

凸包を用いた戦略型2人ゲームの ナッシュ均衡点を求めるアルゴリズム

石井 宏幸

山田 敏規

〒338-8570 埼玉県さいたま市桜区下大久保 255
埼玉大学 大学院理工学研究科 数理電子情報部門
E-mail: {yamada, hiroyuki}@pd.ics.saitama-u.ac.jp

要旨: 戦略型 N 人非協力ゲームのナッシュ均衡点は常に存在することが知られている。しかしながら、 $N = 2$ のときでさえ、ナッシュ均衡点を多項式時間で求めることは未解決である。小文では、ユークリッド空間における凸包を求めるアルゴリズムを利用して、戦略型2人非協力ゲームのナッシュ均衡点を求めるアルゴリズムを提案する。提案アルゴリズムの時間計算量は、一方のプレイヤーの行動の種類が定数であるときには多項式時間である。

Algorithm for Finding a Nash Equilibrium of a Two-Player Game in the Strategic Form using Convex Hull

Hiroyuki Ishii

Toshinori Yamada

Shimo-Okubo 255, Sakura-ku, Saitama 338-8570, Japan
Division of Mathematics, Electronics and Informatics
Graduate School of Science and Engineering
Saitama University

Abstract: It is known that there is always a Nash equilibrium of a N -player non-cooperative game in the strategic form. However, it is open to find it in a polynomial time even when $N = 2$. This paper presents an algorithm for finding a Nash equilibrium of a two-player non-cooperative game in the strategic form using an algorithm for a convex hull in the Euclid space, and the proposed algorithm works in a polynomial time when the number of actions of one player is constant.

1 序論

ゲーム理論は、合理的行動についての一般的な理論として von Neumann と Morgenstern [13] によって確立されて以来、主に経済学の分野で発展してきた。しかしながら近年、ゲーム理論の研究は計算機科学の分野においても盛んに行われてきている。Papadimitriou は [8, 7] において、計算機科学の分野において解決されるべきいくつかのゲーム理論的な問題を提起した。これらの問題の一つに、戦略型 (非協力) ゲームのナッシュ均衡点を求めるための多項式時間アルゴリズムの開発がある。

戦略型 N 人ゲームは、 $1, 2, \dots, N$ で番号付けられた N 人のプレイヤーと、各プレイヤー i ($i = 1, 2, \dots, N$) が取ることのできる行動の集合 S_i 、各プレイヤー i の

利得関数 $u_i : S_1 \times S_2 \times \dots \times S_N \rightarrow \mathbb{R}$ によって定義される。ここで、 \mathbb{R} は実数集合を表す。また、任意の $s_i \in S_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) に対して、

$$\sum_{i=1}^N u_i(s_1, s_2, \dots, s_N) = 0$$

であるような戦略型 N 人ゲームを戦略型 N 人ゼロ和ゲームと呼ぶ。次の条件を満たす戦略型ゲームは対称的であると言われる：

- $S_1 = S_2 = \dots = S_N (= S$ とおく);
- 任意のプレイヤー i の利得関数 u_i を、同一の関数

$f: S^N \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて

$$\begin{aligned} u_i(s_1, \dots, s_N) \\ = f(s_i, s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_N) \end{aligned}$$

と表すことが出来る；

- $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ は x_2, \dots, x_N に関して対称である。

各プレイヤー i は、戦略として S_i から取るべき行動を決定的もしくは確率的に選ぶことが出来る。行動を決定的に選ぶ戦略を純戦略、確率的に選ぶ戦略を混合戦略と呼ぶ。プレイヤー i の混合戦略は S_i 上の確率分布 p_i として表現することが出来る。このとき、プレイヤー i の期待利得は

$$\begin{aligned} u_i(p_1, \dots, p_N) \\ = \sum_{s_1 \in S_1} \dots \sum_{s_N \in S_N} p_1(s_1) \dots p_N(s_N) u_i(s_1, \dots, s_N) \end{aligned}$$

と表される。このとき、戦略型 N 人ゲームのナッシュ均衡点は次の条件を満たす混合戦略の組 $(p_1^*, p_2^*, \dots, p_N^*)$ である [6] : 任意の $i = 1, 2, \dots, N$ とプレイヤー i の任意の混合戦略 p_i に対して

$$u_i(p_1^*, \dots, p_i^*, \dots, p_N^*) \geq u_i(p_i, \dots, p_i^*, \dots, p_N^*)$$

が成り立つ。すなわち、ナッシュ均衡点とは、他のプレイヤーが戦略を変更しない限り、自分が戦略を変更しても利得が増えることのない戦略の組のことである。任意の戦略型ゲームに対してナッシュ均衡点が存在することは、[6]において Nash 自身によって証明されている。しかしながら、この証明は Brouwer の不動点定理 [1] (もしくは角谷の不動点定理 [4]) を用いているために非構成的であり、ナッシュ均衡点を求める手法を与えない。一方、与えられた戦略型ゲームが少なくとも 2 つのナッシュ均衡点を持つか否かを判定する問題は、戦略型 2 人対称的ゲームでさえも NP-完全であることが Conitzer と Sandholm [2] によって示されている。

これまで、戦略型ゲームのナッシュ均衡点を求める様々なアルゴリズムが提案されている。Lemke と Howson [5] は 2 人ゲームのナッシュ均衡点を求めるアルゴリズムを提案している。また、van der Laan, Talman, van der Heyden [12] や Porter, Nudelman, Shoham [10], Govindan と Wilson [3] は戦略型 N 人ゲームのナッシュ均衡点を求めるアルゴリズムを提案している。しかしながら、これらのアルゴリズムは全て指数時間アルゴリズムであり、 $N = 2$ の場合でさえ、ナッシュ均衡点が多項式時間で求められるか否かは未解決である。

一方、von Neumann と Morgenstern [13] は、戦略型 2 人ゼロ和ゲームのナッシュ均衡点を求める問題が線形計画問題を解くことと同値であることを示すことによって、ナッシュ均衡点が多項式時間で求めることが出来ることを示した。Papadimitriou と Roughgarden [9] は、選択できる行動の数が $O(\log N / \log \log N)$ である戦略型 N 人対称的ゲームのナッシュ均衡点を求める多項式時間アルゴリズムを示した。

本研究では、凸包を解くアルゴリズムを用いることによって、戦略型 2 人ゲームのナッシュ均衡点を求めるアルゴリズムを提案する。提案アルゴリズムは、一方のプレイヤーの選択できる行動の数が定数であるとき、多項式時間で動くことも示す。

2 双行列ゲーム

2.1 双行列ゲーム

任意の戦略型 2 人ゲームを考える。 $|S_1| = m, |S_2| = n$ であるならば、一般性を失うことなく $S_1 = \{1, 2, \dots, m\}$, $S_2 = \{1, 2, \dots, n\}$ とおくことが出来る。プレイヤー 1 が行動 $i \in S_1$ を、プレイヤー 2 が行動 $j \in S_2$ を選択したときのプレイヤー 1 と 2 の利得 $u_1(i, j), u_2(i, j)$ を (i, j) 成分とする行列をそれぞれ A, B とすると、戦略型 2 人ゲームは 2 つの $m \times n$ 行列 A, B で表すことが出来る。このことから、戦略型 2 人ゲームは双行列ゲームとも呼ばれ、 (A, B) で表される。 A, B が $m \times n$ 行列であるならば、 (A, B) は $m \times n$ 双行列ゲームと呼ばれる。

2.2 混合戦略と期待利得

各プレイヤーが行動を決定的に選ぶ戦略を純戦略と呼び、確率的に選ぶ戦略を混合戦略と呼ぶ。任意の正の整数 n に対して、

$$P_n = \{[p_1, p_2, \dots, p_n]^T : \forall i (0 \leq p_i \leq 1), \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$$

とおくと、 $m \times n$ 双行列ゲーム (A, B) における、プレイヤー 1 と 2 の混合戦略の集合はそれぞれ P_m と P_n である。ここで、 p^T は p の転置を表す。プレイヤー 1 と 2 がそれぞれ $p \in P_m$ と $q \in P_n$ を混合戦略として選んだとき、プレイヤー 1 と 2 の期待利得はそれぞれ

$$u_1(p, q) = p^T A q \quad u_2(p, q) = p^T B q$$

で表される。

2.3 最適応答とナッシュ均衡点

相手のプレイヤーのある戦略に対して、自分の利得が最大となるような戦略を最適応答と呼ぶ。形式的には、 $q' \in P_n [p' \in P_m]$ が与えられたとき、

$$u_1(p^*, q') = \max_{p \in P_m} u_1(p, q')$$

$$(u_2(p', q^*) = \max_{q \in P_n} u_2(p', q))$$

を満たす戦略 $p^* \in P_m [q^* \in P_n]$ を $q' \in P_n [p' \in P_m]$ に対するプレイヤー 1 [プレイヤー 2] の最適応答と呼ぶ。

双行列ゲーム (A, B) のナッシュ均衡点は、互いに最適応答であるような戦略の対 (p^*, q^*) である。すなわち、

$$u_1(p^*, q^*) = \max_{p \in P_m} u_1(p, q^*)$$

$$u_2(p^*, q^*) = \max_{q \in P_n} u_2(p^*, q)$$

を満たす (p^*, q^*) を双行列ゲーム (A, B) のナッシュ均衡点と呼ぶ。ナッシュ均衡点については以下の定理がよく知られている。

定理 1 [6] 任意の双行列ゲームに対して少なくとも 1 つのナッシュ均衡点が存在する。

2.4 支配戦略

異なる混合戦略 $q, q' \in P_n$ に対して、

$$Bq \leq Bq'$$

が成り立つならば、 q は q' によって支配される、と言われる。また単に q は支配されると言われる。 q の第 j 成分が 1 である単位ベクトル e_j である、すなわち、 q が B の第 j 列 b_j を選ぶ純戦略であるならば、戦略 j は q' によって支配されると言われる。

A の第 j 列を取り除いて得られる行列を $A^{[j]}$ によって表す。任意の混合戦略 $q = [q_1, q_2, \dots, q_{m-1}]^T \in P_{n-1}$ と任意の非負整数 $j \leq n$ に対して、

$$q^{(j)} = [q_1, \dots, q_{j-1}, 0, q_j, \dots, q_{n-1}]$$

とする。

補題 1 (A, B) を $m \times n$ 双行列ゲームとする。また、プレイヤー 2 の戦略 j が $q_j = 0$ である混合戦略 $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \in P_n$ によって支配されるとする。このとき、 (p^*, q^*) が双行列ゲーム $(A^{[j]}, B^{[j]})$ のナッシュ均衡点であるならば、 $(p^*, q_{(j)}^*)$ は双行列ゲーム (A, B) のナッシュ均衡点である。

証明: $(p^*, q_{(j)}^*)$ が (A, B) のナッシュ均衡点ではないと仮定する。 (p^*, q^*) は $(A^{[j]}, B^{[j]})$ のナッシュ均衡点であるので、双行列ゲーム (A, B) において、 p^* は $q_{(j)}^*$ の最適応答である。したがって、 $q_{(j)}^*$ は p^* の最適応答ではない。また、 (p^*, q^*) は $(A^{[j]}, B^{[j]})$ のナッシュ均衡点であるので、 (A, B) において q' が p^* の最適応答であるならば、 q' の第 j 成分 q'_j は正である (さもなければ、

$$p^{*T} B q_{(j)}^* = p^{*T} B^{[j]} q^{*[j]} \geq p^{*T} B^{[j]} q'^{[j]} = p^{*T} B q'$$

であるので、 $q_{(j)}^*$ は p^* の最適応答である)。しかしながら、

$$q'' = q' - q'_j e_j + q'_j q$$

とおくと、 $q'' \in P_n$ であり、 q'' の第 j 成分は 0 であるので、

$$B q' = B q'' + q_j (B e_j - B q) \leq B q'' \text{ と}$$

$$p^{*T} B q'' = p^{*T} B^{[j]} q''^{[j]} \leq p^{*T} B^{[j]} q^* = p^{*T} B q_{(j)}^*$$

から

$$p^{*T} B q_{(j)}^* < p^{*T} B q' \leq p^{*T} B q'' \leq p^{*T} B q_{(j)}^*$$

となり矛盾である。

(証明終)

定理 2 (A, B) を $m \times n$ 双行列ゲームとする。また、プレイヤー 2 の戦略 j が支配されているとする。このとき、 (p^*, q^*) が双行列ゲーム $(A^{[j]}, B^{[j]})$ のナッシュ均衡点であるならば、 $(p^*, q_{(j)}^*)$ は双行列ゲーム (A, B) のナッシュ均衡点である。

証明: プレイヤー 2 の戦略 j が $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]$ に支配されているとする。すなわち、

$$B e_j \leq B q$$

とする。もし $q_j = 0$ であるならば補題 1 より題意が成立する。そこで、 $q_j \neq 0$ と仮定する。このとき、 $q_j < 1$ であるので、

$$q' = \frac{1}{1 - q_j} (q - q_j e_j)$$

とおく。このとき、単純な計算により $q' \in P_n$ である。また、

$$B q' = \frac{1}{1 - q_j} (B q - q_j B e_j)$$

$$\geq \frac{1}{1 - q_j} (B e_j - q_j B e_j) = B e_j$$

であるので、戦略 j は q' に支配されている。また、 q' の第 j 成分は 0 であるので、補題 1 より題意が成立する。

(証明終)

3 ナッシュ均衡点を求めるアルゴリズム

3.1 凸包

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ を d 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^d 上の k 個の点とする. ある $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]^T \in P_k$ に対して

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}_i$$

であるならば, \mathbf{x} は $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ の凸結合と呼ばれる. 同様に, $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ を満たす $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ に対して

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}_i$$

であるならば, \mathbf{x} は $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ のアフィン結合と呼ばれる.

任意の $L \subset \mathbb{R}^d$ に対して, L の点の凸結合 [アフィン結合] から成る集合を L の凸包 [アフィン包] と呼ぶ. L の凸包の次元は L のアフィン包の次元と定義する. 多面体とは有限集合 L の凸包である.

$U \subset \mathbb{R}^d$ を多面体とする. 全ての $\mathbf{x} \in U$ が線形不等式 $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq c_0$ ($\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d, c_0 \in \mathbb{R}$) を満たすならば, $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq c_0$ は U に対して妥当であると言われる. $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq c_0$ が U に対して妥当であり, $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = c_0$ と U の共通部分が非空であるとき, $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = c_0$ を U の支持超平面と呼ぶ. このとき, U と支持超平面 $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = c_0$ の共通部分, すなわち

$$F = \{\mathbf{x} \in U : \mathbf{c}^T \mathbf{x} = c_0\}$$

を U の面 (face) と呼ぶ. U が d 次元多面体であるとき, U の $(d-1)$ 次元の面をファセット (facet) と, 0 次元の面を頂点 (vertex) と呼ぶ.

定理 3 [14] U を多面体とする. U の任意の面 $F \neq U$ に対して, F を含むファセット F' が存在する.

定理 4 [14] $L \subset \mathbb{R}^d$ とする. $\mathbf{x} \in L$ が L の凸包の頂点であるための必要十分条件は, \mathbf{x} が $L - \{\mathbf{x}\}$ の凸結合でないことである.

定理 5 [11] N 個の頂点から成る d 次元多面体のファセットの個数の最大値 $F(d, N)$ は

$$F(d, N) = \begin{cases} \frac{2N}{d} \cdot \binom{N - (d/2) - 1}{(d/2) - 1} & d \text{ が偶数} \\ 2 \cdot \binom{N - \lfloor d/2 \rfloor - 1}{\lfloor d/2 \rfloor} & d \text{ が奇数} \end{cases}$$

である.

与えられた $L \subset \mathbb{R}^d$ に対して, 凸包を求める方法は [11] などで知られている. ここで, L の凸包を求めるアルゴリズムは全てのファセットを出力するものとする. ここで, 各ファセットはそれが含む頂点の集合によって表現される.

定理 6 $L \subset \mathbb{R}^d, n = |L|$ とする. $d = 2, 3$ のとき, L の凸包は $O(n \log n)$ 時間で計算可能である. また, $d > 3$ であるならば, L の凸包は $O(n^{\lfloor d/2 \rfloor + 1})$ 時間で計算可能である.

3.2 凸包とナッシュ均衡点

ナッシュ均衡点に関して以下の定理はよく知られている.

定理 7 $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ を $m \times n$ 双行列ゲーム (A, B) のナッシュ均衡点とする. このとき, 任意の実数 c, d に対して, $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ は $m \times n$ 双行列ゲーム $(A + cI_{m,n}, B + dI_{m,n})$ のナッシュ均衡点でもある. ここで, $I_{m,n}$ は全ての成分が 1 である $m \times n$ 行列である.

定理 7 より, 利得行列 A, B の各成分は正であるとして一般性を失わない. 列プレイヤーの利得行列 B の n 個の列 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ から成る集合を $C(B)$ で表す. 任意の $\mathbf{b} \in C(B)$ と任意の $T \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ に対して, $i \notin T$ であるならば \mathbf{b} の第 i 成分を 0 とすることによって得られるベクトルを $(\mathbf{b}|T)$ で表す. このとき,

$$E(C(B)) = \{(\mathbf{b}|T) : \mathbf{b} \in C(B), T \subseteq \{1, 2, \dots, m\}\}$$

と定義する. $E(C(B))$ の凸包を $\text{conv}(B)$ で, $C(B)$ に含まれる $\text{conv}(B)$ の頂点を $\text{ver}(B)$ で表す.

補題 2 $C(B)$ の点を含む $\text{conv}(B)$ の任意のファセットの法線ベクトルは, 成分が全て 0 以上もしくは全て 0 以下である.

証明: $c_i > 0$ かつ $c_j < 0$ である法線ベクトル $\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_m]^T$ を持つ, $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T \in C(B)$ を含む $\text{conv}(B)$ のファセットが存在すると仮定する. このとき, $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}^T \mathbf{b}$ は $\text{conv}(B)$ の支持超平面である. しかしながら, $\overline{W}_k = \{1, 2, \dots, m\} - \{k\}$ とおくと, $b_i, b_j > 0$ より

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T (\mathbf{b}|\overline{W}_i) &= \mathbf{c}^T \mathbf{b} - c_i b_i < \mathbf{c}^T \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^T (\mathbf{b}|\overline{W}_j) &= \mathbf{c}^T \mathbf{b} - c_j b_j > \mathbf{c}^T \mathbf{b} \end{aligned}$$

であるので, $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}^T \mathbf{b}$ が支持超平面であることに反する. よって, 補題が成立する. (証明終)

補題 3 任意の $b \in C(b)$ に対して, b が支配されないならば $b \in \text{ver}(B)$ である.

証明: $b \notin \text{ver}(B)$ と仮定する. このとき, 以下の3つの条件を満たす関数 $\lambda: E(C(B)) - \{b\} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する.

1. 任意の $x \in E(C(B)) - \{b\}$ に対して $0 \leq \lambda(x) \leq 1$;
2.
$$\sum_{x \in E(C(B)) - \{b\}} \lambda(x) = 1$$
;
3.
$$b = \sum_{x \in E(C(B)) - \{b\}} \lambda(x) \cdot x$$

条件 3 より,

$$\begin{aligned} b &= \sum_{x \in E(\{b\}) - \{b\}} \lambda(x) \cdot x + \sum_{x \in E(C(B)) - \{b\}} \lambda(x) \cdot x \\ &\leq \sum_{x \in E(\{b\}) - \{b\}} \lambda(x) \cdot b + \sum_{x \in C(B) - \{b\}} x \sum_{y \in E(\{x\})} \lambda(y) \end{aligned}$$

である. ここで,

$$a = \sum_{x \in E(\{b\}) - \{b\}} \lambda(x)$$

とし, 任意の $z \in C(B) - \{b\}$ に対して

$$\gamma_z = \sum_{y \in E(\{z\})} \lambda(y)$$

とする. このとき, 条件 2 より

$$\sum_{x \in E(C(B)) - \{b\}} \lambda(x) = a + \sum_{x \in C(B) - \{b\}} \gamma_x = 1$$

すなわち,

$$\sum_{x \in C(B) - \{b\}} \gamma_x = 1 - a$$

となる. よって,

$$b \leq ab + \sum_{x \in C(B) - \{b\}} \gamma_x x$$

すなわち,

$$\begin{aligned} (1-a)b &\leq \sum_{x \in C(B) - \{b\}} \gamma_x x \\ b &\leq \sum_{x \in C(B) - \{b\}} \frac{\gamma_x}{1-a} \cdot x \end{aligned}$$

となる. ここで, $a < 1$ であることに注意せよ. したがって,

$$\frac{\gamma_x}{1-a} \geq 0 \quad \sum_{x \in C(B) - \{b\}} \frac{\gamma_x}{1-a} = 1$$

であるので b は支配されている.

(証明終)

補題 4 任意の $b \in C(B)$ に対して, b が支配されるならば $b \notin \text{ver}(B)$ である.

証明: $b = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T$ が支配されていると仮定する. このとき, 以下の2つの条件を満たす $\lambda'_x \geq 0$, ($x \in C(B) - \{b\}$) が存在する.

1.
$$b \leq \sum_{x \in C(B) - \{b\}} \lambda'_x x$$
;
2.
$$\sum_{x \in C(B) - \{b\}} \lambda'_x = 1$$

ここで,

$$z = [z_1, z_2, \dots, z_m]^T = \sum_{x \in C(B) - \{b\}} \lambda'_x x$$

とおく. 一般性を失うことなく,

$$(0 \leq) \frac{b_1}{z_1} \leq \frac{b_2}{z_2} \leq \dots \leq \frac{b_m}{z_m} (\leq 1)$$

と仮定する. 任意の正の整数 $i \leq m$ に対して $\tau_i = b_i/z_i$, $T_i = \{i, i+1, \dots, m\}$ とおく. このとき

$$b = \sum_{i=1}^{m+1} (\tau_i - \tau_{i-1})(z|T_i)$$

である. ただし, $\tau_0 = 0, \tau_{m+1} = 1, T_{m+1} = \emptyset$ である. ここで, $\tau_i - \tau_{i-1} \geq 0$ かつ $\sum_{i=1}^{m+1} (\tau_i - \tau_{i-1}) = 1$ であることに注意せよ. したがって,

$$\begin{aligned} b &= \sum_{i=1}^{m+1} (\tau_i - \tau_{i-1})(z|T_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m+1} (\tau_i - \tau_{i-1}) \sum_{x \in C(B) - \{b\}} \lambda'_x(x|T_i) \end{aligned}$$

であり,

$$\sum_{i=1}^{m+1} (\tau_i - \tau_{i-1}) \sum_{x \in C(B) - \{b\}} \lambda'_x = 1$$

であるので, $b \notin \text{ver}(B)$ である.

(証明終)

補題 3 と 4 より, 以下の定理が得られる.

定理 8 任意の $b \in C(B)$ に対して, b が支配されないための必要十分条件は, $b \in \text{ver}(B)$ であることである.

定理 9 任意の双行列ゲーム (A, B) に対して, p^* が $\text{conv}(B)$ のファセットの法線ベクトルであるようなナッシュ均衡点 (p^*, q^*) が存在する.

証明： (p^*, q^*) が (A, B) のナッシュ均衡点であり、 p^* が $\text{conv}(B)$ のどのファセットの法線ベクトルでもないと仮定する。 $d = \max\{p^{*T}b : b \in C(B)\}$ とおく。このとき、 $p^{*T}x = d$ は $\text{conv}(B)$ の支持超平面であり、これらの共通部分を F とおく。 F は $\text{conv}(B)$ の面であるので、定理??より F を含む $\text{conv}(B)$ のファセット F' が存在する。 F' の法線ベクトルを p' とおく。このとき、 (p', q^*) が (A, B) のナッシュ均衡点であることを示す。

q^* は p' に対する最適応答であることは明らかである。次に、 p' が q^* に対する最適応答であることを示す。以下の2つの場合が存在する。

(1) Aq^* の全ての成分が等しい場合：このとき、任意の $p \in P_m$ が q^* に対する最適応答となる。

(2) Aq^* が異なる成分を含む場合： Aq^* の第 i 成分が最大値であるような、 i から成る集合を W とする。 p^* は q^* に対する最適応答であるので、 p^* の第 i 成分 p_i^* は、 $i \notin W$ であるならば $p_i^* = 0$ である。したがって、任意の F 上の点 $b \in C(B)$ に対して $p^{*T}b = p^{*T}(b|W)$ であるので、 $(b|W)$ も F 上の点である。 F' は F を含むので、 $p'^Tb = p'^T(b|W)$ である。すなわち、

$$p'^Tb - p'^T(b|W) = \sum_{i \notin W} p'_i b_i = 0$$

である。ここで、 p'_i と b_i はそれぞれ p' と b の第 i 成分である。補題2より $p'_i \geq 0$ であり、 $b_i > 0$ であるので、全ての $i \notin W$ に対して $p'_i = 0$ である。よって、 p' は q^* の最適応答である。

以上のことから、 (p', q^*) は (A, B) のナッシュ均衡点であり、定理を満たす。 (証明終)

3.3 アルゴリズムと計算量

$C(B)$ の点を含む $\text{conv}(B)$ の任意のファセット F に対して、

$$\text{col}_B(F) = \{j : b_j \in \text{ver}(B) \cap F\}$$

とする。ここで、 b_j は B の第 j 列目を表す。このとき、

$$P_n(F) = \{q \in P_n : q_j = 0 \text{ for } \forall j \notin \text{col}_B(F)\}$$

と定義する。ここで、 q_j は p の第 j 成分である。

補題5 F を $C(B)$ の点を含む $\text{conv}(B)$ の任意のファセットとし、 $p \geq 0$ を F の法線ベクトルとする。このとき、任意の $q \in P_n(F)$ は p の最適応答である。

証明： F はファセットであるので、任意の $x \in \text{conv}(B)$ と任意の $y \in F$ に対して、 $p^T x \leq p^T y$ である。したがって、

任意の $j \in \text{col}_B(F)$ に対して $b_j \in F$ であるので、 $p^T x \leq p^T b_j$ である。 $q' \in P_n$ とおくと、 $Bq' \in \text{conv}(B)$ であるので、

$$\begin{aligned} p^T Bq &= \sum_{j=1}^n q_j p^T b_j = \sum_{j \in \text{col}_B(F)} q_j p^T b_j \\ &\geq \sum_{j \in \text{col}_B(F)} q_j p^T Bq' = p^T Bq' \end{aligned}$$

である。すなわち、 q は p に対する最適応答である。(証明終)

定理2, 8, 9と補題5より、双行列ゲーム (A, B) のナッシュ均衡点を求める以下のアルゴリズムが得られる。ここで、 i_m は全ての成分が1である m 次元列ベクトルを表す。

algorithm Nash(A, B)

Step 0: $c \leftarrow \min\{a_{ij}\}, d \leftarrow \min\{b_{ij}\}$ とせよ。

Step 1:

$$c \leq 0 \Rightarrow A \leftarrow A + (1 - c)I_{m,n},$$

$$d \leq 0 \Rightarrow B \leftarrow B + (1 - d)I_{m,n} \text{ とせよ。}$$

Step 2: $\text{conv}(B)$ の各ファセット F に対して以下を実行せよ。

Step 2.1: F の単位法線ベクトル p^* を求めよ。

Step 2.2: 以下を全て満たす q^* が存在するならば、 (p^*, q^*) を出力して終了。

$$p^{*T} Aq^* = u$$

$$Aq^* \leq ui_m$$

$$q^* \in P_n(F)$$

図1: アルゴリズム Nash(A, B)

定理10 アルゴリズム Nash(A, B) は双行列ゲーム (A, B) のナッシュ均衡点を求める。

証明：定理2, 8, 9と補題5より、次の2つの条件を満たす (A, B) のナッシュ均衡点 (p^*, q^*) が存在する。

- p^* が $\text{conv}(B)$ の、あるファセット F の法線ベクトルである；
- $q^* \in P_n(F)$ 。

したがって、アルゴリズム $\text{Nash}(A, B)$ は双行列ゲーム (A, B) のナッシュ均衡点を求める。 (証明終)

定理 11 m が定数であるならば、アルゴリズム $\text{Nash}(A, B)$ は多項式時間アルゴリズムである。

証明: m が定数であるので、定理 6 より多項式時間で凸包を求めることが出来る。また、定理 5 より、ファセットの数は n の多項式であるので、アルゴリズム $\text{Nash}(A, B)$ は多項式時間で動く。 (証明終)

$m = 2$ のとき、任意のファセット $F \in \text{conv}(B)$ に対して $|\text{col}_B(F)| \leq 2$ である。したがって、 $\text{Nash}(A, B)$ の Step2.2 は定数時間で計算可能である。よって、定理 6 から以下の定理を得る。

定理 12 $m = 2$ であるならば、アルゴリズム $\text{Nash}(A, B)$ は $O(n \log n)$ 時間で動く。

参考文献

- [1] L.E.J. Brouwer. Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, Vol. Vol.71, pp. 97–115, 1912.
- [2] V. Conitzer and T. Sandholm. Complexity results about Nash equilibria. In *Proc. International Joint Conferences on Artificial Intelligence(IJCAI)*, pp. 765–771, 2003.
- [3] S. Govindan and R. Wilson. A global Newton method to compute Nash equilibria. *Journal of Economic Theory*, Vol. 110, pp. 65–86, 2003.
- [4] S. Kakutani. A generalization of Brouwer's fixed point theorem. *Duke Mathematical Journal*, Vol. 8, pp. 457–459, 1941.
- [5] L.E. Lemke and J.T. Howson. Equilibrium points of bimatrix games. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, Vol. Vol.12, pp. pages 413–423, 1962.
- [6] John Nash. Equilibrium points in N -person games. *Proc. National Academy of Sciences U.S.A.*, Vol. 36, pp. 48–49, 1950.
- [7] Christos H. Papadimitriou. Algorithms, games, and the Internet. In *Proc. ACM Symposium on Theory of Computing (STOC'01)*, pp. 749–753, 2001.
- [8] Christos H. Papadimitriou. Game theory and mathematical economics: A theoretical computer scientist's introduction. In *Proc. 42nd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'01)*, pp. 4–8, 2001.
- [9] Christos H. Papadimitriou and Tim Roughgarden. Computing equilibria in multi-player games. In *Proc. ACM Symposium on Discrete Algorithms(SODA 06)*, pp. 82–91, 2006.
- [10] Ryan Porter, Eugene Nudelman, and Yoav Shoham. Simple search methods for finding a Nash equilibrium. In *Proc. 19th National Conference on Artificial Intelligence(AAAI-04)*, pp. 664–669, 2004.
- [11] Franco P. Preparata and Michael Ian Shamos. *Computational Geometry: An Introduction. Texts and Monographs in Computer Science*. Springer-Verlag. 浅野孝夫・浅野哲夫訳, 計算幾何学入門, 総研出版(星雲社), 1992.
- [12] G. van der Laan, A. Talman, and L. van der Heyden. Simplicial variable dimension algorithms for solving the nonlinear complementarity problem on a product of unit simplices using a general labelling. *Mathematics of Operations Research*, Vol.12, No. No.3, pp. 377–397, 1987.
- [13] John von Neumann and Oskar Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Wiley, 1944.
- [14] Guenter M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*. Springer, 20th edition, 2006. 凸多面体の数学, 八森正泰, 岡本吉央訳, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2003.