社団法人 情報処理学会 研究報告
IPSJ SIG Technical Report

2006−AL−104 (9)
2006／1／20

ε-推移を許した ある決定性プッシュダウン変換機器対の等価性判定アルゴリズム

清野 和司[†,‡] 富田 悦次[†] 若月 光夫[†]

[†] 電気通信大学大学院 電気通信学研究科 情報通信工学専攻
〒 182-8585 東京都調布市調布ケ丘 1-5-1
e-mail:{seino,tomita,wakatuki}@ice.uec.ac.jp

[‡] 東芝ソリューション株式会社プラットフォームソリューション事業部 ハードウェア開発部
〒 183-8532 東京都府中市武蔵台 1-1-15

あらまし 決定性プッシュダウンオートマトン（dpda）の等価性判定問題は、任意のクラスに対して可解であるとの結論が明らかにされたが，その可解性の証明は非常に複雑である．これに対し，決定性プッシュダウンオートマトンの部分クラスについてではあるが，分岐アルゴリズムと名付けた単純で直接的な等価性判定手法を筆者らは提唱してきた．この等価性判定方式は，一方が実時間空スタック受理式である決定性プッシュダウン変換機（dpdt）に対しても，ほぼ直接的に適応可能となる様にしてきている．本稿では，この分岐アルゴリズムの手法を，その直接的単純性を保ちながら，ε-推移を許したある決定性プッシュダウン変換機器対に対しても等価性判定を可能とする拡張アルゴリズムを提唱する．

キーワード 決定性プッシュダウンオートマトン、決定性プッシュダウン変換器、等価性判定問題

A direct branching algorithm for checking the equivalence of a pair of non-real-time deterministic pushdown transducers

Kazushi SEINO[†,‡], Etsuji TOMITA[†], and Mitsuo WAKATSUKI[†]

[†] Department of Information and Communication Engineering,
Graduate School of Electro-Communications, The University of Electro-Communications
Chofugaoka 1-5-1, Chofu, Tokyo 182-8585, Japan
e-mail:{seino,tomita,wakatuki}@ice.uec.ac.jp

[‡] Hardware Development Dept. Platform Solutions Div., Toshiba Solutions Corporations
Musashidai 1-1-15, Fuchu, Tokyo 183-8532, Japan

Abstract The equivalence problem of a pair of arbitrary deterministic pushdown automata (dpda) has been proved to be solvable, while its proof is very much complicated. On the other hand, the authors have proposed simple and direct branching algorithm for checking the equivalence of a pair of some subclasses of dpda's. In addition, such an approach has been successfully applied to a pair of deterministic pushdown transducers, one of which is real-time strict. We present here an extended direct branching algorithm for checking the equivalence of a certain pair of non-real-time deterministic pushdown transducers that is also simple.

Key words deterministic pushdown automata, deterministic pushdown transducers, equivalence problem

1 まえがき

決定性プッシュダウンオートマトン（dpda）の等価性判定問題は，Sénizerguesにより，任意のクラスに対して可解であることが証明されている（文献 [12]，[13]）．しかし，その可解性の証明は非常に複雑である．

一方，これに比較して，非常に直接的かつ単純で，各種問題に対する適用性に優れた手法として，筆者らは，分岐アルゴリズムと呼ぶ等価性判定手法を提唱している（文献 [3]，[5]，[6] など）．文献 [3] では，一方が実時間空スタック受理式である dpda 対に対する分岐アルゴリズムによる等価性判定法を示している．また，文献 [5]，および，その更なる拡張である文献 [6] では，双方に ε-推移を許した dpda 対に対する等価性判定を分岐アルゴリズムにより解決するための，ある十分条件を示している．

アルゴリズムの簡単化は，実行速度の向上のためにも，また，以後の理論の拡張性のためにも，非常に重要である．更に，オートマトンや形式文法の学習において，等価性判定は重要な意味を持っており，その効率向上は，直接的に学習の効率向上にも寄与する（文献 [14] など）．

さて，dpda に出力機構を設けた，決定性プッシュダウン変換器（dpdt）の等価性判定に関しても，並行して研究が進められ，幾つかの興味深い結果が得られている（文献 [12] など）．分岐アルゴリズムによる dpdt に対する等価性判定に関する結果としては，文献 [3] で対象とする，一方が実時間空スタック受理式である dpda 対に対して，これに対応する任意の dpdt 対に対する等価性判定の可解性を文献 [9] に示している．そこで，本稿では，文献 [9] の結果を真に包含する拡張として，文献 [6] で対象とする ε-推移を許した dpda 対に，ある条件の下で出力機構を設けた dpdt 対に対して，分岐アルゴリズムを用いた等価性判定が可能であることを示す．これにより，分岐アルゴリズムの手法を用いて等価性判定を解決できる dpdt のクラスを拡張した．

2 定義と表記法

本稿で使用する定義と表記法は，文献 [3]，[5]，[6] および [9] をベースとしている．まず，dpda に関しては，文献 [3] の Definition 2.1.～2.7.，文献 [5] の Definition 2.1.～2.8.，および，文献 [6] の Definition 2.1.～2.3. を，また，dpdt に関しては，文献 [9] の Definition 2.1.～2.5. を，そのまま使用する．従って以下では，重複記載を避け，それ以外に必要な定義のみを記載する．なお，本稿で扱う dpdt は，文献 [9] の Definition 2.1. で定義したとおり，$T=(Q,\Gamma,\Sigma,\Delta,\mu,q_0,Z_0,\phi)$ として表現する．ここで，Q は状態集合，Γ はスタック記号集合，Σ は入力記号集合，Δ は出力記号集合である．

定義 2.1 計算状況 $(p,\alpha\beta\gamma)\in Q\times\Gamma^*$ において，全ての $q\in EMP(p,\alpha)$ に対し，$r\in EMP(q,\beta)$ であるのは，$(q,\beta)\xRightarrow[T]{\varepsilon/\varepsilon}(r,\varepsilon)$ なる場合に限られるとき，β を $(p,\alpha\beta\gamma)$ 中の「入出力 ε-セグメント」と呼ぶ．さもなくば，「入出力セグメント」と呼ぶ．特に，入出力セグメント $\beta\in\Gamma^+$ が，入出力 ε-セグメントであるような部分記号列 $\beta_2\in\Gamma^+(\beta=\beta_1\beta_2\beta_3,\quad \beta_1,\beta_3\in\Gamma^*)$ を含まない，極大長の記号列であるとき，β は正準（canonical）であるという．

定義 2.2 計算状況 $(p,\beta)\in Q\times\Gamma$ において，$\beta=\lambda_0\beta_1\lambda_1\beta_2\lambda_2\cdots\beta_l\lambda_l$，但し，$\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l$ は，(p,β) 中の入出力 ε-セグメント，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l$ は正準入出力セグメントであるとき，次のように表記する．

$$\text{RW-Seg}(p,\beta)=\beta_1\beta_2\cdots\beta_l$$

また，$(p,\gamma)\in Q\times\Gamma^*$ において，$\gamma=\mu_0\beta_1\mu_1\beta_2\mu_2\cdots\beta_l\mu_l$，但し，$\text{RW-Seg}(p,\gamma)=\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l$，$EMP(p,\lambda_0)=EMP(p,\mu_0)$ であるとき，もし全ての $q\in EMP(p,\lambda_0\beta_1\lambda_1\beta_2\lambda_2\cdots\beta_i)=EMP(p,\mu_0\beta_1\mu_1\beta_2\mu_2\cdots\beta_i),(i=1,2,\cdots,l)$ に対し，$(q,\lambda_i)\xRightarrow[T]{\varepsilon/\varepsilon}(r,\varepsilon)$ であるとき，且つそのときに限って，$(q,\mu_i)\xRightarrow[T]{\varepsilon/\varepsilon}(r,\varepsilon)$ が成立するならば，

$$(p,\beta)\cong(p,\gamma)$$

のように表記する．更に，$\beta=\beta'\beta'',\beta''=\beta^{(\mathcal{H})}$，$\gamma=\gamma'\gamma'',\gamma''=\gamma^{(\mathcal{H})}$ である場合，$(p,\beta')\cong(p,\gamma')$，且つ $\beta''=\gamma''$ であるならば，

$$(p,\beta)\overset{\mathcal{H}}{\cong}(p,\gamma)$$

のように表記する．

定義 2.3 ある $x\in\Sigma^+$ に対して，$(p,\alpha)\xRightarrow[T]{x/y}(r,\gamma)$ であるとする．更に，$\alpha'\in\Gamma^+$ を $(p,\alpha')\xRightarrow[T]{x/y}(r,\gamma')$，$\alpha=\alpha'\alpha'',\gamma=\gamma'\alpha''$ を満たす，α の最短の接頭辞であるとする．ここで，

$$(p,\alpha')\xRightarrow[T]{\varepsilon/\varepsilon}(p_1,B_1\beta_1)\xRightarrow[T]{x_1/y_1}(q_1,\beta_1)\xRightarrow[T]{\varepsilon/\varepsilon}$$

$$(p_2,B_2\beta_2)\xRightarrow[T]{x_2/y_2}(q_2,\beta_2)\ldots\xRightarrow[T]{\varepsilon/\varepsilon}$$

$$(p_m,B_m\beta_m)\xRightarrow[T]{x_m/y_m}(q_m,\beta_m)\xRightarrow[T]{\varepsilon/\varepsilon}$$

$$(p_{m+1},B_{m+1})\xRightarrow[T]{x''/y''}(r,\gamma')$$

但し，$x=x_1x_2\ldots x_mx''$，$y=y_1y_2\ldots y_my''$，

$B_i\in\Gamma$，$x_i\neq\varepsilon$ or $y_i\neq\varepsilon$，$1\le i\le m$，$m\ge 0$，

更に，$B_{m+1}\in\Gamma$，$\gamma'\neq\varepsilon$，あるいは，$B_{m+1}=\varepsilon$

であるとき，以下のように表記する．

$$\text{RW-Seg}\left[(p,\alpha)\xRightarrow[T]{x/y}(r,\gamma)\right]=B_1B_2\ldots B_mB_{m+1}$$

$$\text{RW-Pop}\left[(p,\alpha)\xRightarrow[T]{x/y}(r,\gamma)\right]=$$

$B_{m+1}\in\Gamma_2$の時，

$(p_1,B_1)q_1(p_2,B_2)q_2\ldots(p_m,B_m)q_m(p_{m+1},B_{m+1})$

あるいは，$B_{m+1}=\varepsilon$の時，

$(p_1,B_1)q_1(p_2,B_2)q_2\ldots(p_m,B_m)$

また，計算状況 $(p,\alpha),(p,\beta)\in Q\times\Gamma^*$ について，ある $x\in\Sigma^*$ に対して，$(p,\alpha)\xRightarrow[T]{x/y}(r,\gamma)$，且つ，$\left|\text{RW-Seg}\left[(p,\alpha)\xRightarrow[T]{x/y}(r,\gamma)\right]\right|\leq n$ であったとする．この時，常に，$(p,\beta)\xRightarrow[T]{x/y}(r',\gamma')$ with $(r,{}^{(1)}\gamma)=(r',{}^{(1)}\gamma')$ が成り立ち，また，(p,α)，(p,β) が逆の場合にも同様な関係が成立する場合，以下のように表記する．

$$(p,\alpha)\overset{n}{\simeq}(p,\beta)$$

なお，dpdt T における $\xRightarrow[T]{x/y}$ とは，入力 $x\in\Sigma^*$，出力 $y\in\Delta^*$ の範囲において，可能な限り ε-推移が行なわれたことを意味する．更に，上記の $(r,{}^{(1)}\gamma)$，$(r',{}^{(1)}\gamma')$ を入出力モードと呼び，それ以外を入出力 ε-モードと呼ぶことにする．これに対して，出力を加味せず，随伴 dpda として可能な限り ε-推移が行なわれた場合に，単に入力モード，それ以外を ε-モードと呼ぶ．

3　前提および基本命題

等価性判定を行うべき dpdt 対を，

$$T_1=(Q_1,\Gamma_1,\Sigma,\Delta,\mu_1,q_{01},Z_{01},\phi),$$

$$T_2=(Q_2,\Gamma_2,\Sigma,\Delta,\mu_2,q_{02},Z_{02},\phi)$$

とし，各々から出力機構を取り除いた dpda (随伴 dpda) を M_1,M_2 とする．ここで，この dpda 対は，以下の性質 1 の成立，つまり，文献 [6] の Definition 2.2. で定義される Weak Segmental Property と呼ばれる性質を満足するものとする．更に，文献 [6] の結果より，M_1,M_2 の等価性判定は可解であるため，一般性を失うことなく，$M_1\equiv M_2$ と仮定する．

性質 1 (Weak Segmental property)
dpda M_1,M_2 が等価である場合，この dpda 対に依存する，以下の条件を満足する定数 $\mathcal{R}\geq 1$ が存在する．

$$(p_{01},Z_{01})\xRightarrow[M_1]{x_0}(p,A|\alpha'')\xRightarrow[M_1]{x}(q,\varepsilon|\alpha'')\qquad(3.1)$$

$$(p_{02},Z_{02})\xRightarrow[M_2]{x_0}(\bar{p},\beta)\xRightarrow[M_2]{x}(\bar{q},\gamma)\qquad(3.2)$$

但し，$x_0,x\in\Sigma^*$，$p,q\in Q_1$，$A\in\Gamma_1$，$\alpha''\in\Gamma_1^*$，

$\bar{p},\bar{q}\in Q_2$，$\beta,\gamma\in\Gamma_2^*$

なる任意の推移に対して，以下が成立する．

$$\left|\text{Reading-Seg}\left[(\bar{p},\beta)\xRightarrow[M]{x}(\bar{q},\gamma)\right]\right|\leq\mathcal{R}.$$

(これは，上記 x に対する推移において，β に含まれるスタック記号のうち，ε-推移以外でポップアップされるものが高々$\mathcal{R}$ 以下であることを意味する) □

次に，dpdt T_2 は，以下の性質 2 を満足するものとする．この性質は，入力記号を読み込むことなく出力が限りなく長く出力される様な不自然さを排除する．

性質 2 (ε-推移に対する出力長の有限性)
dpdt T_2 に依存する，以下の条件を満足する，非負定数 $\mathcal{O}$ が存在する．

$$(p_{02},Z_{02})\xRightarrow[T_2]{x_0/v_0}(\bar{p},\beta)\xRightarrow[T_2]{\varepsilon/v}(\bar{q},\gamma)$$

但し，$v_0,v\in\Delta^*$

なる任意の推移に対して，$|v|\leq\mathcal{O}$ が成立する．□

補題 3.1 dpdt T_1，T_2 が前記性質 1，性質 2 を満足する場合，次の (i)(ii) が成立する．
(i) 式 (3.1)，(3.2) の推移において，それに対応する dpdt の推移において，

$$\left|\text{RW-Seg}\left[(\bar{p},\beta)\xRightarrow[T_2]{x/u}(\bar{q},\gamma)\right]\right|\leq\mathcal{R}_T$$

但し，$\mathcal{R}_T=(1+\mathcal{O})\mathcal{R}$

(ii) T_2 における到達可能な任意の計算状況を $(\bar{p},\omega)$ とする．ここで，そこからの $y\in\Sigma^*$ による推移が可能で，そのときの出力が $v\in\Delta^*$ であったとする．このとき，τ_2 を推移規則集合 μ_2 に含まれる規則中の出力長の最大値とすると，

$$|v|\leq\mathcal{T}(|x|)\quad\text{但し，}\mathcal{T}(|x|)=(\tau_2+\mathcal{O})|x|$$

(証明) 性質 1，2 の成立より明らか．□

さて，本稿の等価性判定法は，文献 [3]，文献 [5]，文献 [6]，文献 [9] を基礎とし，分岐アルゴリズムによる判定木展開を用いる．以下に，本アルゴリズムの基礎となる基本命題を示すが，以降の論理展開は，主として文献 [6]，文献 [9] に準じている．命題 3.1 は，文献 [9] の Proposition 3.1. の拡張で，分岐操作 (Branching) の正当性の基本となる．また，命題 3.2，3.3 は，分岐操作のみでは無限に拡張される判定木に対し，それを有限に抑えるための後述する跳び越し (skipping) 操作が，ある有限の範囲で必ず適用されることを保証する．命題 3.2 は，スタックに対する適用有限性，命題 3.3 は，文献 [9] の Proposition 3.2. の拡張で，出力に対する適用有限性に関与する．

命題 3.1 $T_1 \equiv T_2$ であるとき，次の (i)(ii) が成立する．
(i) 前記の式 (3.1),(3.2) の前半の推移に対応する dpdt T_1 および T_2 の推移，

$$(p_{01}, Z_{01}) \xrightarrow[T_1]{w/w_1} (p, \alpha) \tag{3.3}$$

$$(p_{02}, Z_{02}) \xrightarrow[T_2]{w/w_2} (\bar{p}, \beta) \tag{3.4}$$

但し，$w_1, w_2 \in \Delta^*$，$\alpha = A\alpha''$，$\beta = \beta'\beta''$

に対して，$w_1 h = w_2$ なる，ある $h \in \Delta^{\pm *}$ が存在し，以下が成立する．

$$(p, \alpha) \equiv h(\bar{p}, \beta) \tag{3.5}$$

(ii) 更に，(i) に加えて，ある $w' \in \Sigma^*, w_1', w_2' \in \Delta^*$ に対して，

$$(p_{01}, Z_{01}) \xrightarrow[T_1]{w'/w_1'} (p, \alpha) \quad 且つ,$$

$$(p_{02}, Z_{02}) \xrightarrow[T_2]{w'/w_2'} (\bar{p}, \bar{\beta})$$

但し，$\bar{\beta} \in \Gamma_2^*$，$w_1'h' = w_2'$，$h' \in \Delta^{\pm *}$

であるとしたとき，$(p, \beta) \cong (\bar{p}, \bar{\beta})$ ならば，$h' = h$ が成立する．
（証明） 文献 [9] の Proposition 3.1. の成立性を考慮し，また，$T_1 \equiv T_2$ であることから，$TRANS(\bar{p}, \beta) = TRANS(\bar{p}, \bar{\beta})$ であることを加味すれば明らか．□

命題 3.2 dpdt T_2 の全ての入出力モードの計算状況に対して，$\overset{\mathcal{R}_T}{\simeq}$ $(\mathcal{R}_T \geq 1)$ による同値類の数は高々次の定数以下である．

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}_T) = (|Q_2||\Gamma_2| + 1)^{(1+|Q_2|)^{\mathcal{R}_T - 1}}.$$

但し，$\mathcal{R}_T = (1 + \mathcal{O})\mathcal{R}$

（証明） $\overset{\mathcal{R}}{\sim}$ と $\overset{\mathcal{R}_T}{\simeq}$ の定義を加味すれば，文献 [6] Lemma 2.5. の証明と同様．□

補題 3.2 dpdt T_1, T_2 が前記性質 1，性質 2 を満足するものとし，その到達可能な計算状況対を $(p, \alpha) \in Q_1 \times \Gamma_1$，$(\bar{p}, \beta) \in Q_2 \times \Gamma_2$ とする．ここで，$(p, \alpha) \equiv (\bar{p}, \beta)$ ならば，以下が成立する．

$$|\text{RW-Seg}(\bar{p}, \beta)| \leq \mathcal{B}(|\alpha|)$$

但し，$\mathcal{B}(|\alpha|) = (1 + |Q_2|)^{\mathcal{R}_T|\alpha| - 1}$.

（証明） 性質 1，2 の成立より，任意の $x \in \Sigma^*, r \in Q_2$ に対して，

$$\left| \text{RW-Seg}\left[(\bar{p}, \beta) \xrightarrow[T_2]{x/y} (r, \varepsilon) \right] \right| \leq \mathcal{R}_T|\alpha|$$

が成立する．以下，$\overset{\mathcal{R}}{\sim}$ と $\overset{\mathcal{R}_T}{\simeq}$ の定義を加味すれば，文献 [6] の Lemma 2.6. の証明と同様．□

定義 3.1 $T_1 \equiv T_2$ であるとき，

$$(p_{01}, Z_{01}) \xrightarrow[T_1]{x_0/u_{01}} (p, A\alpha'') \quad 且つ,$$

$$(p_{02}, Z_{02}) \xrightarrow[T_2]{x_0/u_{02}} (\bar{p}, \beta)$$

但し，$A \in \Gamma_1$

なる推移において，ある $h' \in \Delta^{\pm *}$ に対して，

$$(p, A\alpha'') \equiv h'(\bar{p}, \beta) \quad 但し, u_{01}h' = u_{02} \tag{3.6}$$

であるとする．更に，ある，$x \in \Sigma^+, u_1, u_2 \in \Delta^*, \alpha_1 \in \Gamma_1^*, \beta_1 \in \Gamma_2^*$ に対して，

$$(p, A|\alpha'') \xrightarrow[T_1]{x/u_1} (p, A\alpha_1|\alpha'') \tag{3.7}$$

$$(\bar{p}, \beta) \xrightarrow[T_2]{x/u_2} (\bar{p}, \beta_1) \tag{3.8}$$

$$但し, \left| \text{RW-Seg}\left[(\bar{p}, \beta) \xrightarrow[T_2]{x/u_2} (\bar{p}, \beta_1) \right] \right| \leq \mathcal{R}_T$$

$$且つ, (\bar{p}, \beta) \overset{\mathcal{R}_T}{\simeq} (\bar{p}, \beta_1)$$

であり，更に，ある $h \in \Delta^{\pm *}$ に対して，

$$(p, A\alpha_0\alpha) \equiv h(\bar{p}, \beta_1) \quad 但し, u_1 h = h' u_2 \tag{3.9}$$

であるとする．ここで，式 (3.7), (3.8) のような推移対を $\overset{\mathcal{R}_T}{\simeq}$ S E 推移対と呼ぶ．更に，この推移対の途中に，$\overset{\mathcal{R}_T}{\simeq}$ S E 推移対を一切含まない場合に，この推移対は極小（minimal）であると言う．

命題 3.3 $T_1 \equiv T_2$ であり，且つ，定義 3.1 の状況において，式 (3.7), (3.8) の推移対が極小（minimal）であるものとする．このとき，次の (i)(ii) が成立する．
(i) ある $h'' \in \Delta^{\pm *}$ が存在して，以下の (a) または (b) が成立する．
(a) h', $h \in \Delta^*$ ならば，$h = h'h''$
(b) h', $h \in \Delta^{-*}$ ならば，$h^{-1} = h'^{-1}h''$
(ii) dpdt T_1, T_2 のみに依存する，ある定数 $\mathcal{U}$ が存在して，

$$||h| - |h'|| \leq \mathcal{U}$$

が成立する．更に，$||h'|| \geq \mathcal{U}$ ならば，以下が成立する．

$$h' \in \Delta^* \quad ならば \quad h \in \Delta^*, \quad 且つ,$$

$$h' \in \Delta^{-*} \quad ならば \quad h \in \Delta^{-*}$$

$$||h''|| \leq \mathcal{U}.$$

（証明） (i) については，$\overset{\mathcal{R}_T}{\simeq}$ S E 推移が無限に繰り返す場合を考慮すれば，簡単に証明できる．次に，(ii) については，まず，式 (3.7) の推移を，

$$(p, A|\alpha) \xrightarrow[T_1]{x'/u_1'} (p', \alpha'|\alpha'') \xrightarrow[T_1]{x''/u_1''} (p, A\alpha_1|\alpha'')$$

但し, $x = x'x''$

とする．ここで，式 (3.7), (3.8) の推移対が極小（minimal）であることから，命題 3.2 を考慮すると，以下が成立する．

$$|\alpha'| \leq \mathcal{S} \quad 但し, \mathcal{S} = |Q_1||\Gamma_1|\mathcal{A}(\mathcal{R}_T)$$

つまり，$|\alpha'|$ が $\mathcal{S}$ を超えると，必ず途中に $\overset{\mathcal{R}_T}{\simeq}$ S E 推移対が存在することになり，極小の仮定に反する．以上より，式 (3.7) の推移において出現し得る計算状況の数は高々以下の定数 $\mathcal{U}_0$ 以下となる．

$$\mathcal{U}_0 = |Q_1|(|\Gamma_1| + 1)^{\mathcal{S}}\mathcal{A}(\mathcal{R}_T)$$

この定数は直接的に，推移ステップの上限でもあり，従って，推移規則集合 μ_1, μ_2 の規則中の出力長の最大値を τ を用いて，以下の様に，$|u_1|$, $|u_2|$ ともに，上限が抑えられる．

$$|u_1| \leq \mathcal{U} \quad 且つ \quad |u_2| \leq \mathcal{U} \quad 但し, \mathcal{U} = \tau\mathcal{U}_0$$

ここで，$u_1 h = h' u_2$ であるため，

$$||h| - |h'|| = ||u_2| - |u_1|| \leq |u_2| \leq \mathcal{U}$$

となり，(ii) の前半が成立する．(ii) の後半は，この結果より直接的に証明される．□

4 等価性判定アルゴリズム

本アルゴリズムは，$(p_{01}, Z_{01}) \equiv (p_{02}, Z_{02})$ を根とする判定木を，以下で紹介する「分岐」,「跳び越し」,「中断」の操作により逐次展開することにより行なわれる．ここで，式 (3.3), (3.4) のような推移において，式 (3.5) のような節点が判定木中に導入され，その成立性が着目されたとする．ここで，$\alpha = \beta = \varepsilon$ である場合，$T_1 \equiv T_2$ であるためには，$h = \varepsilon$ でなければならない．このチェックを終端チェックと呼ぶ．また，判定木中に $(p, \alpha) \equiv h'(\bar{p}, \beta)$ なる節点が既に存在している場合，$T_1 \equiv T_2$ であるためには，$h = h'$ でなければならない．このチェックを出力の一意性チェックと呼ぶ．このいづれかのチェックが不成立である場合，直ちに $T_1 \not\equiv T_2$ と判定を下し，全手続きを終了する．以下では，着目節点 (3.5) が，この両チェックの対象外である場合を考える．

4.1 分岐

本アルゴリズムの分岐操作（Branching）は，T_2 側の随伴 dpda が ε-モードの場合を考慮に入れる必要があるが，本質的には，文献 [9] の 4.1.Branching と同様の操作となる．

補題 4.1 dpdt T_1, T_2 の計算状況対 (p, α), $(\bar{p}, \beta)$ に対して，等価式 (3.5) が成立することと，次の (i)(ii) が成立することは同値である．

(i)(a) (p, α), $(\bar{p}, \beta)$ が共に入力モードである場合，全ての $a_i \in \mathrm{FIRST}(p, \alpha) = \mathrm{FIRST}(\bar{p}, \beta) = \{a_1, a_2, \ldots, a_l\} \in \Sigma$ における推移，

$$(p, \alpha) \xrightarrow[T_1]{a_i/u_i} (p_i, \alpha_i) \quad 且つ \quad (\bar{p}, \beta) \xrightarrow[T_2]{a_i/v_i} (\bar{p}_i, \beta_i)$$

に対して，ある適当な $h_i \in \Delta^{\pm *}$ が存在して，$u_i h_i = h v_i$ が成立する．

(b) (p, α) が ε-モードである場合，上記 (a) において，$l = 1$, $a_1 = \varepsilon$ として，

$$(p, \alpha) \xrightarrow[T_1]{\varepsilon/u_i} (p_1, \alpha_1) \quad 且つ \quad (\bar{p}, \beta) = (\bar{p}_1, \beta_1)$$

に対して，ある適当な $h_1 \in \Delta^{\pm *}$ が存在して，$u_1 h_1 = h$ が成立する．

(c) (p, α) が入力モード，$(\bar{p}, \beta)$ が ε-モードである場合，上記 (a) において，$l = 1$, $a_1 = \varepsilon$ として，

$$(\bar{p}, \beta) = (\bar{p}_1, \beta_1) \quad 且つ \quad (\bar{p}, \beta) \overset{\varepsilon/v_1}{\underset{T_1}{\Longrightarrow}} (\bar{p}_1, \beta_1)$$

に対して，ある適当な $h_1 \in \Delta^{\pm *}$ が存在して，$h_1 = h v_1$ が成立する．

(ii) 上記 (i) に対して，以下が成立する．

$$(p_i, \alpha_i) \equiv h_i(\bar{p}_i, \beta_i) \tag{4.10}$$

（証明） 命題 3.1 の成立より明らか．

上記補題 4.1 の (i) の成立性に対するチェックを，分岐出力チェックと呼び，その成立が可であれば，分岐出力チェックは成功であるといい，全ての i に対する等価式 (4.10) を着目節点 (3.5) の子節点として判定木中に加える．この操作を分岐と呼ぶ．また，分岐出力チェックが不成功であったならば，"$T_1 \not\equiv T_2$" と判定を下し，全手続きを終了する．

4.2 跳び越し

上記分岐操作のみでは，判定木が無限に展開して終端しない場合がある．そこで，文献 [9] の 4.2.Skipping と同様に，以下に定義する跳び越し操作を導入する．なお，以降，現時点までに展開された判定木を $T(T_1 : T_2)$ とする．

定義 4.1 （文献 [9] の Definition 4.1 と同様の定義）判定木 $T(T_1 : T_2)$ 中に節点 $(p_1, \alpha_1\gamma_1) \equiv h_1(\bar{p}_1, \bar{\alpha}_1\bar{\gamma}_1)$ および $(p_{m+1}, \alpha_{m+1}\gamma_{m+1}) \equiv h_{m+1}(\bar{p}_{m+1}, \bar{\alpha}_{m+1}\bar{\gamma}_{m+1})$ が存在し，

$$(p_1, \alpha_1) \overset{y/y_1}{\underset{T_1}{\Longrightarrow}} (p_{m+1}, \alpha_{m+1}) \quad 且つ,$$

$$(\bar{p}_1, \bar{\alpha}_1) \overset{y/y_2}{\underset{T_2}{\Longrightarrow}} (\bar{p}_{m+1}, \bar{\alpha}_{m+1})$$

但し, $y_1 h_{m+1} = h_1 y_2$

である場合，

$$< (p_1, \alpha_1 \mid \gamma_1) \equiv h_1(\bar{p}_1, \bar{\alpha}_1 \mid \bar{\gamma}_1) > \xrightarrow[T(T_1:T_2)]{y_1\backslash y/y_2}$$

$$< (p_{m+1}, \alpha_{m+1} \mid \gamma_{m+1}) \equiv h_{m+1}(\bar{p}_{m+1}, \bar{\alpha}_{m+1} \mid \bar{\gamma}_{m+1}) >$$

と表記する．ここで，"$y_1\backslash$"，"$/y_2$"，"$\mid$"については，省略も可能とする．なお，矢印の形状について，$\xrightarrow[T(T_1:T_2)]{y_1\backslash y/y_2}|$ とした場合は，随伴 dpda M_2 の推移において，できる限り ε-推移をさせないことを意味する．

定義 4.2 （跳び越しの前提条件）着目節点 (3.5) において，(p, α) は非減少モード（nondecreasing mode），$(\bar{p}, \beta)$ は入力モード（reading mode）であるとする（各モードの定義は文献 [9] の Definition 4.2. 参照）．更に，以下のように書き直す．

$$(p, A\alpha'') \equiv h(\bar{p}, \beta) \tag{4.11}$$

但し，$A \in \Gamma_1$, $\alpha = A\alpha''$

ここで，$T(T_1 : T_2)$ において既に分岐の適用されている，

$$(p, A\omega'') \equiv h'(\bar{p}, \beta') \tag{4.12}$$

なる節点が存在し，且つ，

$$(\bar{p}, \beta') \stackrel{n}{\simeq} (\bar{p}, \beta) \tag{4.13}$$

であるとする．但し，$n\,(\geq 1)$ は上記の関係を満足する $T(T_1 : T_2)$ 中の最大値とする．この時，以下の (a) あるいは (b) を満足する場合，着目節点 (4.11) は跳び越し前提条件を満足していると言う．

(a) $h = h'$

(b) $T(T_1 : T_2)$ において，

$$(p, A\underline{\alpha}'') \equiv g(\bar{p}, \underline{\beta}) \tag{4.14}$$

$$但し，(\bar{p}, \beta') \stackrel{n}{\simeq} (\bar{p}, \underline{\beta}) \tag{4.15}$$

$$(p, A\underline{\omega}'') \equiv g'(\bar{p}, \underline{\beta}') \tag{4.16}$$

$$但し，(\bar{p}, \beta') \stackrel{n}{\simeq} (\bar{p}, \underline{\beta}') \tag{4.17}$$

なる分岐被適用節点が存在し，ある $h'' \in \Delta^{\pm *}$ に対して，

$$h, h', g, g' \in \Delta^*, \tag{4.18}$$

$$h = h'h'', \quad g = g'h''$$

あるいは，

$$h, h', g, g' \in \Delta^{-*}, \tag{4.19}$$

$$h^{-1} = h'^{-1}h'', \quad g^{-1} = g^{-1}h''$$

が成立する．

ここで，節点 (4.12) を着目節点に対する対応節点，更に，節点 (4.14),(4.16) を副次対応節点と呼ぶ．なお，節点 (4.12) と，節点 (4.14) は同一でも良いものとする．

定義 4.3 （跳び越し適用の可否）着目節点 (4.11) が，前定義の跳び越しの前提条件を満足しており，更に，ある $x_0 \in \Sigma^*$, $u_0, v_0 \in \Delta^*$, $t' \in \Delta^{\pm *}$ に対して，その対応節点 (4.12) から，

$$< (p, A \mid \omega'') \equiv h'(\bar{p}, \beta') > \xrightarrow[T(T_1:T_2)]{u_0\backslash x_0/v_0}| \tag{4.20}$$

$$< (q, \varepsilon \mid \omega'') \equiv t'(\bar{q}_j, \gamma') >$$

$$\left|\text{RW-Seg}\left[(\bar{p}, \beta') \xrightarrow[T_2]{x_0/v_0} (\bar{q}_j, \gamma')\right]\right| \leq n$$

但し，n は式 (4.13) の定義と同じ

なる推移路が $T(T_1 : T_2)$ 中に存在する場合，式 (4.13) の成立により，着目節点の両辺からの

$$(p, A \mid \alpha'') \xrightarrow[T_1]{x_0/u_0} (q, \varepsilon \mid \alpha'') \quad 且つ， \tag{4.21}$$

$$(\bar{p}, \beta) \xrightarrow[T_2]{x_0/v_0}| (\bar{q}_j, \gamma)$$

なる推移が可能である．ここで，ある $t \in \Delta^{\pm *}$ が存在し，

$$u_0 t = h v_0 \tag{4.22}$$

が成立するならば，着目節点 (4.11) に対する跳び越しが適用可能であると言う．□

着目節点 (4.11) が，定義 4.2 における，跳び越しの前提条件を満足しており，更に，定義 4.3 の跳び越し適用が可能である場合，着目節点に対して跳び越しを適用し，その子節点として，

$$(q, \alpha'') \equiv t(\bar{q}_j, \gamma) \tag{4.23}$$

を判定木に取り入れる．これを後続節点（skipping end）と呼び，そこへ至る枝のラベルを，"$u_0\backslash x_0/v_0$" とする．その後の判定木の展開に応じて，着目節点に対する跳び越しの前提条件，および，適用可能性を常に監視し，それが不成立となった場合には，着目節点に改めて分岐を適用する．なお，式 (4.22) が成立しない場合には，直ちに，"$T_1 \not\equiv T_2$" と判定を下し，全手続きを終了する．

補題 4.2 （定義 4.2(b) の跳び越しに対する主要補題）着目節点 (4.11) に対して，定義 4.2 における (b) の跳び越し前提条件が成立し，式 (4.12)〜(4.22) の状況によりその跳び越しが適用され，

$$< (p, A\alpha'') \equiv h(\bar{p}, \beta) > \xrightarrow[T(T_1:T_2)]{u_0\backslash x_0/v_0} \tag{4.24}$$

$$< (q, \alpha'') \equiv t(\bar{q}_j, \gamma) >$$

なる推移が判定木中に存在し，更に，この跳び越しを可能にする対応節点 (4.12) からの推移が推移式 (4.20)

であり，更に，同じく，この跳び越しを可能にする副次対応節点 (4.14)．(4.16) からの推移が，

$$< (p, A\underline{\alpha}'') \equiv g(\bar{p}, \underline{\beta}) > \overset{u_0\backslash x_0/v_0}{\underset{T(T_1:T_2)}{\Longrightarrow\!|}}$$

$$< (q, \underline{\alpha}'') \equiv s(\bar{q}_j, \underline{\gamma}) >$$

$$< (p, A\underline{\omega}'') \equiv g'(\bar{p}, \underline{\beta}') > \overset{u_0\backslash x_0/v_0}{\underset{T(T_1:T_2)}{\Longrightarrow\!|}}$$

$$< (q, \underline{\omega}'') \equiv s'(\bar{q}_j, \underline{\gamma}') >$$

但し，$t, t', s, s' \in \Delta^{\pm *}$として

$$u_0 t' = h' v_0, \quad u_0 s = g v_0, \quad u_0 s' = g' v_0 \qquad (4.25)$$

であったとする．更に，ここで，対応節点 (4.12) を起点とする

$$(p, A \mid \omega'') \overset{x/u}{\underset{T_1}{\Longrightarrow}} (q, \varepsilon \mid \omega'') \quad 且つ,$$

$$(\bar{p}, \beta') \overset{x/v}{\underset{T_2}{\Longrightarrow\!|}} (\bar{q}_j, \gamma')$$

$$\left| \text{RW-Seg}\left[(\bar{p}, \beta') \overset{x/v}{\underset{T_2}{\Longrightarrow}} (\bar{q}_j, \gamma') \right] \right| \leq n$$

のような全ての $x \in \Sigma^*, u, v \in \Delta^*$ について，式 (4.15),(4.17) の成立により，同時に，副次対応節点 (4.14),(4.16) を起点とする

$$(\bar{p}, \underline{\beta}) \overset{x/v}{\underset{T_2}{\Longrightarrow\!|}} (\bar{q}_j, \underline{\gamma})$$

$$(\bar{p}, \underline{\beta}') \overset{x/v}{\underset{T_2}{\Longrightarrow\!|}} (\bar{q}_j, \underline{\gamma}')$$

なる推移が可能であり，この時，

$$ut' = h'v, \quad us = gv, \quad us' = g'v \qquad (4.26)$$

が成立するならば，$ut = hv$ も同時に成立する．
（証明） 本補題は，文献 [9] の Lemma4.2. にほぼ準じている．その証明は，$\overset{n}{\simeq}$ 同値関係により，着目節点，対応節点，副次対応節点は入出力について同一であることを加味すれば，出力記号列間の関係のみに着目すれば良く，従って，本補題も，文献 [9] の Lemma4.2. と同様に証明することができる．□

上記補題 4.2 により，式 (4.22)，(4.25)，(4.26) が成立する場合，自動的に $ut = hv$ が成立すること，つまり，跳び越しの正当性が保証される．

4.3 中断

次に，本判定木展開において，跳び越しの後続節点が無限に増え続けることを抑制するために，文献 [9] の 3.2.Halting に対して出力機構を加味し，以下のような中断操作を導入する．

定義 4.4 着目節点 (4.11) が，$T(T_1 : T_2)$ 中の跳び越し被適用節点であるとして，既に推移式 (4.24) のような飛び越しにより，後続節点 (4.23) が判定木中に導入されているものとする．ここで，更なる判定木展開において，新たな跳び越し，

$$< (p, A\alpha'') \equiv h(\bar{p}, \beta) > \overset{u_i\backslash x_i/v_i}{\underset{T(T_1:T_2)}{\longrightarrow}}$$

$$< (q, \alpha'') \equiv t_i(\bar{q}_j, \gamma_i) >$$

が適用されたとき，

(i) $t = t_i$

(ii) $\text{RW-Pop}\left[(\bar{p}, \beta) \overset{x_0/v_0}{\underset{T_2}{\Longrightarrow}} (\bar{q}_j, \gamma) \right]$

$$= \text{RW-Pop}\left[(\bar{p}, \beta) \overset{x_i/v_i}{\underset{T_2}{\Longrightarrow}} (\bar{q}_j, \gamma_i) \right].$$

(iii) $\mathcal{H} = \left| (\bar{p}, \beta) \overset{x_0}{\underset{M_2}{\Longrightarrow}} (\bar{q}_j, \gamma) \right|$

$$\leq \left| (\bar{p}, \beta) \overset{x_i}{\underset{M_2}{\Longrightarrow}} (\bar{q}_j, \gamma_i) \right|$$

但し，M_2は T_2の随伴 dpda

(iv) $(\bar{q}_j, \gamma) \overset{\mathcal{H}}{\cong} (\bar{q}_j, \gamma_i)$

が成立する場合，後続節点 $(q, \alpha'') \equiv t(\bar{q}_j, \gamma_i)$ は中断が適用可能であると言う．□

着目接点が，ある跳び越しの後続節点であり，定義 4.4 の中断が適用可能である場合，それを中断節点として以後の判定木展開は行なわない．

5 終端性および正当性

$T_1 \equiv T_2$ が真である場合，本アルゴリズムが有限の手数で終端して，"$T_1 \equiv T_2$" と正しく判定を下すことは，３章の基本命題の成立により，文献 [5]，[6]，[9] と同様に証明できる．

更に，本アルゴリズムが，$T_1 \not\equiv T_2$ と判定を下すことなく終端あるいは無限に進行したときには，以下に示す *Claim* E_n が成立し，従って，"$T_1 \equiv T_2$" が真に成立する．その対偶を考えれば，$T_1 \not\equiv T_2$ が真である場合でも，本アルゴリズムは有限の手数で終端して，"$T_1 \not\equiv T_2$" と正しく判定を下すことが証明される．

Claim $\mathbf{E_n}$ 判定木 $T(T_1 : T_2)$ 中の任意の非中断節点を

$$(p, \alpha) \equiv h(\bar{p}, \beta) \quad 但し, \alpha \in \Gamma^+$$

とする．ここで，$\alpha = \alpha_1 \alpha_2$ として，

$$(p, \alpha_1 \mid \alpha_2) \overset{w/u}{\underset{T_1}{\Longrightarrow}}{}^{(n)} (r, \varepsilon \mid \alpha_2)$$

$$(\bar{p},\beta)\xRightarrow[T_2]{w/v}|(\bar{r}_k,\partial)$$

なる任意の $x\in\Sigma^*$, $u,v\in\Delta^*$, $r\in Q_1$, $(\bar{r}_k,\partial)\in Q_2\times\Gamma_2$ に対して,

(i) ある $t_k\in\Delta^{\pm *}$ が存在して, $ut_k=hv$ が成立する.

(ii) ある $w_0\in\Sigma^*$, $u_0,v_0\in\Delta^*$ に対して,

$$<(p,A\mid\alpha_2)\equiv h(\bar{p},\beta)>\xRightarrow[T(T_1:T_2)]{u_0\backslash w_0/v_0}| \\ <(q,\varepsilon\mid\alpha_2)\equiv t_k(\bar{r}_k,\partial_0)>$$

なる推移路が, 判定木 $T(T_1:T_2)$ 中に存在する.

(iii) $\text{RW-Pop}\left[(\bar{p},\beta)\xRightarrow[T_2]{w_0/v_0}(\bar{q}_j,\partial_0)\right]$

$$=\text{RW-Pop}\left[(\bar{p},\beta)\xRightarrow[T_2]{w/v}(\bar{q}_j,\partial)\right]$$

(iv) $\mathcal{H}=\left|(\bar{p},\beta)\xRightarrow[M_2]{w_0}(\bar{q}_j,\partial_0)\right|$

$$\leq\left|(\bar{p},\beta)\xRightarrow[M_2]{w}(\bar{q}_j,\partial)\right|$$

(v) $(\bar{q}_j,\partial_0)\overset{\mathcal{H}}{\cong}(\bar{q}_j,\partial)$

が成立する.

Claim $\mathbf{E_n}$ の証明　文献 [5], [6] の dpda に対する **Claim $\mathbf{E_n}$** の証明と同様な流れで証明できる. □

6 むすび

以上, 決定性プッシュダウン変換器対の等価性判定問題について, 分岐アルゴリズムを用いた, 非常に直接的で単純な判定手法を提唱し, そのアルゴリズムを適用できるための十分条件を示した. また, その終端性および正当性に対する証明を行なった. 本結果は, 今後の dpdt に対する各種問題解決に対する検討容易性の向上に寄与するものと考える. なお, 本アルゴリズムを基盤とした, dpdt の等価性判定問題の時間複雑さに関する検討, あるいは, dpdt の学習による自動構成に関する検討などは, 今後の課題である.

謝辞. 本研究は科学研究費補助金基盤研究 (B) の支援を受けている.

参考文献

[1] 富田 悦次, "一方が ε-動作なし空スタック受理式である決定性プッシュダウン変換機の等価性判定," 信学論（D）, **J62-D**, 7, pp.467-474, 1979.

[2] O.H. Ibarra, L.E. Rosier, "On the decidability of equivalence for deterministic pushdown transducers," Inf. Processing Letters, **13**, 89-93, 1981.

[3] E. Tomita, "A direct branching algorithm for checking equivalence of some classes of deterministic pushdown automata," Inform. Control **52**, 187-238, 1982.

[4] B. Courcelle, "An axiomatic approach to the Korenjak-Hopcroft algorithm," Math. Systems Theory **16**, 191-231, 1983.

[5] E. Tomita, "An extended direct branching algorithm for checking equivalence of deterministic pushdown automata," Theoret. Comput. Sci. **32**, 87-120, 1984.

[6] E. Tomita, K. Seino, "A weaker sufficient condition for the equivalence of a pair of dpda's to be decidable," Theoret. Comput. Sci. **41**, 223-230, 1985.

[7] 清野 和司, 富田 悦次, "ある非実時間決定性プッシュダウン変換機対の等価性判定," 信学論（D）技術談話室, **J68-D**, 10, pp.1785-1788, 1985.

[8] K. Culik II, J. Karhumäki, "Synchronizable deterministic pushddown automata and the decidability of their equivalence," Acta Informatica **23**, 597-605, 1986.

[9] E. Tomita, K. Seino, "A direct branching algorithm for checking the equivalence of two deterministic pushdown transducers, one of which is real-time strict," Theoret. Comput. Sci. **64**, 39-53, 1989.

[10] K. Seino, E. Tomita, "The extended equivalence problem for a class WSP of non-real-time DPDA's," -The detailed proofs-. Bulletin of UEC Vol.7, No.2, December, 1994.

[11] E. Tomita, K. Seino, "The extended equivalence problem for a class of non-real-time deterministic pushdown automata," Acta Informatica **32**, 395-413, 1995.

[12] G. Sénizergues, "L(A)=L(B)? decidability results from complete formal systems," Theoret. Comput. Sci. **251**, Issues 1-2, 1-166, 2001.

[13] G. Sénizergues, "L(A)=L(B)? A simplified decidability proof," Theoret. Comput. Sci. **281**, Issues 1-2, 555-608, 2002.

[14] Y. Tajima, E. Tomita, M. Wakatsuki, M. Terada, "Polynomial time learning of simple deterministic languages via queries and a representative sample," Theoret. Comput. Sci. **329**, 203-221, 2004.