2006－AL－105（5）
2006／3／17

k-bounded hole familyに対するlongest induced path問題を解くアルゴリズムの改善

石関 徹也　　大舘 陽太　　山崎 浩一

群馬大学 工学部 情報工学科
〒376-8515 群馬県 桐生市 天神町 1-5-1

概要　Gavrilは[F.Gavril, Algorithms for maximum weight induced paths, Infomation Processing Letters 81 (2002) 203-208]で、頂点数がkより大きい頂点誘導サイクルを含まない頂点に重みの付いたグラフのmaximum weight induced pathの重さが、$O(mn^k)$時間で計算できることを示した。ただし、nとmをそれぞれ頂点と辺の数とする。本論文では、kが偶数の場合は$O(m^{\frac{k}{2}})$時間で、kが奇数の場合は$O(m^{\frac{k-1}{2}}n)$で解くアルゴリズムを提案する。

An improved algorithm for longest induced path problem on k-bounded hole family

Tetsuya Ishizeki　　Yota Otachi　　Koichi Yamazaki

Department of Computer Science Gunma University
1-5-1 Tenjin-cho, Kiryu zip:376-8515, Gunma, Japan

abstract　In [F.Gavril, Algorithms for maximum weight induced paths, Information Processing Letters 81 (2002) 203-208], Gavril showed that the weight of maximum weight induced path for a vertex weighted graph having no induced cycles on more than equal $k+1$ vertices can be computed in $O(mn^k)$ time where n and m denote the number of vertices and edges, respectively. In this paper, for the same problem we present an $O(m^{\frac{k}{2}})$ time algorithm if k is an even number, and an $O(m^{\frac{k-1}{2}}n)$ time algorithm if k is an odd number.

1　はじめに

無向グラフ$G = (V, E)$において、頂点誘導部分グラフがパスになる部分グラフのことを*Induced Path* (IPと略記する)という。*Maximum Weight Induced Path*(MWIPと略記)問題は、頂点に重みのついたグラフが入力されたとき、頂点重みの総和が最大になるIPを求める問題である。MWIP問題は、ラージコミュニケーションやニューラルネットワークなどのコミュニケー

ション時間の評価に応用がある ([2] 参照)。しかし、MWIP 問題の重み無しバージョンである、*Longest Induced Path*(LIP と略記) 問題が一般のグラフに対して NP-困難である事が知られている [3]。本論文において我々は、*k-bounded hole family* というグラフクラスに対し LIP 問題を解くアルゴリズムを示す。既知の結果では、k-bounded hole family に対し、$O(mn^k)$ で MWIP 問題の解を求めるアルゴリズムが示されている [2]。今回、我々は k が偶数の場合は $O(m^{\frac{k}{2}})$ で、k が奇数の場合は $O(m^{\frac{k-1}{2}}n)$ で解くアルゴリズムを示す。

k-bounded hole family とは、k-頂点より大きい頂点誘導サイクルを含まないグラフクラスのことである。Gavril は、この k-bounded hole family や、interval-filament graphs、polygon-circle graphs、circle graphs、circular-arc graphs について、MWIP 問題を多項式時間で解くアルゴリズムを示した [2]。

k-bounded hole family は、広く研究されている様々なグラフクラスを含んでいる。例えば、AT-free graphs というグラフクラスは、5-bounded hole family に含まれる。Kratsch 等はこの AT-free graphs に対し、MWIP 問題を $O(m^2n)$ で解くアルゴリズムを示した [1]。我々のアルゴリズムは、5-bounded hole family に含まれるグラフに対し、MWIP 問題を $O(m^2n)$ で解く事ができる。よって、我々のアルゴリズムは、Kratsch 等と同じ時間計算量で、より大きいグラフクラスに対し MWIP 問題を解く事が出来る。

本論文の構成は、次の通りである:2 章で諸定義を述べる。3 章では、まず、k-bounded hole family に対する MWIP 問題を解く Gavril のアルゴリズムを説明する。次に、今回我々が提案する、k が偶数の場合は $O(m^{\frac{k}{2}})$ 時間で、k が奇数の場合は $O(m^{\frac{k-1}{2}}n)$ で、k-bounded hole family に対する MWIP 問題を解くアルゴリズムを示す。

2 定義

本論文では、特に記載しない限り、$G = (V, E)$ を頂点に重みのついたグラフとする。また、n と m をそれぞれ頂点と辺の数とする。$v \in V$ に対し、$w(v)$ を頂点 v の重みとし、$w(v) \geq 0$ とする。頂点 v の近傍を $N(v)$ で表す。V の部分集合 S に対し、S の近傍を $N(S)$ で表す (すなわち $N(S) = \{v \notin S : v$ は $u \in S$ の近傍 $\}$)。

グラフ G において、頂点誘導部分グラフがパスになる頂点誘導部分グラフを induced path(IP と略記) という。$P = (v_1, v_2, \ldots, v_t)$ を G に含まれるある IP とする。$v \in N(v_1)$ であり、$v \notin N(\{v_2, \ldots, v_t\})$ となるある頂点 v に対し、IP $(v, v_1, v_2, \ldots, v_t)$ を vP と表す。また、Pv も同様である。ある IP P の重さは、$\sum_{v_i \in P} w(v_i)$ と定義する。

k-bounded hole family とは、k 頂点より大きい頂点誘導サイクルを含まないグラフクラスのことである。グラフ G において、グラフのある 3 頂点に対し、その 3 頂点のうちの全ての 2 頂点が、3 つめの頂点の近傍を通らずにパスが作れるとき、その 3 頂点は *asteroidal triple* (AT と略記) であるという。AT を持たないグラフを *AT-free graph* という。AT-free graph は頂点誘導で、6 頂点以上のサイクルを含まないため、5-bounded hole family に含まれる [4]。

3　MWIP 問題を解くアルゴリズム

3.1　Gavril のアルゴリズム

Gavril は以下の補題を示した [2]。

補題 3.1 *[2]* グラフ $G=(V,E)$ は *k-bounded hole family* に含まれているとする。$P=(v_1,v_2,\ldots,v_t)$ を少なくとも $k-1$ 頂点を持つ IP とする。G において、$(v,v_1,v_2,\ldots,v_{k-1})$ が IP であれば、G において vP も IP となる。

証明 $(v,v_1,v_2,\ldots,v_{k-1})$ は IP である。頂点 v とある頂点 $v_i(i \geq k)$ が隣接した場合、$k+1$ 以上の頂点誘導サイクルが G に存在することになる。G は k-bounded hole family に含まれるグラフであることから、G には $k+1$ 以上の頂点誘導サイクルは存在しない。よって、頂点 v とある頂点 $v_i(i \geq k)$ は隣接しない。ゆえに、vP は IP となる。 □

Gavril のアルゴリズムは以下のようになる。

先ず、Gavril のアルゴリズムで使われる変数などを定義する。P を $k-2$ 頂点の IP とし、v,u,v_t をある頂点とする。ただし、vP,Pu は IP であるとする。$\mathcal{I}(vP)[j][v_t]$ を、vP で始まり、v_t を終点とする頂点数 j の IP の集合とする。だだし、$j-1>k$ とする。$I(vP)[j][v_t]$ を、$\mathcal{I}(vP)[j][v_t]$ の中で、最大の重みを持つ IP に含まれる頂点の集合とする。だだし、$wei(vP)[j][v_t]$ を、$I(vP)[j][v_t]$ に含まれる頂点の重みの総和を格納する変数とする (すなわち、$wei(vP)[j][v_t]=\sum_{v_i \in I(vP)[j][v_t]} w(v_i)$)。また、$w_G$ は、グラフ G に含まれる、最大の重みを持つ IP の重さを格納する変数とする (すなわち w_G は MWIP 問題の解)。

ここで、$j-1$ 以下の $wei(vP)[l][v_t](l \leq j-1)$ が既に計算されていると仮定する。そして、$wei(vP)[j][v_t]$ を計算することを考える。Gavril のアルゴリズムでは、$wei(vP)[j][v_t]$ を、$(v,u) \notin E$ となる $wei(Pu)[j-1][v_t]$ を使って計算する。補題 3.1 より、$(v,u) \notin E$ となる、$I(Pu)[j-1][v_t]$ に、v を加えた頂点集合 $\{v \cup I(Pu)[j-1][v_t]\}$ で誘導される頂点誘導部分グラフも IP になる。よって、頂点集合 $\{v \cup I(Pu)[j-1][v_t]\}$ で誘導される IP は、vP で始まり、v_t を終点とする頂点数 j の IP ということになる。ここで、ある vP、j、v_t に対し、$wei(vP)[j][v_t]$ を求める場合を考える。$wei(vP)[j][v_t]$ には、$\{I(Pu)[j-1][v_t]:(v,u) \notin E\}$ に含まれる $I(Pu)[j-1][v_t]$ と v で誘導される IP の中で、最大の重みを持つ IP の重みを格納する。$\{I(Pu)[j-1][v_t]:(v,u) \notin E\}$ に含まれる $I(Pu)[j-1][v_t]$ と v で誘導される IP の中で、重さが最大になる IP は、$\{I(Pu)[j-1][v_t]:(v,u) \notin E\}$ の中で、$wei(Pu)[j-1][v_t]$ が最も大きい $I(Pu)[j-1][v_t]$ に頂点 v を加えた頂点集合で誘導される。ゆえに、$wei(vP)[j][v_t]$ は $wei(Pu)[j-1][v_t]$ の最大値に $w(v)$ を加えることで計算できる (すなわち $wei(vP)[j][v_t]=w(v)+\max\{wei(Pu)[j-1][v_t]:(v,u) \notin E\}$)。そして、$w_G=\max\{wei(vP)[j][v_t]\}$ とする。

定理 3.1 *[2] Gavril* のアルゴリズムは、*k-bounded hole family* に含まれるグラフに対し、$O(n^{k+2})$ 時間で MWIP 問題を解く。

証明 全ての $wei(vP)[j][v_t]$ は、$O(n^{k+1})$ 個存在する。そして、それぞれの $wei(vP)[j][v_t]$ は、$\max\{wei(Pu)[j-1][v_t]\}$ から求める。ここで、u は $O(n)$ 個存在するの。よって、計算量は $O(n^{k+2})$ となる。 □

アルゴリズムを工夫することにより、$O(n^2)$ を $O(m)$ とし、全体の計算量は $O(mn^k)$ となる。

3.2　我々の考案したアルゴリズム

この節では、我々のアルゴリズムの概要を述べ、定理 3.2 を証明する事により、アルゴリズムの正当性を述べる。

先ず、我々のアルゴリズムで使われる変数などを定義する。P を $k-2$ 頂点の IP とし、v, u をある頂点とする。ただし、vP, Pu は IP であるとする。$\mathcal{I}(vP)$ を vP で始まる IP の集合とする。$I(vP)$ を、$\mathcal{I}(vP)$ の中で、最大の重みを持つ IP に含まれる頂点の集合とする。$wei(vP)$ を、$I(vP)$ に含まれる頂点の重みの総和を格納する変数とする (すなわち、$wei(vP) = \sum_{v_i \in I(vP)} w(v_i)$)。$w_{k-2}$ を、$k-2$ 頂点以下の IP の中で重みが最大となる IP の重みを格納する変数とする。また、w_G は、グラフ G に含まれる、最大の重みを持つ IP の重さを格納する変数とする (すなわち w_G は MWIP 問題の解)。

我々のアルゴリズムでは、先ず、$k-2$ 頂点以下の IP の中で重みが最大となる IP の重みを計算する。ここでは、全ての辺の組合せから $k-2$ 頂点以下の IP を列挙する。それら全ての重みを求め、最大の重みを w_{k-2} という変数に格納しておく。次に、$k-1$ 頂点以上の IP の重みを以下のようにして求める。$wei(vP)$ を計算することを考える。我々のアルゴリズムでは、$wei(vP)$ を、$(v, u) \notin E$ となる $wei(Pu)$ を使い計算する。補題 3.1 より、$(v, u) \notin E$ となる頂点集合 $I(Pu)$ に、v を加えた頂点集合 $\{v \cup I(Pu)\}$ で誘導される頂点誘導部分グラフも IP になる。頂点集合 $\{v \cup I(Pu)\}$ で誘導される IP は、$k-1$ 頂点 IP vP で始まる IP ということになる。ここで、ある vP に対し、$wei(vP)$ を求める場合を考える。$wei(vP)$ には、$\{I(Pu) : (v, u) \notin E\}$ に含まれる $I(Pu)$ と v で誘導される IP の中で、最大の重みを持つ IP の重みを格納する。$\{I(Pu) : (v, u) \notin E\}$ に含まれる $I(Pu)$ と v で誘導される IP の中で、重さが最大になる IP は、$\{I(Pu) : (v, u) \notin E\}$ の中で、$wei(Pu)$ が最も大きい $I(Pu)$ に頂点 v を加えた頂点集合で誘導される。ゆえに、$wei(vP)$ は $wei(Pu)$ の最大値に $w(v)$ を加えることで計算できる (すなわち $wei(vP) = w(v) + \max\{wei(Pu) : (v, u) \notin E\}$)。また、ある vP に対し、$(v, u) \notin E$ となる Pu が存在しない場合を考える。この場合、vPu となる IP が存在しないということになる。よって、vP で始まる IP の重みは、$\sum_{v_i \in vP} w(v_i)$ となる。よって以下の式を再帰的に繰り返すことにより、それぞれの $wei(vP)$ の値を求める。

$$wei(vP) = \begin{cases} w(v) + \max\{wei(Pu) : (v, u) \notin E\} & if \quad \exists Pu : (v, u) \notin E \\ w(v) + \sum_{v_i \in P} w(v_i) & otherwise \end{cases} \tag{1}$$

MWIP 問題の解は以下のようになる。

$$w_G = \max\{wei(vP) \cup w_{k-2}\}$$

Gavril のアルゴリズムでは、IP の終点 v_t と頂点数 j を定め、頂点数 $k-1$ の IP vP から始まり、v_t を終点とする長さ j の IP の中で最大の重みを持つ IP の重みを求めていた。しかし、我々のアルゴリズムでは、再帰的に頂点数 $k-1$ の IP vP から始まる最大の重みを持つ IP の重みを求めていくことにより、終点と頂点数を定めることを省き、計算量を減らすことができた。

次に、アルゴリズムの正当性を示す。$w(vP)$ には、頂点数 $k-1$ の IP vP で始まる IP の中で、最大の重みを持つ IP の重みの正確な値が格納されているものとする。すると、我々のアル

ゴリズムで使われる変数 $wei(vP)$ は、$w(vP)$ に一致することを示す。

定理 3.2 $wei(vP)$ の値は、$w(vP)$ と一致する。

証明 IP の頂点数に関する帰納法により証明する。$l(vP)$ は、$\mathcal{I}(vP)$ に含まれる IP の中で頂点数が最大となる IP の正確な頂点数が格納されている変数とする。

$l(vP) = k-1$ のとき。$l(vP) = k-1$ であるため、$(v,u) \notin E$ となる Pu は存在しない。よって、このときの vP の重さ $w(vP)$ は、$w(v) + \sum_{v_i \in P} w(v_i)$ となる。よって、$l(vP) = k-1$ のとき、式 (1) より、$wei(vP) = w(vP)$。

$l(vP) = t$ までは $wei(vP) = w(vP)$ であると仮定し $l(vP) = t+1$ のときを考える。先ず、$l(vP) = t+1$ のとき、$(v,u) \notin E$ となるある Pu に対し、$wei(Pu) = w(Pu)$ であることを示す。仮定より、$l(Pu) \leq t$ ならば $wei(Pu) = w(Pu)$ である。そこで、$l(Pu) \leq t$ を示すため、$l(Pu) \geq l(vP)$ となる場合を考える。頂点 u は、$(v,u) \notin E$ であるため、補題 3.1 より、$\{v \cup I(Pu)\}$ も IP となる。つまり、$l(vP)$ は、$(v,u) \notin E$ となる全ての $l(Pu)$ より大きくなる。しかしこれは、$l(Pu) \geq l(vP)$ に矛盾。ゆえに、$l(Pu) < l(vP)$ となり、全ての $\{l(Pu) : (v,u) \notin E\}$ は t 以下になるので、$wei(Pu) = w(Pu)$ である。

次に、$l(vP) = t+1$ のとき、$wei(vP) = w(vP)$ であることを証明するため、$wei(vP) = w(v) + \max\{wei(Pu) : (v,u) \notin E\} > w(vP)$ となる場合を考える。$wei(vP) = w(v) + \max\{wei(Pu) : (v,u) \notin E\} > w(vP)$ である場合、$\max\{wei(Pu) : (v,u) \notin E\} > \max\{w(Pu) : (v,u) \notin E\}$ となるので仮定に矛盾する。$wei(vP) = w(v) + \max\{wei(Pu) : (v,u) \notin E\} < w(Pu)$ の場合も同様である。ゆえに、$wei(vP) = w(vP)$ になることが証明された。 $\square$

定理 3.3 我々のアルゴリズムは、*k-bounded hole family* に含まれるグラフに対し、$O(n^k)$ 時間で MWIP 問題を解く。

証明 先ず、全ての $k-2$ 頂点以下の IP の列挙と重みの計算は、$k-2$ 頂点以下の IP が $O(n^{k-2})$ しか存在しないため、$O(n^{k-2})$ でできる。次に、全ての $wei(vP)$ は、$O(n^{k-1})$ 個存在する。そして、それぞれの $wei(vP)$ は、$\max\{wei(Pu)\}$ から求める。ここで、u は $O(n)$ 個存在する。よって、計算量は $O(n^k)$ となる。 $\square$

アルゴリズムを工夫することにより、計算量を k が偶数の場合は $O(m^{\frac{k}{2}})$ 時間、k が奇数の場合は $O(m^{\frac{k-1}{2}}n)$ 時間とできる。

本論文の主題になっている、LIP 問題は MWIP 問題の各頂点の重み全てが 1 である特別な場合を考えれば良い。ただし、w_G には LIP の頂点数が格納されるため、LIP 問題の解は $w_G - 1$ となる。

参考文献

[1] D.Kratsch, H.Müller and I.Todinca, Feedback vertex set and longest inducedpath on AT-free graphs, WG 2003, pp.309-321.

[2] F.Gavril, Algorithms for muximum weight induced paths, Infomation Processing Letters 81, 2002, pp.203-208.

[3] M.R.Garey and D.S.Johnson, Computers and Intractability, A Guide to the Theory of NP-completeness, Freeman and Co., San Francisco, CA, 1979.

[4] T.Kloks, D.Kratsch and H.Müller, Approximationg the bandwidth for asteroidal triple-free graphs, J.Algorithms, 32(1), pp.41-57, 1999.