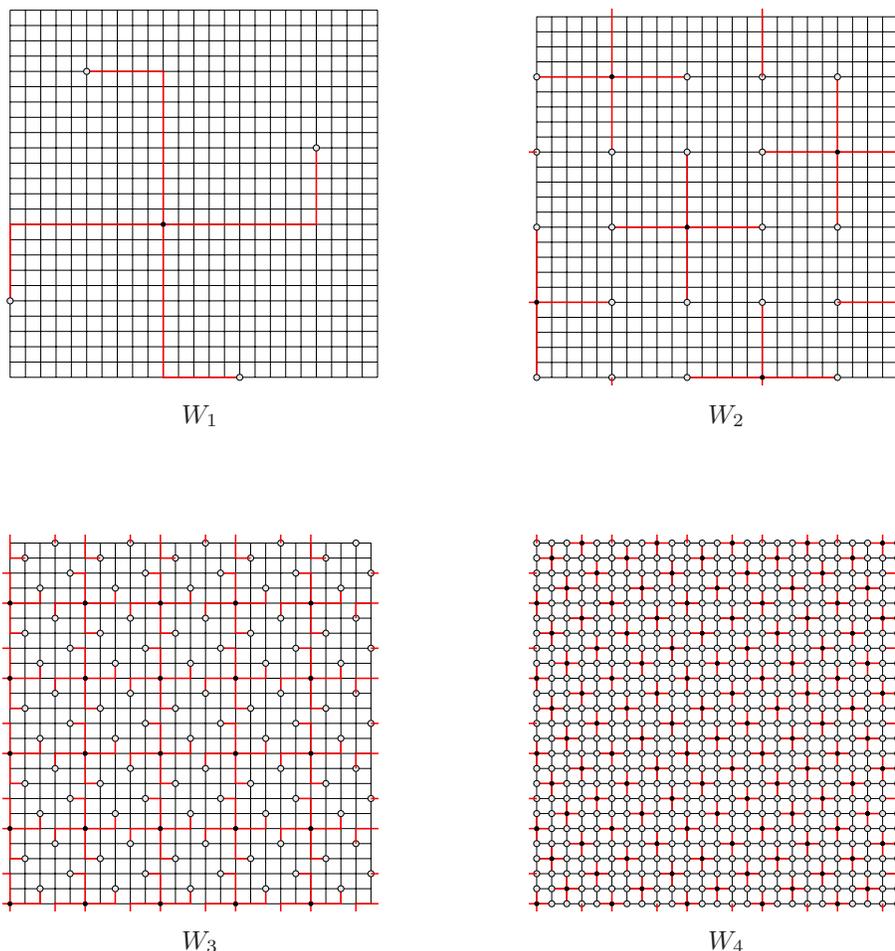


図 4: A broadcasting on the torus network $\mathbf{Z}^2/5^2\mathbf{Z}^2$

3.2 証明の概略

定理 4. $\{W_r\}_{r=1}^{2m}$ はブロードキャストであり、最大通信パス長は $\Delta(G)$ と等しい。

証明の概略を以下に示す。 W_r に含まれる各道が互いに交差しないことを示せばブロードキャストであることが示せる。 $I(W, r-1) = L^{(2m-r+1)}$ より、 $V(G)$ は

$$V(G) = \bigcup_{\mathbf{v} \in I(W, r-1)} (\mathbf{v} + \mathbb{T}^{(2m-r)})$$

と分割される。 $\mathbf{v} \in I(W, r-1) = L^{(2m-r+1)}$ に対して $W_r(\mathbf{v}) = \{w \in W_r \mid s(w) = \mathbf{v}\}$ と定義する。つまり $W_r(\mathbf{v})$ は第 r ラウンドで頂点 \mathbf{v} を出発する道の集合である。 $W_r(\mathbf{v})$ に属す道上のすべての頂点が

$\mathbf{v} + \mathbb{T}^{(2m-r)}$ に含まれていることを示すことが出来る。この証明により $\{W_r\}$ が単にブロードキャストとなっていることのみならず通信に遅延が生じた場合にもけって通信パスが交わらないというより強い性質をもつことが分かる。

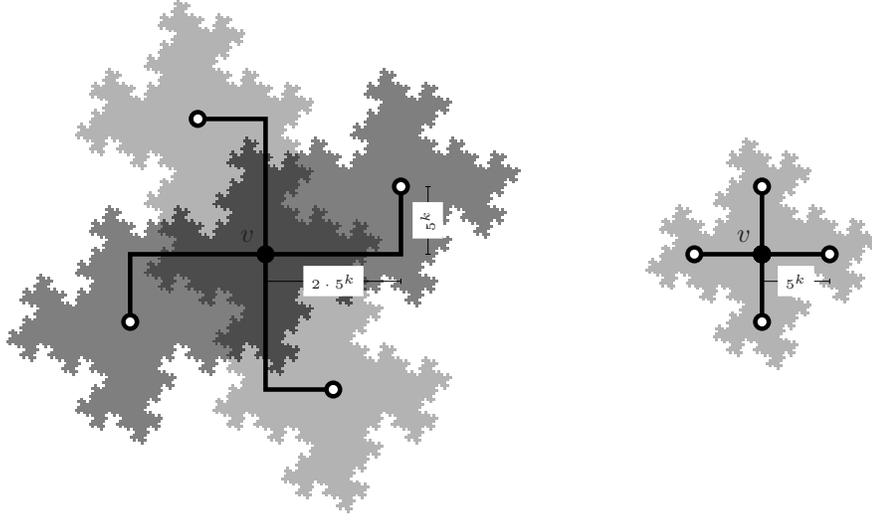


図 5: $W_r(v)$ is contained in $\mathbf{v} + \mathbb{T}^{(2m-r)}$

このグラフはすべての頂点の次数が 4 であるからラウンド数は $2m = \log_{4+1} 5^{2m}$ で最小となっている。 W_r に含まれる道の長さは r が奇数のときは $3 \cdot 5^{(2m-r-1)/2}$, r が偶数のときは $5^{(2m-r)/2}$ となる。よって最大パス長は $3 \cdot 5^{(m-1)} + 5^{(m-1)} + 3 \cdot 5^{(m-2)} + 5^{(m-2)} + \dots + 3 + 1 = 5^{(m-1)} - 1$ であり、グラフの直径と等しく、やはり最小化されている。

4 3次元への拡張

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D} = \{(0, 0, 0)^T, \pm \mathbf{e}_1 \pm \mathbf{e}_2, \pm \mathbf{e}_3\}$$

とすると $B^3 = 7I$ で \mathcal{D} は $\mathbb{Z}^3/B\mathbb{Z}^3$ の完全剰余代表系となっている。これをもちいて 2次元のときと同様に 3次元のサイズ 7^m のトーラスネットワーク上のブロードキャストを構成できる。 $W_r(\mathbf{v})$ は $r \equiv 2, 1, 0 \pmod{3}$ の値によって 3通りに分かれる。 $r \equiv i \pmod{3}$ のとき、 $u = 7^{(m-i)/3}$ として、

$$W_r(\mathbf{v}) = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{v}, Y^u \bar{X}^u Y^{2u} \bar{X}^u Y^u \bar{Z}^u), \quad (\mathbf{v}, \bar{Y}^u X^u \bar{Y}^{2u} X^u \bar{Y}^u Z^u), \quad (\mathbf{v}, \bar{X}^{2u} \bar{Y}^u Z^{2u} \bar{X}^u), \\ (\mathbf{v}, X^{2u} Y^u \bar{Z}^{2u} X^u), \quad (\mathbf{v}, Z^{2u} \bar{X}^u Y^{2u} Z^u), \quad (\mathbf{v}, \bar{Z}^{2u} X^u \bar{Y}^{2u} \bar{Z}^u) \end{array} \right\} & r \equiv 2 \pmod{3} \\ \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{v}, \bar{Y}^u Z^u \bar{X}^u \bar{Y}^u), \quad (\mathbf{v}, Y^u \bar{Z}^u X^u Y^u), \quad (\mathbf{v}, X^u \bar{Y}^u Z^u), \\ (\mathbf{v}, \bar{X}^u Y^u \bar{Z}^u), \quad (\mathbf{v}, Z^u \bar{X}^u Z^u), \quad (\mathbf{v}, \bar{Z}^u X^u \bar{Z}^u) \end{array} \right\} & r \equiv 1 \pmod{3} \\ \{(\mathbf{v}, X^u), (\mathbf{v}, \bar{X}^u), (\mathbf{v}, Y^u), (\mathbf{v}, \bar{Y}^u), (\mathbf{v}, Z^u), (\mathbf{v}, \bar{Z}^u)\} & r \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

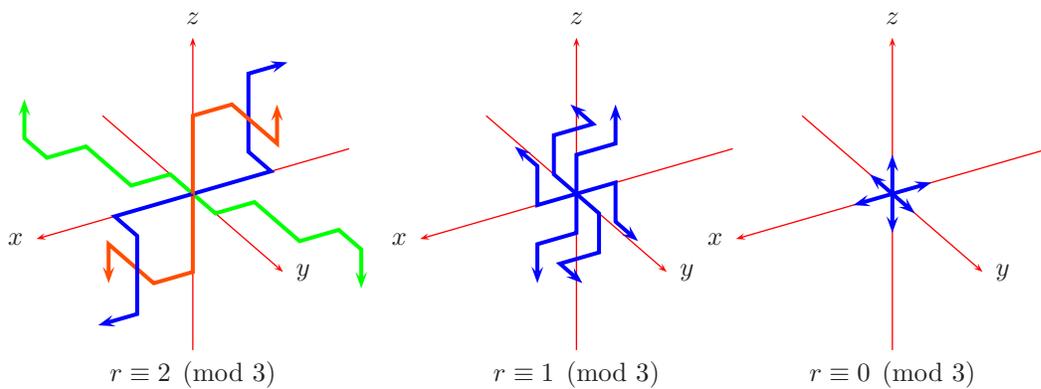


図 6: $W_r(\mathbf{v})$

証明は 2 次元のものと同様に行える。通信に遅延があった場合も異なる通信パス同士が交わらないことも同様である。ただし、この B, D を用いるとき、最大通信パス長が $4/3\Delta(G)$ となる。 D をラウンドによって変更する等の変更を加えると、これを $11/9\Delta(G)$ まで短縮出来るが、これよりも短いパス長をもつブロードキャストが存在するかどうかは分かっていない。

謝辞

多くの有益な助言をくださった Joseph Peters 氏に深く感謝いたします。

参考文献

- [1] Joseph G. Peters and Michel Syska, *Circuit switched Broadcasting in Torus Networks* IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems **7** (1996), 246–255
- [2] Andrew Vince *Digit tiling of Euclidean space* Directions in mathematical quasi-crystals, 329–370, CRM Monogr. Ser., **13**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2000)
- [3] Takahiko Fujita, Shunji Ito, and Syoiti Ninomiya *The generalized van der Corput sequence and its application to numerical integrations*, Monte Carlo Methods and Applications, Vol8 • No2, 2002, 149-158