平面ユークリッドＴＳＰの分割統治法ヒューリスティックス

玉木久夫　　土屋裕希

明治大学理工学部情報科学科
〒214-8571　神奈川県川崎市多摩区東三田 1-1-1
tamaki@cs.meiji.ac.jp, tsuchiya@cs.meiji.ac.jp

あらまし平面ユークリッド距離巡回セールスマン問題に対する分割統治法アルゴリズムを提案する。このアルゴリズムは、まず与えられた点集合のドローネ三角形分割を求め、その全域閉小路を再帰的に求める。巡回路をハミルトン閉路から全域閉小路に緩和したのは解の存在を保証するためである。部分解の統合においては、部分解に属す辺とその他のドローネ辺をあわせて統合グラフを構成し、その上の最適解を線形刻み分割を用いた動的計画法により求める。このアルゴリズムの実行時間は分割の幅 w を固定したとき、$O(n \log n)$ である。

Divide and Conquer Heuristics for the Euclidean TSP in the Plane

Hisao Tamaki　　Hiroki Tsuchiya

Department of Computer Science, Meiji University
1-1-1 Higashi-mita, Tama-ku, Kawasaki-shi, Kanagawa 214-8571

Abstract We propose a divide-and-conquer algorithm for the Euclidean traveling salesman problem in the plane. This algorithm first computes the Delaunay triangulation of the given point set and then constructs a spanning closed trail of the triangulation using a recursive procedure. We relax the definition of the tour from Hamilton cycles to spanning closed trails, in order to guarantee the existence of solutions. To combine the solutions of the subproblems into a tour, we construct an integration graph consisting of the edges in the subproblem solutions and some other edges of the triangulaiton, and then solve TSP on this graph optimally using a dynamic programming algorithm based on a linear carving decomposition. The running time of this algorithm is $O(n \log n)$ assuming that the width of the linear carving decomposition is a bounded by a constant.

1　はじめに

点の集合 S に対して S の各点をちょうど一度ずつ訪れる閉路を S の巡回路と呼ぶことにする。　巡回セールスマン問題 (Traveling Salesman Problem、以下 TSP)[15] は、与えられた点の集合 S の巡回路で総距離が最小のものを求める問題である。ここで２点間の距離は対毎に入力として与えられるか、規則により定められている。グラフ上のＴＳＰでは、点はグラフの頂点であり、巡回路はグラフの辺によって構成されしたがって与えられたグラフのハミルトン閉路であることが要求される。　平面ユークリッド TSP では点は平面上に配置され２点間の距離としてユークリッド距離を用いる。実

際上の応用も多く、またベンチマーク入力例も数多く用意されている。

良く知られているように、一般の TSP のみならず平面ユークリッド TSP も NP 困難である [9, 11]。平面ユークリッド TSP に対しては多項式時間近似スキーム [1] が知られているが、意味のある近似度を達成するための隠れた定数が巨大であるために実用的でない。また、整数計画法に基づいた解法 [6] が、3 万都市以上のベンチマーク例を厳密に解くことに成功しているが [3]、膨大な CPU 時間を要しこれも現段階では実用的ではない。現在実用的に用いられている解法のほとんどは最適性を目指さず、経験的な実行時間と近似度によって評価されている [7]。

TSP の実用的な解法の多くは、次の 2 段階からなる。

1. 巡回路をひとつ求めて暫定解とする。
2. 暫定解を何らかの方法で改良し、それを新たな暫定解として改良できなくなるまで（あるいは定められた資源を使い尽くすまで）それを繰り返す。

それぞれの段階に対してさまざまなヒューリスティックスが提案されている。

これらのヒューリスティックスの多くは、一般のＴＳＰに対しても適用できるものであり、平面ユークリッドＴＳＰに対してはそれに特化することによってより効率的な実装が可能となる。これに対して、この研究では平面ユークリッドＴＳＰにはじめから特化した巡回路構成法を考える。目標は、次の条件のすべてを満たす巡回路構成法を見出すことである。

条件 1 どのような入力に対しても必ず巡回路を構成する。

条件 2 入力点の個数を n とするとき、実行時間が $O(n \log n)$ である。

条件 3 典型的なベンチマーク例に対して数パーセント程度の近似度を達成する。

条件 4 高速な巡回路構成法と逐次改善法を組み合わせた解法が同程度の近似度を達成するための時間と同程度以下の時間で実行できる。

このうち、条件１と２は理論的に保証されるべきものであり、条件３と４は実験的に検証されるべきものである。

著者らの知る限りにおいて、既存の巡回路構築法のなかで上の条件１、２、３をすべて満たすものは存在しない。これらの条件のすべてを満たそうとするときに遭遇する困難の一例を見るために、初期解の構成法としてよく採用される貪欲法を例にとる。貪欲法では、辺の候補を長さの短い順に調べ、「その辺を採用したときに、それまでに採用された辺すべてからなるグラフが経路と孤立頂点から構成される（あるいは最後のステップにおいてはひとつの閉路である）ならばその辺を採用する」というステップを繰り返す。全ての辺の候補をあらかじめソートすると $O(n^2 2 \log n)$ 時間を要するために、条件２を満たさない。辺の候補を限定して $O(n \log n)$ 時間を達成しようとすると、候補辺からなるグラフのハミルトン性が問題になり、条件１の保証が自明ではなくなる。例えば、候補辺集合をドローネ三角形分割 ([5]) の辺集合とした場合、ドローネ三角形分割はハミルトン閉路を持つとは限らないために、アルゴリズムに何らかの修正を加えないと条件１は保証されなくなる。また、貪欲法の典型的なベンチマーク問題に対する近似誤差はほとんどの場合１０パーセント以上であり [7]、条件３を満たさない。

本研究では、分割統治法アプローチにより条件１から４のすべてを満たすことを目指す。分割統治法の最も素朴な形では、条件１と２が自明に満たされるが、条件３と４を満たすことができない。条件３と４を満たすための工夫を導入すると、条件１と２を満たすことが自明ではなくなる。この報告では、条件３と４を満たすための工夫を導入し、かつ条件１と２を保証するアルゴリズムについて述べる。工夫の中心は、部分解の統合における動的計画法の採用である。このアルゴリズムはパラメータ化されており、パラメータを十分に大きくとれば条件３を達成することは可能と思われる。しかし、実行時間はパラメータに依存しているため、条件３と４を同時に満たすことができるかどうかの実験的検証は今後の課題である。

なお、提案するアルゴリズムは次の付加的な条件を満たす。

条件5 構成される巡回路は自分自身と交差しない。既存の高速な巡回路構成法の多くはこの条件を満たさない。この性質を巡回路の無交差性と呼ぶことにする。

第2節では、本研究における分割統治アプローチの概要を述べる。第3節では、具体的なアルゴリズムの基礎となる、平面グラフの全域閉小路の性質について述べる。第4節では、部分解の統合に用いるグラフ分割とそれに基づいた動的計画法について述べる。第5節では、提案アルゴリズムを記述する。第6節で今後の展望について述べる。

2 分割統治法アプローチ

平面ユークリッドＴＳＰに対する分割統治法の概略は次のように述べることができる。ここで、入力の点の個数が一定の値 C 以下の場合を扱う基底ソルバを仮定する。基底ソルバは与えられた点集合に対して、自分自身と交差しない巡回路を返すものと仮定する。

平面ユークリッドＴＳＰに対する分割統治法

入力 平面上の点集合 S

出力 S に対する巡回路

(1) 基底 S の大きさがある定数 C 以下であるならば、基底ソルバを S に適用してその結果の巡回路を答えとする。

(2) 分割 S を、境界線 L によって二つのほぼ同じ大きさの部分集合 S_1 と S_2 に分割する。

(3) 再帰 S_1 と S_2 にそれぞれ対する巡回路 T_1、T_2 を再帰的に求める。

(4) 統合 T_1 と T_2 をひとつの巡回路に統合して答えとする。

この分割統治法を最も単純な形で実現するには次のような方法が考えられる。

(1) 分割においては、垂直線または水平線を用いる。そのために、点集合は x 座標と y 座標の両方でソートしておく。分割の際に二つのソート列を分割して受け継ぐことにより、分割は $O(|S|)$ 時間で実行できる。

(2) 統合においては、T_1、T_2 のそれぞれから適当な辺を一本ずつ取り去り、得られた二つの経路をつないでひとつの巡回路とする。

この方針により、第1節の条件1、2は容易に満たすことができる。定数Ｃと基底ソルバを適切に選べば条件4も満たすことができるであろう。しかし、この素朴な統合法では条件3（数パーセント程度の近似誤差）を満たすことは困難である。そこで、次のような統合法を考える。

統合グラフを用いた巡回路統合

入力 平面上の点集合 S_1 と S_2 のそれぞれに対する巡回路 T_1 と T_2。T_1 と T_2 は自分自身とも交差せず、お互いにも交差しないものとする。

出力 $S_1 \cup S_2$ に対する、自分自身と交差しない巡回路

(1) $S_1 \cup S_2$ の点のを結ぶ辺をいくつか選び、選ばれた辺の集合 T_1 の辺集合と T_2 の辺集合とあわせて平面グラフ（統合グラフと呼ぶ）を構成する。

(2) 統合グラフの最短ハミルトン閉路を求めて答えとする。

ここでも、統合グラフ上のＴＳＰ解法の選択には自由度があるが、我々はグラフ分割に基づいた動的計画法を用いる [2, 14, 8]。

統合グラフの構成にはさまざまなヒューリスティックスが考えられるが、予備的な実験から、幅が十分に小さくかつ良い統合巡回路を得るために十分な辺集合を含んだ統合グラフを構成することはそれほど容易ではないことがわかっている。そこで、この研究ではのようなアプローチをとる。

1. 最初に与えられた点集合に対してドローネ三角形分割 D を求める。

2. 再帰手続きは、この D の部分グラフを渡されてその辺のみを使用した巡回路を返す。

3. 統合グラフも、D の辺のみを用いる。

巡回路構成にドローネ三角形分割を用いるヒューリスティックスは目新しくない [12, 10]。Letchford と Pearson[10] は、ドローネ三角形分割がよい巡回路を含む場合が多いことを実験的に示しており、上の方針の妥当性の根拠を与える。しかしながら、

[10] でも指摘され、上でも述べたようにドローネ三角形分割はハミルトン閉路を持つとは限らない。[10] では、「巡回路が三角形分割の頂点や辺のそれぞれを２度以上通ってもよい」として問題を緩和することによってこの問題が回避できることを示している。またさらに、ドローネ三角形分割がハミルトン閉路を持つ場合でも、最適緩和解を短絡してできる解の方が、最短ハミルトン経路よりもかなり短い場合が多いことを示している。

我々も、同様な緩和を考えることにより第１節の条件１を満たす。ただし、巡回路がひとつの辺を２度以上通ることを許すと、統合グラフに対する動的計画法の負担が増すため、次のようなより制限された緩和を行う。グラフ G のすべての頂点を通り、各辺を高々一度通る閉じた歩道を G の全域閉小路と呼ぶ。

最適全域閉小路問題

入力 グラフ G と各辺の重み

目的 G の全域閉小路で重みの和が最小なものを求める

ハミルトン閉路は全域閉小路の特別な場合であるので、この問題はグラフ上のＴＳＰの緩和である。次節で示すように、G が点集合の三角形分割であるならばこの緩和問題は必ず解を持つ。したがって、ドローネ三角形分割と全域閉小路への緩和を用いることにより、第１節の条件１を満たすことができる。

以上の方針を具体化したアルゴリズムは第５節で述べる。

3　内三角グラフの全域閉小路

まず、よく知られたオイラーグラフの必要十分条件から、次の命題が得られる。

命題 3.1. グラフ G のある辺集合 $F \subseteq E(G)$ が G の全域閉小路の辺集合であるための必要十分条件は、グラフ $(V(G), F)$ が連結でそのどの頂点の次数も偶数であることである。

G を平面描画グラフとし、v をそのある頂点とする。v の辺を v の周りで時計周りにならべて e_1、e_2、. . . , e_k とする。T_1 と T_2 を必ずしも相異ならない G の小路とする。$0 < i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq k$ なる i_1、i_2、i_3、i_4 に対して、T_1 が e_{i_1} と e_{i_3} を連続して含み、また T_2 が e_{i_2} と e_{i_4} を連続して含むとき、T_1 と T_2 は v で交差するという。全く自分自身と交差しない全域閉小路を無交差全域閉小路と呼ぶ。簡単なフリップの議論により、次の命題を示すことができる。

命題 3.2. 平面描画グラフ G が全域閉小路 T を持つならば、G は T と同じ辺集合の無交差全域閉小路を持つ。

平面描画された２連結グラフでその内面がすべて三角形であるグラフを内三角グラフと呼ぶ。平面上の点集合の三角形分割は明らかに内三角グラフである。この節の目的は次の定理を証明することにある。

定理 3.1. G を任意の内三角グラフとするとき、G は無交差全域閉小路を持つ。

証明. 上の命題より、G が全域閉小路を持つことを示せばよい。G の辺数に関する帰納法による。辺数が３のときは自明である。G を辺数が４以上の内三角グラフとする。まず、G の外面に接する頂点で次数が２であるものがある場合、そのような頂点 v を選び G から v を除いてできるグラフを G' とする。G' は内三角グラフであるので、帰納法の仮定より全域閉小路を持つ。この全域閉小路の辺集合を T' で表す。G において v と隣接する頂点を v_1、v_2 とすると、v_1v_2 は G の、したがって G' の、辺である。T で T' と $\{vv_1, vv_2, v_1v_2\}$ の対称差 $T'\Delta\{vv_1, vv_2, v_1v_2\}$ を表すと、$(V(G), T)$ は連結であり、その頂点の次数はすべて偶数であるので、T は G の全域閉小路の辺集合である。

次に G の外面に接する頂点の次数がすべて３以上である場合を考える。外面の辺をひとつ選び e とし、G から e を除いて得られるグラフを G' と呼ぶ。G' は内三角グラフであるか、または内三角グラフである二つの２連結成分からなる。G' が内三角グラフである場合は、帰納法の仮定から G' は全域閉小路を持つ。G' が内三角グラフである二つの２連結成分からなる場合は、帰納法の仮定よりそ

の二つの2連結成分がそれぞれ全域閉小路を持つので、それらをあわせて G' の全域閉小路が得られる。G と G' の頂点集合は等しいので G' の全域閉小路は G の全域閉小路である。 □

4 線形刻み分割と動的計画法

この節は、統合グラフにおいて最適全域閉小路問題の厳密解を求めるためのアルゴリズムを与えることを目的とする。このアルゴリズムはグラフの線形刻み分割に基づいた動的計画法を用いる。まず、いくつかの定義が必要である。

G をグラフとするとき、G の刻み分割は $V(G)$ を葉集合とする木で、内部頂点の次数が3であるようなものを言う [4]。刻み分割 C がひとつの経路とその内部頂点に直接隣接する葉からなるとき、C は線形であるという。C を G の刻み分割とするとき、C からその一辺 $\{p, q\}$ を除いてできる二つの部分木のうち、頂点 p の属す方を C_{pq} であらわし、また C の葉で C_{pq} に属すものの集合を $L(C_{pq})$ で表す。C の各辺 $\{p, q\}$ は $V(G)$ の2分割 $(L(C_{pq}), L(C_{qp})$ を誘導するが、$(L(C_{pq})$ の頂点と $L(C_{qp})$ の頂点を結ぶ G の辺の本数を分割の辺 $\{p, q\}$ の幅と呼ぶ。G に対する刻み分割 C の幅は、その辺の幅の最大値である。最後に、グラフ G の刻み幅は、G の刻み分割のなかで幅が最小なものの幅である。

グラフの分枝分割は刻み分割と類似の概念であり、グラフの頂点集合のかわりに辺集合を分割する。この報告では使用しないので正確な定義は省略する。Cook と Seymour[2] は多数の巡回路を合わせてできるグラフに対する TSP を厳密に解くことにより、よりよい巡回路を構成するヒューリスティックを提案した。その厳密解を求める方法のひとつとして、グラフの分枝分割に基づいた動的計画法を用いている。Tamaki[14] は、類似のヒューリスティックスのなかで分枝分割の代わりに刻み分割を用い、さらに対象となるグラフが平面グラフに近いことを利用して効率化した動的計画法を用いている。この動的計画法アルゴリズムは、頂点数が n で刻み幅が w の平面グラフ上のＴＳＰの厳密解を $O(n2^{O(w)})$ 時間で求めることができる。Dorn ら [8] は分枝分割に基づいた動的計画法がグラフの平面性を用いて同様に効率化できることと平面グラフの分枝幅が $O(\sqrt{n})$ であることを利用して、頂点数が n の平面グラフ上のＴＳＰを厳密に解く $2^{O(\sqrt{n})}$ 時間のアルゴリズムを与えている。

本研究では、分割統治法の統合部分に線形刻み分割を用いた動的計画法を用いる。平面グラフが G に対して刻み幅が w の線形刻み分割が与えられたとき、G 上のＴＳＰの厳密解は $O(n2^{O(w)})$ 時間で求めることができる。この実行時間の式の形は一般の刻み分割の場合と変わらないが、$O()$ 記法に隠された定数は、線形刻み分割の方が小さくすることができる。また、TSP から全域閉小路問題に緩和したときの負荷も刻み分割の線形性を利用して軽減することができる。

一方、分割統治法の解の統合にこれらの解法を利用する立場からみたとき、部分解である巡回路（正確には部分グラフの全域閉小路）をつなぐための統合グラフは線形の構造を持つのが自然である。したがって、同一の刻み幅の制限のなかで、刻み分割が線形であるという条件は統合グラフの質をそれほど損なうことはないのではないかと期待される。

アルゴリズム構成の便宜のために、我々はさらに線形刻み分割に対して次の制約を課す。

まず、G の線形刻み分割 C を、頂点列 v_1、v_2、$\ldots$, v_n、$n = |V(G)$、と同一視する。すなわち、C は v_1 から v_n にいたる、$n-2$ 個の内部頂点 u_2、$\ldots$、u_{n-2} をこの順に持つ経路 P_C を持ち、葉 v_i、$2 \le i \le n-1$、は u_i を親としている。頂点集合 V_i を $V_i = \{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$、$0 \le i \le n$、によって定義する。すべての $0 < i < n$ に対して V_i と $V(G) \setminus V_i$ が G の双対閉路によって分離されるならば、線形刻み分割 C は単純であるということにする。（この概念は一般の刻み分割の場合のボンド刻み分割 [13] に対応する。）

この節の残りの部分では、次の定理を証明する。

定理 4.1. 頂点数が n である重みつき平面描画グラフ G と、幅が w である G の単純な線形刻み分割が与えられたとき、G の最小全域閉小路を、$O(n2^w C_{\lfloor w/2 \rfloor})$ のメモリー量を用いて $O(n2^{3w/2}(C_{\lfloor w/2 \rfloor})^2)$

時間で構成することができる。ここで、C_k は k 番目のカタラン数を表す。

以下では与えられた重みつき平面描画グラフ G を固定して考える。A を G における双対有向閉路とすると、G から A の辺を取り去ることにより G は部分グラフ left(A) と right(A) に2分される。A の辺を順に $e_1, e_2, \ldots, e_k$ とする。A 上のマッチング（A の要素である辺の対の集合で、どの相異なるふたつの対も辺を共有しないようなもの）は、$0 < i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq k$ なる i_1、i_2、i_3、i_4 に対して、対 $\{e_{i_1}, e_{i_3}\}$ と対 $\{e_{i_2}, e_{i_4}\}$ の両方を含むとき交差するという。A 上のマッチング M が交差しないとき、M は A の無交差マッチングであるという。

M を A の無交差マッチングとし、W を left(A) の辺素で互いに交差しない小路の集合とする。M から W との間の一対一対応 ψ で、「各 $\{e, f\} \in M$ に対して $\psi(\{e, f\})$ は e の left(A) 側の端点と f の left(A) 側の端点を満たす」という条件を満たすものがあるとき、W を left(A) における型 M の部分解と呼ぶ。

T を G の無交差全域閉小路とするとき、$M(A, T)$ を「T の e にはじまり f で終る部分小路で内部の辺がすべて left(A) に属す」という条件を満たすような A の辺の対 $\{e, f\}$ すべてからなる集合と定義すると、$M(A, T)$ は A 上の無交差マッチングであり、T と left(A) の共通部分は left(A) における型 $M(A, T)$ の部分解である。T において、left(A) との共通部分を left(A) における型 $M(A, T)$ のいかなる部分解と置き換えてもその結果は G の無交差全域閉小路である。このことを利用して動的計画法アルゴリズムを次のように構成することができる。

頂点列 v_1、v_2、$\ldots$、v_n によって幅が w の単純な線形刻み分割が与えられたとする。各 $0 \leq i \leq n$ に対して $V_i = \{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$ とおく。各 $0 < i < n$ に対して left(A) $= V_i$ であるような双対閉路 A を A_i とおき、また各 $0 < i \leq n$ に対して left(B) $= \{v_i\}$ であるような双対閉路 B を B_i とおく。

$1 \leq i <$ とし、A_i の無交差マッチングのひとつを M とするとき、left(A_i) における型 M の部分解のうち辺の重みの総和が最小であるものを、left(A_i) における型 M の最適解と呼び、その辺の重み和を opt(i, M) で表す。left(A_i) において型 M の部分解が存在しなければ opt$(i, M) = \infty$ とおく。opt(i, M) の再帰式を導くために次の準備が必要である。

$1 \leq i \leq n-2$ なる i に対して A_i と B_{i+1} に着目する。まず、双対閉路を辺の集合とみなしたときに A_{i+1} は A_i と B_{i+1} の対称差であることに注意する。A_i の無交差マッチング M と B_{i+1} の無交差マッチング N を考える。$A_i \cup B_{i+1}$ を頂点集合とし、$M \cup N$ を辺集合とするグラフ H は閉路と経路からなる。H が閉路を持たず、H のすべての経路の端点が A_{i+1} に属す辺であるとき、M と N は合成可能であるといい、H の経路によって誘導される A_{i+1} 上のマッチング L を M と N の合成と呼ぶ。M と N が合成可能であるとき M と N の合成を $M \circ N$ で表す。

最後に、A 上のマッチング M のどれかの対に属す G の辺すべての集合 $F \subseteq A$ を $s(M)$ であらわし、辺集合 F に属す辺の重みの総和を weight(F) で表す。

以上の準備のもとに、opt(i, M) の再帰式は次のように表される。

基底　A_1 のすべての無交差マッチング M に対して

$$\mathrm{opt}(1, M) = 0$$

帰納ステップ　$1 \leq i \leq n-2$ なる i と A_{i+1} のすべての無交差マッチング M に対して

$$\begin{aligned}&\mathrm{opt}(i+1, M) = \\ &\quad \min\{\mathrm{opt}(i, L) + \mathrm{weight}(s(L) \cap s(N)) \mid \\ &\qquad L \text{ は } A_i \text{ の無交差マッチング、} \\ &\qquad N \text{ は } B_i \text{ の無交差マッチング、} \\ &\qquad M = L \circ N\}\end{aligned}$$

最後に、G の最適無交差全域閉小路の重みは A_{n-1} のすべての無交差マッチング M に対する opt$(n-1, M)$　+weight($s(M)$) の最小値として求められる。また、いったん関数 opt の表が得られれば、こ

の最適値に対応する無交差全域閉小路は容易に構成することができる。

この動的計画法アルゴリズムの実行時間を見積もるために、まず無交差マッチングの個数を求める。大きさが w の辺集合 A 上の無交差マッチングは、A の $2k$ 個の要素の選択と、選択された要素の無交差マッチングによって指定することができる。後者は長さ $2k$ の形のよい括弧式（同数の開き括弧と閉じ括弧からなる列で、どの接頭語においても閉じ括弧の個数が開き括弧の個数を超えないもの）によって符号化することができ、その個数はカタラン数 C_k で与えられる。したがって、A の無交差マッチングの総数は

$$\sum_{0<k\leq w/2} \binom{w}{2k} C_k \quad \leq \quad 2^n C_{\lfloor w/2 \rfloor}$$

で与えられる。

各 i に対して $\mathrm{opt}(i,*)$ の表から $\mathrm{opt}(i+1,*)$ の表を構成するために考慮すべき A_i の無交差マッチング M と B_i の無交差マッチング N の対 (M,N) は次の要素により定めることができる。

1. $A_i \setminus B_i$ の部分集合 X
2. $A_i \cap B_i$ の部分集合 Y
3. $B_i \setminus A_i$ の部分集合 Z
4. $s(M) = X \cup Y$ であるような A_i の無交差マッチング M
5. $s(N) = Y \cup Z$ であるような B_i の無交差マッチング N

$A_i \setminus B_i = U_1$、$A_i \cap B_i = U_2$、$B_i \setminus A_i = U_3$ とおくと $A_i = U_1 \cup U_2$、$B_i = U_2 \cup U_3$、$A_{i+1} = U_1 \cup U_3$ である。U_1、U_2、U_3 は互いに素であり、A_i、B_i、A_{i+1} の大きさはいずれも w を超えないので、$|U_1|+|U_2|+|U_3| \leq 3w/2$ を得る。従って、考慮すべき対 (M,N) の個数は高々$O(2^{3w/2}(C_{\lfloor w/2 \rfloor})^2)$ である。$M \circ N$ の計算は表を用いて定数時間でできるので、アルゴリズム全体の実行に必要な時間は $O(n2^{3w/2}(C_{\lfloor w/2 \rfloor})^2)$ である。

5　全体のアルゴリズム

以上で準備した道具立てを用いて分割統治法アルゴリズム全体を記述する。

アルゴリズム DDAC

入力　平面上の点集合 S

出力　S に対する巡回路

（1）S のドローネ三角形分割 D を求める。

（2）下で定義する再帰手続き SCT によって D の無交差全域閉小路 T を求める。

（3）T が２度以上以上通る頂点を短絡することにより、S の巡回路を得て答えとする。

再帰手続き SCT(G)

入力　内三角グラフ G

出力　G の無交差全域閉小路

（1）G が基底ソルバの能力の範囲内であるならば基底ソルバによって G の無交差全域閉小路を求める答えとする。そうでなければ以下を実行する。

（2）G の外面を通る双対閉路 A によって G をほぼ同じ大きさの部分グラフ G_1 と G_2 に２分割する。

（3）G_1 と G_2 の２連結成分である内三角グラフ H のそれぞれに対して $\mathrm{SCT}(H)$ を呼び出して H の無交差全域閉小路 T_H を求める。

（4）A とその付近の辺および（3）で得られた各 T_H の辺を集めて統合グラフ I と、I の幅 w の単純線形刻み分割を同時に構成する。

（5）前節の動的計画法により I の最適無交差全域閉小路を求めて答えとする。

6　まとめ

平面ユークリッド巡回セールスマン問題に対する分割統治法アプローチのひとつとして、ドローネ三角形分割に基づくアルゴリズムの概要を述べた。解の存在を保証するために、グラフ上の巡回路をハミルトン閉路から全域閉小路に緩和し、内三角グラフが必ず全域閉小路を持つことを示した。また、単純線形刻み分割に基づいて、平面グラフの最適全域閉小路を求める動的計画法アルゴリズムを与えた。部分巡回路を統合するための統合グ

ラフの詳細と実験結果については稿を改めて報告したい。

参考文献

[1] S. Arora, Polynomial time approximation schemes for Euclidean traveling salesman and other geometric problems. J. ACM, 45(5):753-782, 1998.

[2] William Cook, Paul Seymour, our Merging via Branch-Decomposition. INFORMS JOURNAL ON COMPUTING Vol. 15, No. 3, Summer 2003, pp. 233-248.

[3] W. Cook, D. Espinoza, M. Goycoolea, Computing with Domino-Parity Inequalities for the TSP. INFORMS Journal on Computing, to appear, 2005.

[4] N. Robertson and P.D. Seymour, Graph minors X. Obstructions to tree-decomposition. Journal of Combonatorial Theory, Series B, 153-190, 1991.

[5] B. Delaunay, Sur la sphere vide. Izvestia Akademii Nauk SSSR, Otdelenie Matematicheskikh i Estestvennykh Nauk, 7:793-800, 1934

[6] G. B. Dantzig and R. Fulkerson and S. M. Johnson, Solution of a large-scale traveling salesman problem. Operations Research 2 (1954), 393-410.

[7] DIMACS TSP implementation challenge: http://www.research.att.com/ dsj/chtsp.

[8] F. Dorn and E. Penninkx and H.L. Bodlaender and F.V. Fomin, Efficient Exact Algorithms on Planar Graphs: Exploiting Sphere Cut Decompositions. Technical Report UU-CS-2006-006, Utrecht Uniersity, 2006.

[9] M.R. Garey and R.L. Graham and D.S. Johnson, Some NP-complete geometric problems. Proc. ACM Symposium on Theory of Computing, pp 10-22, 1976.

[10] A.N. Letchford and N.A. Pearson Good triangulations yield good tours. Accepted (January 2006) to appear in Computers and Operations Research, 2006

[11] C. H. Papadimitriou, Euclidean TSP is NP-complete. Theoretical Computer Science, 4:237-244, 1977.

[12] Reinelt G. Fast heuristics for large geometric traveling salesman problems. ORSA Journal of Computing 1992 4; 206-217.

[13] P.D. Seymour and R. Thomas, Call Routing and the Ratcatcher. Combinatorica, 14(3), 217-241,1994.

[14] Hisao Tamaki, Alternating Cycles Contribution: a Tour Merging Strategy for the Traveling Salesman Problem. MPI-I-2003-1-007, 2003.

[15] http://www.tsp.gatech.edu/index.html