2006－AL－107　(7)
2006／7／3

$s-t$ パスのリスクに関する実験的考察

松本雄介 *　今井桂子 **
* 中央大学大学院理工学研究科情報工学専攻　** 中央大学理工学部情報工学科

概要: 制御不能流の理論とは, 既存のネットワーク理論に一旦流れたものは後から打ち消しできないという制約を付け加えた理論である. 本稿では, 制御不能流の理論における悪い流れを表現するパスのリスクという新しい概念を導入し, その定義の妥当性を考察した. あるパス上の流れが最大流の一部に含まれないとき, その流れはネットワーク上に最大流を実現することを阻止していると考えられる. 本稿ではこの考えに基づき, パスのリスクを定式化した. そして, パスのリスクを用いて最大流と最小極大流が一致するための条件について示した.

On risks of $s-t$ paths in a two-terminal uncontrollable flow

Yusuke Matsumoto*　Keiko Imai**
* Graduate School of Science and Engineering, Chuo University
** Department of Information and System Engineering, Chuo University

Abstract: The theory of uncontrollable flows was proposed by Iri in [3, 4, 5], where cancellation of flows is not permitted. In this paper, we consider the two-terminal uncontrollable flow problem. If a $s-t$ path is not included in any maximum flow in the two-terminal network, the maximum flow on the $s-t$ path may disturb achievement of the maximum flow value in the whole network. We give a new concept we call a "risk" of the $s-t$ path in the two-terminal network. Moreover, we investigate the case that any minimum maximal flow is equal to a maximum flow.

1　はじめに

ネットワーク理論の中心的な問題の 1 つとして, 最大流問題がある. ネットワークの性能を最大流で評価するためには, 計画者の計画通りに利用者が行動すること, すなわち, 完全に流れを制御できることが仮定されていなければならない. しかし非常事態や極端な混雑に直面したときでなくとも, 全ての流れを完全に制御できないのが現実である. このように完全制御が不可能であることを, 一般に制御不能であるという. 道路交通ネットワークのように, 最初から完全制御を目的としていないネットワークもある. 実際, ある車の行き先や経路, スピードなどを第三者が変更することは不可能である. これ以外にも現実社会には, 制御不能の現象が存在する. この制御不能である流れを数理的に扱おうというのが, 制御不能流の理論 [3, 4, 5, 11] である.

従来, オペレーションズ・リサーチではネットワーク理論などを用いた様々なモデル化の手法や, そのモデルに対する最適化に関する手法や解析などを中心に広範囲に数多く研究されている. しかし, 流れが制御不能であることを考慮していないため, 現実問題にそぐわないこともあった. これに対して提案された制御不能流の理論は, 簡単に言うと既存のネットワーク理論に "一旦流れたものは後から打消しできない" という制約を付加することで, 制御不能である流れの共通の性質を特徴づけ, 現実的な道路交通ネットワークなどを適切に表現するモデルを構築することを狙っている.

道路交通ネットワークにおいて渋滞が起こっているとき, 極大流の 1 つになっていると考えられる. この極大流の中で, 最大の値を持つものを一般に最大流と呼んでいる. ネットワークにおいて, 最大流が実現できているとき, そのネットワークは一番良い振る舞いをしていると見ることもできる. しかし, 上記で述べたように道路交通ネットワーク上の流れを第三者が変更することは不可能なため, 最大流へと流れを変更することを期待できない. そこでネットワークの最低限の振る舞いを向上させることができれば, ネットワークの利用者がどのような流れを生もうとも, 渋滞は起こりにくくなると考えら

れる．この一番悪い振る舞いを極大流の中でも最低の値を持つ最小極大流であると考える．そこで，最小極大流を調べることが重要になる．この最小極大流を求める厳密アルゴリズムは既に提案されている [12, 13] が，大規模な問題を解くには至っていない．これは，最小極大流を求める問題が NP-困難 [1] であることによる [10]．この事実から，近似アルゴリズムを提案することが望まれるが，未だに提案されていない．

上記の中で，一旦流れたものは後から打消しできないと述べた．これにより，ネットワークに対して"良い"流ればかりを流すとき，最大流になり，"悪い"流ればかりを流すとき，最小極大流になる．本稿では，2 端子ネットワークに対する流れの良し悪しをパスのリスクとして定式化し，リスクの意味を考察する．そしてパスのリスクを用いて，最大流と最小極大流の値が一致するための必要条件とすべての辺容量が 1 である 2 端子ネットワークに対して最大流と最小極大流の値が一致するための必要十分条件を求める．

まず，2 章でネットワーク理論における諸定義を行ない，3 章で制御不能流を定義する．次に，4 章でパスのリスクについて定義し，パスのリスクを用いて最大流と最小極大流が一致するための条件について考察する．最後に，結論と今後の課題について述べる．

2　2 端子ネットワークの最大流

ここでは，2 端子ネットワークを定義した後，2 端子ネットワークにおける実行可能 2 端子流と最大流を定義する [6]．

グラフ $G=(V,E;\partial^+,\partial^-)$ とは，

- 点集合 (vertex set)V
- 辺集合 (edge set)E
- 接続関数 (incident function)
  $\partial^+:E\to V,\partial^-:E\to V$

からなる複合概念である．V の元を点と呼び，E の元を辺と呼ぶ．各辺 $e\in E$ に対して，$\partial^+e\in V$ を辺 e の始点，$\partial^-e\in V$ を辺 e の終点と呼ぶ (図 1)．

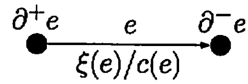

図 1. 辺 e に関する定義

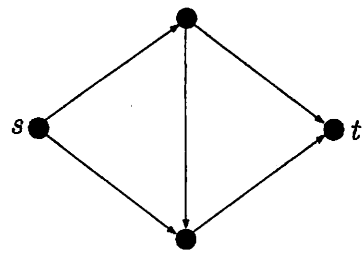

図 2. 2 端子ネットワーク

グラフ G に容量関数 (capacity function) $c: E\to\mathbb{R}_+$, ソース $s\in V$, シンク $t\in V$ が付加された $N=(G,c,s,t)$ を 2 端子ネットワークと呼ぶ (図 2)．本稿では，$^\forall v\in V$ に対して，$s-v$ パスと $v-t$ パスが必ず存在することを仮定する．関数 $\xi:E\to\mathbb{R}_+$ が 2 端子ネットワーク N において以下の条件，

- (容量制約 (capacity constraints))
  $^\forall e\in E: 0\le\xi(e)\le c(e)$
- (キルヒホッフの法則 (Kirchhoff's laws))
  $^\forall v\in V-\{s,t\}:$
  $\sum\{\xi(e)|\partial^+e=v\}-\sum\{\xi(e)|\partial^-e=v\}=0$

を満たすとき，実行可能 2 端子流 (以下，2 端子流) であるという．そして，2 端子流の流量 $||\xi||$ を

$$||\xi||=\sum\{\xi(e)|\partial^+e=s\}-\sum\{\xi(e)|\partial^-e=s\} \quad (1)$$
$$=\sum\{\xi(e)|\partial^-e=t\}-\sum\{\xi(e)|\partial^+e=t\} \quad (2)$$

とする．2 端子流 ξ の中で流量 $||\xi||$ が最大になる ξ を最大流という．

3　制御不能流

ここでは，2 端子ネットワークに対する制御不能流を定義し，制御不能流の理論における残余ネット

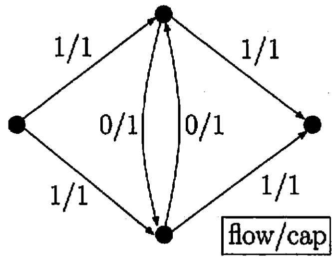

図 3. 制御不能流

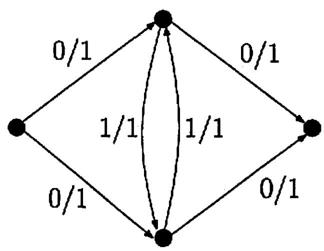

図 4. 非制御不能流

ワークについて述べる．そして，最小極大流を定義し，制御不能流の理論における 2 端子ネットワークの信頼性について述べる．

2 端子ネットワーク N に対する制御不能流 (uncontrollable flow) とは，以下で定義されるものである．

(a) 2 端子流 ξ が s から t への初等的な $s-t$ パスである．

(b) N において，ξ_1, ξ_2 が制御不能流であれば，正実数係数 α_1, α_2 による一次結合 $\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ も N において，制御不能流である．

(c) 上記 (a), (b) によって構築される流れのみが，制御不能流となる．

この定義から任意の 2 端子流 ξ が制御不能流となるわけではないことが分かる (図 3, 4)．そして，ある ξ が制御不能流であるかどうかを判定する問題は NP–完全 [1] であることが知られている [7, 8]．しかし，無閉路 2 端子ネットワーク上の任意の ξ は制御不能流になる．

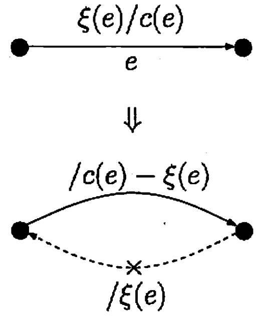

図 5. 残余容量

次に，制御不能流の理論における残余容量を定義する．2 端子流 ξ に関する残余容量 (residual capacity) は，次のように定義される (図 5)．

$$c'(\cdot|\xi) : E \to \mathbb{R} \tag{3}$$

$$c'(e|\xi) = \begin{cases} c(e) - \xi(e) & (c(e) - \xi(e) > 0) \\ 0 & (c(e) - \xi(e) \leq 0) \end{cases} \tag{4}$$

この残余容量を容量とする 2 端子ネットワーク $N' = (G, c', s, t)$ を残余ネットワークと呼ぶ．ここでの残余容量と残余ネットワークの定義は，ネットワーク理論における一般的な定義と異なっている．

制御不能流の理論において，重要な意味を持つ極大流を定義する．実行可能な制御不能流 ξ において，もしどんな制御不能流 $\xi'(\neq 0)$ を選んでも $\xi+\xi'$ が実行可能でなくなるとき，ξ は極大流 (maximal flow) であるという．言い換えると，ある ξ に関する残余ネットワークが s から t へのパスを持たないとき，ξ は極大流であるという．極大流の中で，最大の流量の極大流は最大流であり，最小の流量の極大流を最小極大流 (minimum maximal flow) という．制御不能流の理論には，一旦流れたものは後から打消しできないという制約が付加されているため，2 端子ネットワークに対して最も悪い流れが発生したとき，最小極大流になる．したがって，制御不能流の理論では，最小極大流に興味があり，最小極大流を求める厳密アルゴリズムが既に提案されている [12, 13]．しかし，最小極大流の値を求めることは NP–困難であることが知られている [10] ため，大規模な問題を解くには至っていない．そこで，近

似アルゴリズムを提案することが望まれるが，未だに提案されていない．

次に，制御不能流の理論における信頼性を定義する．2 端子ネットワークの信頼性 (reliability) を

$$\text{信頼性} = \frac{\text{最小極大流}}{\text{最大流}} \qquad (5)$$

と定義する．しかし，最小極大流を求めることができないので，信頼性を求めることが難しい．そこで本稿では，信頼性が 1 になる 2 端子ネットワークに注目する．2 端子ネットワークの信頼性が 1 ならば，最小極大流の値と最大流の値が一致していることになり，制御不能を仮定しても任意の極大流が最大流となる．信頼性が 1 となるようにネットワークを設計することが望まれるので，以下では，これが成り立つ条件について考える．

4 パスのリスク

ここでは，$s-t$ パスのリスク $r(p)$ を次のような考え方で定義する．最大流と最小極大流が一致すること，したがって信頼性が 1 であることと，2 端子ネットワークにリスクのある $s-t$ パスが存在しないことが同値になるように，$s-t$ パスのリスクを定義したい．$s-t$ 流 ξ_p が流れているとき，ξ_p を最大流の一部として使うような最大流が存在しないと，ξ_p を変更せずに，いくら ξ_p に関する残余ネットワークに最大流を流しても，2 端子ネットワークの最大流の値に達することができない．このときの，2 端子ネットワークの最大流の値と ξ_p をそのままにしたときの最大流との差を，パス p のリスクとして用いるというのが基本的な考え方である．これは次のように記述できる．

$$r(p) = ||N \text{ の最大流 }|| - (||\xi_p \text{の残余ネットワークの最大流 }|| + ||\xi_p||) \qquad (6)$$

$$||\xi_p|| = \min\{c(e) | e \in p\} \qquad (7)$$

しかし，これをそのまま定義すると，図 6 のような場合には，どの $s-t$ パスもリスクが無いのに，ネットワークの最大流と最小極大流に差が出るということになる．実際に，図 6 の最大流の値は 4 であり，最小極大流の値は 2 となっている．この問題を解決するために，(6) 式と (7) 式を用いてパスのリスクを計算する前に，次のような前処理を行なう必要がある．

2 端子ネットワーク N の $s-t$ パスのリスクを計算する前に次のことを行なう．

1. 直列辺の縮約
   2 端子ネットワーク N 内にある直列辺を縮約し，縮約する辺の容量の最小値を縮約して得られた辺の容量とする．このようにして得られたネットワークを N'' とする．

2. 2 端子ネットワークの分解
   $u, v \in V$ に対して，$u-v$ パスまたは $v-u$ パスが存在するとき，u, v を新たな集合 V' に入れる．このようにすると，V からいくつかの V_i が構成される．このとき，新しい集合は互いに素とは限らないことに注意する．特に，任意の V の点と s, t 間にパスが存在するので，s, t はすべての V_i に属している．V_i の点を 2 端子ネットワーク N'' に存在していた辺でつなぐことで，E_i を作り，$N_i = (V_i, E_i, s, t)$ を考えると，これも 2 端子ネットワークとなっている．

N におけるパス p のリスクは以下のようにして定義する．N における $s-t$ パス p は直列辺が縮約されていることを除けば，どれかの N_i に 1 度だけ現れている．その N_i において，(6) 式と (7) 式を用いて，パスのリスクを計算する．

このような前処理を行なってから，パスのリスクを計算する理由の概略を述べておく．$s-t$ パスのリスクは他の $s-t$ パスと交差することによって生じる．したがって，図 7 のように，すべてのパスが他のパスとは交差しない 2 端子ネットワークでは，パスのリスクは発生しない．図 8 の 2 端子ネットワークでは他のパスと 1 回だけ交差するパスが存在するが，この場合も，最大流・最小カット定理 [6] から，どのパスもリスクが 0 であることが分かる．問題となるのは，他の 2 本以上のパスと交差するようなパスが存在する場合である．図 9 はパス $sabt$ は sat と sbt と交差しており，各辺の容量によってパスにリスクが生じる可能性がある．本稿では，任意の点と s, t 間にパスが存在すると仮定しているので，$u, v \in V - \{s, t\}$ に対して $u-v$ パスまたは $v-u$ パスが存在すれば，図 9 におけるパス $sabt$ のように他の 2 本以上のパスと交差する可能性が

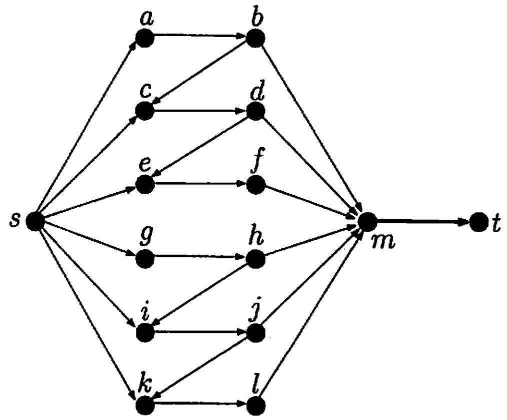

図 6. 分解する必要のあるネットワーク
(mt 辺の容量は 4, 残りの辺の容量は 1)

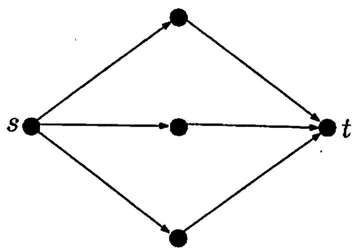

図 7. パスが 0 回交差

あることになり, パスのリスクが生じる可能性がある. したがって, 任意の 2 点間にパスが存在するような部分ネットワークに分解すれば良いので, 上記 2 のように 2 端子ネットワークを分解している.

パスのリスクの定義から以下のことがいえる.

定理 1 任意の 2 端子ネットワークにおいて, 任意の $s-t$ パスのリスクが 0 になることが信頼性が 1 であるための必要条件である.

証明 パスのリスクの定義から明らかである. □

各辺の容量が 1 の 2 端子ネットワークに限定すると以下のことがいえる.

定理 2 容量が 1 の 2 端子ネットワークにおいて, 任意の $s-t$ パスのリスクが 0 であることは信頼性が 1 になるための必要十分条件である.

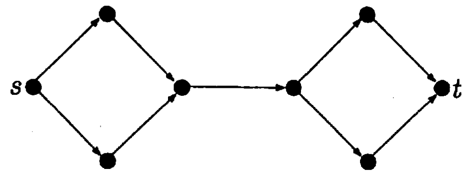

図 8. パスが 1 回交差

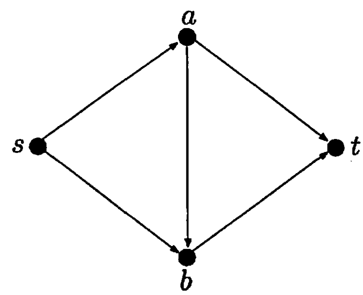

図 9. パスが 2 回交差

証明 各辺の容量が 1 のため, 最大流と最小極大流はともに辺素パスによって構成される. これより, もし信頼性が 1 でないならば, 最大流を構成している辺素パスのうち少なくても 2 本と辺を共有するパスが最小極大流を構成するパスに含まれる. したがって, 上記の定理が成り立つ. □

このパスのリスクにより, 最小極大流を求める発見的なアルゴリズムを構成することができる. この発見的なアルゴリズムを以下で述べる.

1. $\|\xi\| := 0$
2. 2 端子ネットワークにおけるすべてのパスのリスクを算出する.
3. リスクの値が最も大きい ξ_p を選び, $\xi := \xi + \xi_p$ とする.
4. ξ に関する残余ネットワーク N' が $s-t$ パスをもつならば 2 端子ネットワークを N' として 2 へ, もたないならば ξ は極大流なので ξ を出力する.

これは, パスにリスクがあるもので 2 端子流を構成しようということである.

点数を n, 辺数を m, パスの数を P としたとき, リスクを算出する計算時間は, パスを列挙する時間が $O(Pm+n+m)$[9], 最大流を求めるアルゴリズムが $O(n^2\sqrt{m})$ 時間[1] [2], なので, $O(Pn^2m^{3/2}+n^3m^{1/2}+n^2m^{3/2})$ である. これを極大流になるまで繰り返すので, このアルゴリズムの計算時間は, $O(P^2n^2m^{5/2}+n^4m^{1/2}+n^2m^{5/2})$ となる.

5 まとめ

本研究では, 2 端子ネットワークにおける最小極大流の性質を $s-t$ パスのリスクを用いて考察した. 今後の課題は, 任意の 2 端子ネットワークに対して信頼性が 1 であるための十分条件を示すことが挙げられる. そして, 本稿で定式化したパスのリスクを用いると, 最小極大流を求める発見的なアルゴリズムが構成できる. この発見的なアルゴリズムを実装し, パスのリスクの性能を評価ためにこのアルゴリズムの近似率を実験的に評価すること, 理論的に近似比が求められるアルゴリズムの構築などが挙げられる.

謝辞 本研究の一部は 21 世紀 COE プログラム中央大学研究拠点「電子社会の信頼性向上と情報セキュリティ」と科学研究費補助金の援助を受けて行なったものである.

参考文献

[1] M. R. Garey and D. S. Johnson, Computers and Intractability: AGuide to the Theory of NP–Completeness, Freeman, 1979.

[2] A. V. Goldberg and R. E. Tarjan, A new approach to the maximum flow problem, Journal of the ACM, Vol. 35, pp.921–940, 1988.

[3] M. Iri, An Essay in the Theory of Uncontrollable Flows and Congestion, Technical Report on Information and System Engineering 9–3, Department and System Engineering, Faculty of Science and Engineering, Chuo University, 1994.

[4] M. Iri, Network flow – theory and applications with practical impact, System Modelling and Optimization, pp. 24–36, 1996.

[5] M. Iri, Theory of Uncontrollable Flows – A New Type of Network –, Flow Theory as Model for the 21st Century of Multiple Values, Computers Math. Applic. Vol. 35, No. 10, pp. 107–123, 1998.

[6] 伊理正夫, 藤重悟, 大山達雄, グラフ・ネットワーク・マトロイド, 講座・数理計画法 7, 産業図書, 2005.

[7] 松井知己, 制御不能流判定問題の NP–完全性について, 1995 年度日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会予稿集, 2–D–1, pp. 226–227, 1995.

[8] T. Matsui, Is a given flow uncontrollable?, IEICE Transactions Fundamentals, Vol. E79–A, No. 4, pp. 448–451, 1996.

[9] R. C. Read and R. E. Tarjan, Bounds on backtrack algorithms for listing cycles, paths, and spanning trees, Networks, Vol. 5, pp. 237–252, 1975.

[10] J. Shi and Y. Yamamoto, A Global Optimization Method for Minimum Maximal Flow Problem, Acta Mathematica Vientnamica Vol. 22, No. 1, pp. 271–287, 1997.

[11] 山口雅弘, 制御不能流に対する容量付きネットワークの特性, 中央大学大学院理工学研究科情報工学専攻修士論文, 1998.

[12] Y. Yamamoto and D. Zenke, Cut and Split Method for the Minimum Maximal Flow Problem, Pacific Journal of Optimization 1, pp. 387–404, 2005.

[13] Y. Yamamoto and D. Zenke, Outer approximation method for minimum maximal flow problem, Discussion paper 1115, Institute of Policy and Planning Science, Tsukuba University, 2005.

[1] 本稿では, Goldgerg–Tarjan のアルゴリズムを使ったが, 最大流を求める多項式時間アルゴリズムであれば何でも良い.