

## Dihedral Butterfly とその Cayley グラフ表現

大西春章<sup>a</sup> 田中勇樹<sup>b</sup> 柴田幸夫<sup>a</sup>

<sup>a</sup> 群馬大学工学部情報工学科

<sup>b</sup> 群馬大学アドバンスド・テクノロジー高度研究センター  
〒376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1

**概要:** 本稿では相互結合網の 1 つである Butterfly を拡張する新しい方法を提案する。Butterfly は 2 進から  $d$  進へと一般化されてきたが、本稿では符号付きであるという条件を付加した Butterfly を定義し、Butterfly との関連や直径などの基本的な性質を考察した。

更に本研究ではこのダイグラフが Cayley グラフとして表せることを示した。Butterfly は 2 つの巡回群の wreath 積上の Cayley グラフとして表せることが知られているが、本稿で提案するダイグラフは二面体群と巡回群の wreath 積上の Cayley グラフとして表せることを示す。

**Keyword:** Butterfly, Dihedral Butterfly, Cayley グラフ, wreath 積

## Dihedral Butterfly and its Cayley graph representation

Haruaki Onishi<sup>a</sup>, Yuuki Tanaka<sup>b</sup> and Yukio Shibata<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Department of Computer Science, Gunma University

<sup>b</sup>Advanced Technology Research Center, Gunma University  
1-5-1 Tenjin-cho, Kiryu, Gunma 376-8515

**Abstract:** In this paper, we present a new extension of Butterfly which is known as one of the interconnection networks. While Butterfly has been generalized from binary to  $d$ -ary, we add a *sign* to the label of Butterfly, and we study properties of the digraph with this definition.

Furthermore, we show that this digraph can be represented as a Cayley graph. It is well known that Butterfly can be represented as a Cayley graph on wreath product of two cyclic groups[1]. Meanwhile, we prove the digraph presented in this paper can be represented as a Cayley graph on wreath product of the dihedral group and a cyclic group.

**Keyword:** Butterfly, Dihedral Butterfly, Cayley digraph, wreath product

### 1 まえがき

Butterfly は FFT アルゴリズムにおいて重要であるばかりでなく, hypercube, de Bruijn graph, Kautz graph, CCC などと共に並列計算機の相互結合網のトポロジーとしても重要なクラスである。FFT に関しては 2 進だけでなく  $d$  進の Butterfly, 多次元信号処理のための Butterfly などがあり, 多様な

一般化がなされている。

本稿で提案するダイグラフは  $d$  進 Butterfly の拡張であり, これを Dihedral Butterfly と呼ぶ。Butterfly の頂点は文字列と level と呼ばれる数値の組で定義されるが, Dihedral Butterfly もまた文字列と level の組で定義される。Butterfly と異なるのは文字列での各文字が符号を伴い, 隣接関係も符号による条件を加味した点である。符号の付加により表現可能な文字列が増すため頂点数が非常に多くなり,

また Butterfly と類似した性質を持つダイグラフとなる。

本稿ではこのダイグラフに関する基本的な性質を示している。  $d$  進  $n$  桁の Butterfly  $BF(d, n)$  の頂点数が  $nd^n$ , サイズが  $nd^{n+1}$  であるのに対し,  $d$  進  $n$  桁の Dihedral Butterfly の頂点数は  $n(2d)^n$  であり, サイズは  $n(d+1)(2d)^n$  である。 Section 3.2.1 で  $2^n$  (resp.  $d^n$ ) 個の  $d$  進 (resp. 2 進)  $n$  桁の Butterfly を含むこと, また Dihedral Butterfly が  $2d$  進の Butterfly の部分ダイグラフとして考えられることについて述べる。更に Section 3.2.3 では Dihedral Butterfly の直径が  $3n-1$  であることを導き, Section 3.2.4 で Hamiltonian であることを示した。

Dihedral Butterfly が Cayley グラフであることは興味深いことである。2 つの群からある群を導く積である wreath 積を導入することで, Butterfly が 2 つの巡回群の wreath 積群上の Cayley グラフとして表現できることは知られている。Dihedral Butterfly もまた Cayley グラフとして表現でき, このときに基になる群は二面体群と巡回群の wreath 積群である。このことについては Section 4 で述べる。

## 2 諸定義

ダイグラフ  $G$  は頂点集合と頂点の順序対の集合である弧集合により定義される。記号として  $G$  の頂点集合を  $V(G)$ , 弧集合を  $A(G)$ ,  $u$  から  $v$  への弧を  $(u, v)$  と表す。頂点  $u, v$  に対し弧  $(u, v) \in A(G)$  であるとき,  $u$  は  $v$  へ隣接する,  $v$  は  $u$  に隣接されるという。また  $(u, v)$  は  $u$  から接続される,  $v$  へ接続するという。

頂点  $u$  へ接続する弧の数を入次数,  $u$  から接続される弧の数を出次数という。すべての頂点の入次数と出次数が  $d$  であるとき, そのダイグラフは  $d$  正則であるという。

ダイグラフ  $G$  に対して  $V(H) \subseteq V(G)$ ,  $A(H) \subseteq A(G)$  なる  $H$  があるとき,  $H$  は  $G$  の部分ダイグラフであるといい  $H \subseteq G$  と表す。更に  $V(H) = V(G)$  であれば,  $H$  は  $G$  の因子であるという。

また頂点集合  $V(H) \subseteq V(G)$  からなり,  $u, v \in V(H)$  に対して  $(u, v) \in A(G)$  ならば  $(u, v) \in$

$A(H)$  であるとき,  $H$  は  $G$  の誘導部分ダイグラフであるという。

2 つのダイグラフ  $G, H$  に対し,  $V(G)$  から  $V(H)$  への全単射があり, かつこの写像が隣接関係を保存するとき,  $G, H$  は同型であるといい  $G \cong H$  と表す。

ダイグラフ  $G$  に対し,  $V(G)$  から  $V(G)$  への同型写像を  $G$  の自己同型写像と呼ぶ。自己同型写像によって  $G$  の各頂点が  $G$  の任意の頂点に移せる場合,  $G$  は頂点可移であるという。

ダイグラフの頂点  $u$  から始まり  $v$  で終わる頂点の順序列  $u = u_0, u_1, \dots, u_{n-1} = v$  が同一頂点を含まず, 任意の隣り合う頂点  $u_k, u_{k+1}$  ( $0 \leq k \leq n-2$ ) に対し  $(u_k, u_{k+1})$  が存在するとき, これを  $u$  から  $v$  への path と呼ぶ。path に含まれる頂点数を  $n$  とすると path の長さは  $n-1$  であり,  $u$  から  $v$  への path のうち最小の長さを  $u, v$  の距離という。

ダイグラフ  $G$  の任意の 2 頂点間に path が存在するとき,  $G$  は (弱) 連結であるという。更に任意の 2 頂点間に双方向の path が存在するなら,  $G$  は強連結であるという。

ダイグラフ  $G$  の部分ダイグラフのうち, 連結に関して極大なものを  $G$  の成分と呼ぶ。

ダイグラフ  $G$  が強連結であるとき  $G$  に直径を定義できる。直径とは  $G$  上の任意の 2 頂点間の距離のうち最大のもののことである。

cycle とは頂点  $u$  から  $u$  への自明でない path のことであり, ダイグラフのすべての頂点を含む cycle を Hamilton cycle と呼ぶ。

集合  $\Delta$  から生成される群を  $\Gamma$  とする。このとき頂点集合を  $\Gamma$  とし, 隣接関係が  $\Delta$  によって特徴付けられるグラフを Cayley グラフといい,  $\text{Cay}(\Gamma, \Delta)$  と表す。 $\text{Cay}(\Gamma, \Delta)$  の頂点  $x$  から  $y$  への弧が存在するための必要十分条件は, ある  $\alpha \in \Delta$  に対し  $x \cdot \alpha = y$  であることである。

ダイグラフ  $G$  の  $n$  個のコピーを  $nG$  と表す。

集合  $\mathbb{Z}_n = \{0, \dots, (n-1)\}$  は  $n$  を法とする加算の下で群をなし, これを巡回群  $\mathbb{Z}_n$  と呼ぶ。

二面体群の各要素は  $\sigma^a \tau^b$  ( $0 \leq a < n$ ), ( $b = \{0, 1\}$ ) で表され, 生成元  $\sigma, \tau$  は次の関係式を満たす。

$$\sigma^n = e \quad \tau^2 = e \quad \tau\sigma\tau = \sigma^{-1}$$

ここで  $e$  は単位元である。特に断りがない場合,  $\sigma$  は

位数  $n$ ,  $\tau$  は位数 2 の生成元として扱う。

$A, B$  を置換群とする (本論文では  $B = \mathbb{Z}_n$  とする。これは定義を簡潔にするためのものである。一般的な wreath 積の定義は [3] に記載されている)。このとき、

$$\pi = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; \beta),$$

$$\alpha_k \in A (0 \leq k < n), \beta \in B.$$

と表せるすべての要素  $\pi$  からなる集合を **wreath 積群** といい  $A \wr B$  で表す。演算は  $\sigma = (\delta_0, \dots, \delta_{n-1}; \gamma)$  としたとき、

$$\pi\sigma = (\alpha_0\delta_{\beta-1_0}, \dots, \alpha_k\delta_{\beta-1_k}, \dots, \alpha_{n-1}\delta_{\beta-1_{(n-1)}}; \beta\gamma),$$

と定義される。wreath 積群の位数は  $|A|^n|B|$  である。 $n$  を法とする加算を  $\oplus_n$ , 減算を  $\ominus_n$  と表す。

集合  $\Psi_d = \{\pm 0, \dots, \pm(d-1)\}$  を定義する。 $\Psi_d$  の各要素は符号付の文字であり、特に 0 に関しても同様に符号を付ける (従って  $+0 \neq -0$  である)。更に表記として、 $x \in \Psi_d$  に対して  $|x|$  は  $x$  の符号を除いたものを表し、 $\text{sign}(x)$  は  $x$  の符号、また  $-x$  は  $x$  の符号反転 ( $\pm|x| = \mp|x|$  (複号同順) を表す。 $k$  回  $-$  を作用させる演算を  $(-)^k$  と表記する。 $k$  が偶数であれば  $\text{sign}((-)^k x) = \text{sign}(x)$  であり、奇数であれば  $\text{sign}((-)^k x) = \text{sign}(-x)$  である。

Butterfly の定義を下記に示す。

**定義 1**  $d \geq 2, n \geq 1 (d, n \in \mathbb{Z})$  に対して次のように定義されるダイグラフと **Butterfly** と呼び、 $BF(d, n)$  と表す。

$$V(BF(d, n)) = \left\{ (x_{n-1} \cdots x_0, i) \mid \begin{array}{l} x_k \in \mathbb{Z}_d (0 \leq k < n), \\ i \in \mathbb{Z}_n \end{array} \right\},$$

$$A(BF(d, n)) = \left\{ \begin{array}{l} ((x_{n-1} \cdots x_i \cdots x_0, i), \\ (x_{n-1} \cdots x_{i+1} x'_i x_{i-1} \cdots x_0, i \oplus_n 1)) \mid x'_i \in \mathbb{Z}_d \end{array} \right\}.$$

**定理 1 (Annexstein et al. [1])**  $BF(d, n)$  は下記のように定める Cay( $\Gamma, \Delta$ ) として表現可能である。

$$\Gamma = \mathbb{Z}_d \wr \mathbb{Z}_n,$$

$$\Delta = \left\{ (\delta^k, e, \dots, e; 1) \mid \begin{array}{l} e \text{ は } \mathbb{Z}_d \text{ の単位元,} \\ \delta^k (k \in \mathbb{Z}_d) \end{array} \right\}.$$

### 3 Dihedral Butterfly

ここでは論文中で導入するグラフクラス, Dihedral Butterfly に関して定義, 諸性質を述べる。

#### 3.1 定義

Dihedral Butterfly は Butterfly と同様に各頂点を文字列と level の組で定義する。Butterfly と異なる点は文字列の各文字が符号を持つことである。

今後の議論を容易にするため符号列, 絶対値列を定義する。Dihedral Butterfly の各頂点の文字列は符号部と数値部に分けてみることができる。ある頂点を  $(x_{n-1} \cdots x_0, i)$  としたとき、符号列とはその頂点の符号を並べた文字列であり、 $(\text{sign}(x_{n-1}) \cdots \text{sign}(x_0))$  である。また絶対値列とは頂点文字列の符号を除いたもので  $(|x_{n-1}| \cdots |x_0|)$  である。

**定義 2 (Dihedral Butterfly):** 集合  $\Psi_d = \{\pm 0, \pm 1, \dots, \pm(d-1)\}$  としたとき、Dihedral Butterfly  $DBF(d, n)$  は  $d, n \geq 1 (d, n \in \mathbb{Z})$  に対し次のように定義される。

$$V(DBF(d, n)) = \left\{ (x_{n-1} \cdots x_0, i) \mid \begin{array}{l} x_k \in \Psi_d (0 \leq k < n), \\ i \in \mathbb{Z}_n \end{array} \right\},$$

$$A(DBF(d, n)) = \left\{ \begin{array}{l} ((x_{n-1} \cdots x_i \cdots x_0, i), \\ (x_{n-1} \cdots x_{i+1} x'_i x_{i-1} \cdots x_0, i \oplus_n 1)) \mid \begin{array}{l} x'_i = -x_i \text{ or} \\ x'_i = \text{sign}(x_i)|x_i| \\ \forall x \in \Psi_d \end{array} \end{array} \right\}.$$

定義から  $DBF(d, n)$  は  $d+1$  正則であり、頂点数  $n(2d)^n$ , サイズ  $n(d+1)(2d)^n$  である。

#### 3.2 Dihedral Butterfly の性質

##### 3.2.1 Butterfly との包含関係

$DBF(d, n)$  は Butterfly と多くの部分で関連性を持つダイグラフである。まず次の命題が成り立つ。

**命題 1**  $DBF(1, n) \cong BF(2, n)$

**証明**  $\Psi_1 = \{\pm 0\}$  であることから、 $+0, -0$  をそれぞれ  $1, 0$  に対応させることで同型を示せる。□

Butterfly との関係の 1 つとして  $2^n$  個の  $BF(d, n)$  を部分グラフとして含むことが挙げられる。

**定理 2**  $DBF(d, n)$  は  $2^n BF(d, n)$  を因子として含む。

証明 DBF( $d, n$ ) の部分グラフとして以下に定義するグラフ  $G$  を考える。

$$V(G) = V(DBF(d, n)),$$

$$A(G) = \left\{ \begin{array}{l} ((x_{n-1} \cdots x_i \cdots x_0, i), \\ (x_{n-1} \cdots x_{i+1} x'_i x_{i-1} \cdots x_0, i \oplus n 1)) \\ \left| \begin{array}{l} x'_i = \text{sign}(x_i)|x_i|, \forall x \in \Psi_d \end{array} \right. \end{array} \right\}.$$

$G$  のある頂点は同じ符号列の頂点とのみ隣接するため、1 つの成分は符号列が同じ頂点のみからなる。異なる符号列は全部で  $2^n$  個あるので、 $G$  は少なくとも  $2^n$  個の成分からなる。

$G$  の同じ符号列からなる頂点で誘導されるダイグラフが  $BF(d, n)$  と同型であることを示す。このために  $G$  のある符号列の頂点  $x$  から  $BF(d, n)$  の頂点  $y$  への写像を次のように定める。

$$f((x_{n-1} \cdots x_0, i)) = (|x_{n-1}| \cdots |x_0|, i)$$

同じ符号列を持つ 2 頂点  $x, x'$  に対し  $f(x) = f(x')$  とする。これは  $x$  と  $x'$  のすべての文字について  $|x_k| = |x'_k|$  であるということであり、更に  $x$  と  $x'$  の符号列が等しいことから  $x = x'$  である。従って  $f$  は単射である。同じ符号列の頂点数は  $d^n$  個であり、 $BF(d, n)$  の頂点数が  $d^n$  であるので  $f$  は全単射である。

隣接関係について、 $G$  の定義より頂点  $x$  は  $x_i$  が同じ符号で  $\Psi_d$  の要素である  $x'_i$  を持つ頂点へ隣接する。このことから頂点  $(|x_{n-1}| \cdots |x_i| \cdots |x_0|, i)$  は  $(|x_{n-1}| \cdots |x_{i+1}| |x'_i| |x_{i-1}| \cdots |x_0|, i \oplus n 1)$ 、 $|x'_i| \in \mathbb{Z}_d$  へ隣接する。これは  $BF(d, n)$  の隣接関係と同じであるため、 $G$  の各成分は  $BF(d, n)$  と同型である。

$G$  の成分数は  $2^n$  であるため、題意が示される。□

更に  $DBF(d, n)$  は  $d^n$  個の  $BF(2, n)$  も部分ダイグラフとして含む。

定理 3  $DBF(d, n)$  は  $d^n BF(2, n)$  を因子として含む。

証明  $DBF(d, n)$  の部分グラフとして以下に定義する  $G$  を考える。

$$V(G) = V(DBF(d, n)),$$

$$A(G) = \left\{ \begin{array}{l} ((x_{n-1} \cdots x_i \cdots x_0, i), \\ (x_{n-1} \cdots x_{i+1} x'_i x_{i-1} \cdots x_0, i \oplus n 1)) \\ \left| \begin{array}{l} x'_i = x_i \text{ or } x'_i = -x_i \end{array} \right. \end{array} \right\}.$$

$G$  から  $BF(2, n)$  への写像  $f$  を以下のように考える。

$$f((x_{n-1} \cdots x_0, i)) = (y_{n-1} \cdots y_0, i)$$

ここで  $y_k$  は  $\text{sign}(x_k)$  が + なら 1, - なら 0 である。定理 2 の証明と同様に、 $G$  のある絶対値列から誘導される部分グラフが  $BF(2, n)$  と同型であることが  $f$  を用いることで示すことができ、また  $G$  の成分数が  $d^n$  であることから題意が示される。□

最後に前述とは逆に Dihedral Butterfly が Butterfly に含まれることを示す。

定理 4  $DBF(d, n)$  は  $BF(2d, n)$  の因子である。

証明  $DBF(d, n)$  の頂点から  $BF(2d, n)$  の頂点への写像  $f$  を次のようにする。

$$f((x_{n-1} \cdots x_0, i)) = (y_{n-1} \cdots y_0, i)$$

ここで  $0 \leq k < n$  に対し、 $x_k$  の符号が + なら  $y_k = |x_k|$ , - なら  $y_k = |x_k| + d$  とする。このとき  $f$  は全単射である。

$(x_{n-1} \cdots x_i \cdots x_0, i)$  から  $(x_{n-1} \cdots x_{i+1} x'_i x_{i-1} \cdots x_0, i \oplus n 1)$  への弧のうち、 $x'_i \in \Psi_d$  が  $x_i$  と同じ符号である弧について、写像先では  $(y_{n-1} \cdots y_i \cdots y_0, i)$  から  $y'_i$  が  $|x_i|$  と同じである  $(y_{n-1} \cdots y_{i+1} y'_i y_{i-1} \cdots y_0, i \oplus n 1)$  への弧となる。これは  $y'_i = |x'_i| \in \mathbb{Z}_d \subset \mathbb{Z}_{2d}$  であるため、 $BF(2d, n)$  の弧に含まれる。また  $x'_i = -x_i$  であるような弧について、写像先では  $(y_{n-1} \cdots y_i \cdots y_0, i)$  から  $y'_i$  が  $|x_i| + d$  である  $(y_{n-1} \cdots y_{i+1} y'_i y_{i-1} \cdots y_0, i \oplus n 1)$  への弧となる。 $d \leq |x_i| + d < 2d$  であることから、この弧もまた  $BF(2d, n)$  に含まれる。以上が  $DBF(d, n)$  のすべての弧であるから、題意が証明された。□

上記の命題と定理 2 または定理 3 から下記の系が導かれる。

系 1

$$\begin{aligned} \cdot 2^n BF(d, n) &\subseteq DBF(d, n) \subseteq BF(2d, n) \\ \cdot d^n BF(2, n) &\subseteq DBF(d, n) \subseteq BF(2d, n) \end{aligned}$$

### 3.2.2 強連結性

**Butterfly** が強連結ダイグラフであることと前述の定理 2, 3 から,  $DBF(d, n)$  が強連結ダイグラフであることがわかる. 任意の頂点  $u, v \in DBF(d, n)$  に対し,  $u$  から  $u$  の属する定理 2 の **Butterfly** 上の path を通ることで,  $u$  と同じ符号列で  $v$  と同じ絶対値列となる頂点  $w$  へ至ることが可能である. 同様に定理 3 の **Butterfly** 上の path を通ることで  $w$  から  $v$  への path を見つけることができ, 以上から  $u$  から  $v$  への walk を見つけることができた. 逆向きの path も同様に求めることができるため,  $DBF(d, n)$  は強連結ダイグラフであることがいえる.

**命題 2**  $DBF(d, n)$  は強連結である.

### 3.2.3 直径

**命題 2** から  $DBF(d, n)$  の直径を定義できる.

**命題 3**  $DBF(d, n)$  の直径は  $3n - 1$  である.

**証明**  $DBF(d, n)$  のある頂点  $x = (x_{n-1} \cdots x_0, i)$  に対し,  $x_k$  と符号も絶対値も異なる文字  $y_k$  ( $0 \leq k < n$ ) からなる頂点  $y = (y_{n-1} \cdots y_0, i)$  を考える.  $x$  が隣接する頂点は文字列のうち多くとも 1 文字が異なる. その上異なるのは符号か絶対値のどちらかであるから,  $n$  文字の符号も絶対値も異なる  $y$  までの path 上には少なくとも  $2n$  個の頂点が存在する.

更に  $y' = (y_{n-1} \cdots y_0, i \oplus_n (n-1))$  を考えたとき,  $y$  から  $y'$  までの path 上には少なくとも  $n-1$  個の頂点が存在する. このことから  $x$  から  $y$  を通り,  $y'$  へ至る path は長さが  $3n-1$  である. level  $i$  の頂点から level  $i \oplus_n (n-1)$  の頂点へ至る path の長さを  $L$  とおくと,

$$L \equiv i + (n-1) - i = n-1 \pmod{n}$$

である. 従って  $x$  から  $y'$  への path が  $3n-1$  より小さいとするなら, それは  $2n-1$  以下である. しかし  $n$  文字の符号も絶対値も異なる頂点への path は長さが少なくとも  $2n$  であるからそれは否定される.

以上から  $x$  から  $y'$  への距離は  $3n-1$  であり,  $DBF(d, n)$  上の任意の頂点と  $x$  との異なる文字は  $n$  文字以下なので, 直径は  $3n-1$  である.  $\square$

直径に関して **Butterfly** と比較すると,  $BF(d, n)$  が  $2n-1$  であるのに対し,  $DBF(d, n)$  は  $3n-1$  である. これは  $BF(d, n)$  の頂点数が  $nd^n$  であり,  $DBF(d, n)$  の頂点数は  $n(2d)^n$  であることから  $BF(d, n)$  と比較して十分に小さいといえる. また  $BF(2d, n)$  は  $DBF(d, n)$  と同じ頂点数を持つが, サイズを見たとき  $BF(2d, n)$  は  $n(2d)^{n+1}$  であり,  $DBF(d, n)$  は  $n(d+1)(2d)^n$  であるので, サイズが小さいが直径はそれほど大きくならないといえる.

### 3.2.4 Hamilton cycle

$DBF(d, n)$  の Hamiltonian property について調べる. このために **Butterfly** が Hamilton cycle を持つことを用いる.

**定理 5** (Bermond [2])  $BF(d, n)$  は Hamiltonian である.

またいくつかの補題を用いる.

**補題 1**  $d < d'$  ならば  $BF(d, n) \subseteq BF(d', n)$  である.

**証明**  $\forall x \in V(BF(d, n))$ ,  $x = (x_{n-1} \cdots x_0, i)$  とすると,  $x_k \in \mathbb{Z}_d$  ( $0 \leq k < n$ ) であり,  $\mathbb{Z}_d \subset \mathbb{Z}_{d'}$  であることから,  $V(BF(d, n)) \subset V(BF(d', n))$  である. 更に隣接関係は,  $x$  は  $x' = (x_{n-1} \cdots x_{i+1} x'_i x_{i-1} \cdots x_0, i \oplus_n 1)$  なる頂点へ隣接し, このとき  $x'_i \in \mathbb{Z}_d$  である.  $\mathbb{Z}_d \subset \mathbb{Z}_{d'}$  であるので,  $A(BF(d, n)) \subset A(BF(d', n))$  である.  $\square$

**補題 2**  $1 \leq t < n$  について, ダイグラフ  $G$  を下記のように定める.

$$\begin{aligned} V(G) &= \left\{ (x_{n-1} \cdots x_0, i) \mid \begin{array}{l} x_k \in \mathbb{Z}_d \ (0 \leq k < n) \\ i \in \mathbb{Z}_t \end{array} \right\}, \\ A(G) &= \left\{ \begin{array}{l} ((x_{n-1} \cdots x_i \cdots x_0, i), \\ (x_{n-1} \cdots x_{i+1} x'_i x_{i-1} \cdots x_0, i \oplus_t 1)) \mid x'_i \in \mathbb{Z}_d \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

このとき  $G \cong d^{n-t} BF(d, t)$  である.

**証明** 頂点  $x = (x_{n-1} \cdots x_0, i)$  から  $x'_k \neq x_k$  ( $t \leq k < n$ ) であるような頂点  $x' = (x'_{n-1} \cdots x'_0, i')$  への

弧は存在しない。これは  $G$  の任意の path に  $x$  と  $x'$  が含まれないことを示す。そうでなければその path 上には  $x'_k = x_k$  となる連続した頂点が含まれているので矛盾する。従って  $G$  は  $n-t$  文字で表現可能な文字列の種類分、即ち少なくとも  $d^{n-t}$  個の成分を持つ。

$G$  上で頂点文字列の  $t$  から  $n-1$  までの文字が等しい頂点による誘導部分グラフが  $BF(d, t)$  と同型であることを示す。この誘導部分グラフでは各頂点は  $(x_{t-1} \cdots x_i \cdots x_0, i)$  と表現でき、この頂点は  $(x_{t-1} \cdots x_{i+1} x'_i x_{i-1} \cdots x_0, i \oplus 1)$  へ隣接する。このとき  $x'_i \in \mathbb{Z}_d$  であるから、これは  $BF(d, t)$  の定義と同じである。□

**定理 6**  $DBF(d, n)$  は Hamiltonian である。

**証明** 定理 5 から  $BF(2, n)$  が Hamilton cycle を持つので、定理 2 から  $2^n$  個の  $BF(2, n)$  の Hamilton cycle を  $DBF(2, n)$  上の 1 つの Hamilton cycle に構成することで、 $DBF(2, n)$  に Hamilton cycle が含まれることを示す。

$DBF(2, n)$  上の符号列が等しい頂点からなる  $BF(2, n) = BF_0$  に着目する。この  $BF_0$  における level  $i$  の頂点を  $x = (x_{n-1} \cdots x_0, i)$  とする。この頂点は  $BF_0$  の Hamilton cycle 上で  $x'_i$  が  $x_i$  と同じ符号で  $|x'_i| = 0$  または  $1$  であるような頂点  $y = (x_{n-1} \cdots x_{i+1} x'_i x_{i-1} \cdots x_0, i \oplus 1)$  へ隣接している。この  $BF_0$  とは別の、 $x$  の文字列の  $i$  番目の符号が反転した符号列を持つ頂点からなる  $BF(2, n) = BF_1$  を考える。

もし  $|x'_i| = 0$  であれば図 1 のようにして  $BF_0$  と  $BF_1$  の頂点を含むサイクルを構成できる。実線の弧は Hamilton cycle に含まれる弧であり、破線の弧はそれぞれの成分の Hamilton cycle 上の path である。 $x$  から  $y' = (x_{n-1} \cdots x_{i+1} (-x_i) x_{i-1} \cdots x_0, i \oplus 1)$ ,  $BF_1$  上の Hamilton cycle を通って、 $x' = (x_{n-1} \cdots x_{i+1} (-x'_i) x_{i-1} \cdots x_0, i)$  から  $y \rightsquigarrow y$  から  $BF_0$  上の Hamilton cycle を通って  $x$  へ至る  $BF_0$  と  $BF_1$  の頂点を含む Hamilton cycle を構成できる。

$|x'_i| = 1$  であれば図 2 の形に構成することができる。このとき  $u, v$  は  $BF_0$  上の頂点で  $u = (x_{n-1} \cdots x_{i+1} u_i x_{i-1} \cdots x_0, i \oplus 1)$ ,  $|u_i| = 0$ ,

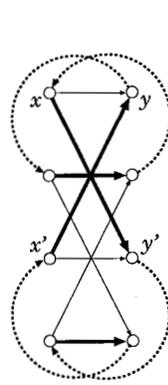


図 1  $|x'_i| = 0$  のときの弧の組み換え

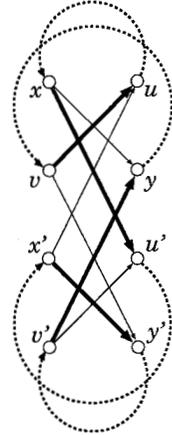


図 2  $|x'_i| = 1$  のときの弧の組み換え

$v = (x_{n-1} \cdots x_{i+1} v_i x_{i-1} \cdots x_0, i)$ ,  $|v_i| = 1$  である。 $BF_1$  上の頂点  $u', v', x', y'$  はそれぞれ  $u, v, x, y$  の  $i$  番目の文字の符号を反転したものである。

以上から  $DBF(2, n)$  の  $2^n$  個の  $BF(2, n)$  のうち、 $i$  番目の符号が異なる頂点からなる 2 つの  $BF(2, n)$  に対し、それらの頂点をすべて含む cycle  $C_i$  を構成できることがわかった。別の 2 つの  $BF(2, n)$  から同様に  $C'_i$  を構成する。 $C_i$  と  $C'_i$  に含まれる頂点は少なくとも 1 つの、例えば  $j$  番目の符号が異なる。従って上述の構成を  $j$  番目の符号反転の弧を用いることで同様に構成できる。この際に用いられる弧は  $C_i$  や  $C'_i$  の構成で用いられた弧とは異なるため、この構成は可能である。このような構成を繰り返すことで  $DBF(2, n)$  上に Hamilton cycle を構成することができる。

次に  $d$  上の帰納法から  $DBF(d, n)$  に Hamilton cycle が存在することを示す。基底  $d = 2$  の場合は上述の通りなので、次数  $d \geq 2$  で Hamiltonian であると仮定し、 $d+1$  で成立することを示す。文字列中に  $d$ , または  $-d$  を含まないすべての頂点による誘導部分グラフは  $DBF(d, n)$  と同型であることは容易にわかる。仮定から  $DBF(d+1, n)$  に含まれる  $DBF(d, n)$  のすべての頂点を含む cycle  $C$  を構成できる。 $C$  に含まれない頂点は下記の方法によって  $C$  に連結することができる。



へ、頂点  $(x_{n-1} \cdots x_0, i)$  に対し  $x_{n-k-1} = (-)^b a$  と表したとき  $\alpha_k = \sigma^a \tau^b$ ,  $\beta = i$  と定めることができる (ただし  $b = \{0, 1\}$ ,  $0 \leq a < d$  である). 従って  $f$  は全単射である.

$\text{Cay}(\Gamma, \Delta)$  での頂点  $\pi$  に対し  $\rho = (\delta_0, \dots, \delta_{n-1}; \gamma) = (\omega, e, \dots, e; 1) \in \Delta$  とすると,

$$\begin{aligned} \pi\rho &= (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}; \beta)(\delta_0, \dots, \delta_{n-1}; \gamma) \\ &= (\alpha_0\delta_{\beta-10}, \dots, \alpha_k\delta_{\beta-1k}, \dots, \alpha_{n-1}\delta_{\beta-1(n-1)}; \beta\gamma) \end{aligned}$$

なる頂点へ隣接する.  $k = \beta$  に対し,

$$\begin{aligned} \alpha_k\delta_{\beta-1k} &= \alpha_\beta\delta_{\beta-1\beta} \\ &= \alpha_\beta\delta_0 = \alpha_\beta\omega \end{aligned}$$

であり, それ以外の  $\alpha_k\delta_{\beta-1k}$  については  $\delta_k = e$  ( $k \neq \beta$ ) であるから,

$$\begin{aligned} &(\alpha_0\delta_{\beta-10}, \dots, \alpha_k\delta_{\beta-1k}, \dots, \alpha_{n-1}\delta_{\beta-1(n-1)}; \beta\gamma) \\ &= (\alpha_0, \dots, \alpha_{\beta-1}, \alpha_\beta\omega, \alpha_{\beta+1}, \dots, \alpha_{n-1}; \beta \oplus_n 1) \end{aligned}$$

となる. この頂点を写像すると  $(x_{n-1} \cdots x_{i-1} x'_i x_{i+1} \cdots x_0, i \oplus_n 1)$  となる.  $\omega = \tau$  であれば  $\alpha_\beta\omega = \sigma^a \tau^{b \oplus 2^1}$  であることから,  $x'_i = (-)^{b \oplus 2^1} a = (-)(-)^b a$ . これは  $\text{DBF}(d, n)$  の隣接条件の符号反転に一致する. また  $\omega = \sigma^k$  ( $0 \leq k < d$ ) であれば  $\alpha_\beta\omega = \sigma^a \tau^b \sigma^k = \sigma^{a \oplus ak} \tau^b$  であるから,  $x'_i = (-)^b (a \oplus_d k)$  であり, これは隣接関係の  $x_i$  と符号が等しく  $\Psi_d$  の要素であることと一致する.

$f$  が隣接関係を保存するため  $\text{DBF}(d, n) \cong \text{Cay}(\Gamma, \Delta)$  である.  $\square$

これにより  $\text{DBF}(d, n)$  は非常に対称的な構造を持つことが示された.

系 2  $\text{DBF}(d, n)$  は頂点可移である.

## 5 まとめ

本稿では新しいグラフクラス *Dihedral Butterfly*  $\text{DBF}(d, n)$  を定義し, 直径や *Hamilton* 性などの基本的な性質を導いた.  $\text{DBF}(d, n)$  の定義は *Butterfly* の拡張という形で与えられているため *Butterfly* と多くの類似点を持つ. これは  $2^n$  個の  $\text{BF}(d, n)$  を因子として含み, また  $d^n$  個の  $\text{BF}(2, n)$  を因子として

含む, 更に  $\text{DBF}(d, n)$  は  $\text{BF}(2d, n)$  の因子であるという逆の包含関係も成り立つことなどである.

*Butterfly* は 2 つの巡回群の wreath 積上の Cayley グラフとして表せることが知られているが, 本稿では *Dihedral Butterfly* もまた Cayley グラフとして表せることを示した. *Dihedral Butterfly* は二面体群と巡回群の wreath 積上の Cayley グラフである.

今後の課題としては, 連結度, また *Hamilton cycle* 分解に関する研究, ならびに信号処理への応用が挙げられる.

## 参考文献

- [1] F. Annexstein, M. Baumslag and A.L. Rosenberg, "Group action graphs and parallel architecture," *SIAM J. Computing*, 19(3)8, June 1990
- [2] J-C. Bermond, E. Darrot, O. Delmans, S. Perennes, "Hamilton circuits in the directed wrapped Butterfly network," *Discrete appl. Math.*, 84, (1998) 21-42
- [3] A. Kerber, Representations of Permutation Groups I, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 240, 1971.
- [4] F.T. Leighton, "Introduction to Parallel Algorithms and Architectures: Arrays Trees Hypercubes, Computer Science," *Mathematics Electrical Engineering, Morgan Kaufmann, Los Altos, CA*, 1992.