

## 故障したコンパスを持つ二台の自律分散ロボットに対する 一点集合問題の可解性について

富田 祐一 泉 泰介 片山 喜章 犬塚 信博 和田 幸一  
名古屋工業大学大学院 工学研究科 情報工学専攻

**概要:** 本論文では、自律分散ロボット群の一点集合問題について考える。一点集合問題とは、ロボット群があらかじめ与えられていないある一点に集合させる問題である。本論文では、二台のロボットが故障したコンパスを持つ場合における一点集合問題の可解性について示している。時刻によって方向が変化しないコンパスでは、コンパス間の角度が  $\pi/2$  未満の違いであれば一点集合が可能なアルゴリズムを、また、任意のサイクルで方向が変化するコンパスでは、絶対軸に対してコンパスの角度が  $\pi/6$  未満の違いに対して、一点集合が可能なアルゴリズムを示した。そして、コンパスの故障によっては一点集合問題が非可解であることも示している。

## Solvability of the Gathering Problem for Two Autonomous Mobile Robots with Faulty Compasses

Yuichi TOMIDA, Taisuke IZUMI, Yoshiaki KATAYAMA,  
Nobuhiro INUZUKA, and Koichi WADA

Department of Computer Science and Engineering Graduate School of Engineering  
Nagoya Institute of Technology

**Abstract:** This paper studies a gathering problem for asynchronous autonomous mobile robots. We present solvability of the gathering problem for two robots with faulty compasses. A gathering problem is that the robots are required to eventually gather at a single point which is not given in advance from any initial configuration. In this paper, we propose several inaccurate compass models and give two algorithms which solve the gathering problem on these models. One algorithm solves the problem when compasses point different less than  $\pi/6$  from the (absolute) north. The other one solves the problem when the compasses never change its pointed direction and their difference is less than  $\pi/2$  among robots.

### 1 はじめに

自律性を持つ複数のロボットが協調的に動作することにより全体でひとつの目的を達成する自律分散ロボット群の研究がある。

本研究では自律分散ロボット群を計算論的な観点からとらえ、その協調問題を取り扱う。自律分散ロボット群の二次元平面における協調問題を扱った研究として、鈴木、山下らによる研究 [1] がある。この研究において、自律分散ロボット群の理論モデルが構築された。しかし、このモデルにおけるロボットは、行動(観測, 計算, 移動)を開始するタイミングにおいてのみ非同期であり、行動自体は瞬間的におこなわれることが仮定されている。

これに対して、G. Prencipe らによって提案されたモデル [2, 3] におけるロボット群の動作は完全に非同期である。即ち、各ロボットが行動に費やす時間は有限だが予測できない。このロボット群のモデルを用いた研究として、ロボット群による一点集合問題 [4, 5, 6]、形状形成問題 [7]、一点収束問題 [8] がある。

本研究では一点集合問題について考える。一点集合問題とは、初期状態として任意の位置に配置されたロボット群が、平面上であらかじめ与えられてい

ないある一点に集合する問題である。これはロボット群がさまざまな作業をするうえでの基本タスクの一つであると考えることができる。一点集合問題に関する既存の結果には、追加的能力と可解性の関係 [9, 10] や故障耐性に関する研究 [11] がある。

文献 [6] では、ロボット群の座標系の軸が一致していない場合に二台以上のロボットが一点集合問題を解く決定性アルゴリズムは存在しないと示された。しかし、ロボット群の座標系の軸が完全に一致している場合には、ロボットが任意の台数で非常に単純なアルゴリズムによって一点集合問題を解くことができる。文献 [12, 13, 14, 15] では、ロボットが持つコンパスの故障について考えられている。本論文では文献 [15] で提案されたコンパスの故障モデルを用いて、それぞれのモデルに対する一点集合問題の可解性について考える。

既存の結果である、二台のロボットでコンパスの角度差が高々  $\pi/3$  で、その差が時刻によって変化しない場合の一点集合アルゴリズム [15] に対して、本研究では、角度差を  $\pi/2$  未満まで大きくしても一点集合可能なアルゴリズムを提案する。また、時刻によって方向が変化するコンパスに対しても、既存の結果である、絶対軸に対する角度差が高々  $\pi/8$  のアルゴリズム [15] に対して、本研究では、絶対軸に対

して角度差を  $\pi/6$  未満まで大きくした場合でも一点集合可能なアルゴリズムを提案する。

本論文の構成は以下のとおりである。第2章ではロボットモデル、一点集合問題、故障コンパスモデルを示す。第3章では一般的なアルゴリズムを与え、一点集合が可能なコンパスのモデルを示す。第4章では一点集合が不可能なモデルについて示す。第5章では、結論と今後の課題について述べる。

## 2 モデルと問題定義

### 2.1 ロボットのモデル

本論文で扱うロボットモデルについて示す。ロボットは、体積を持たない点として扱い二次元平面上を自由に移動できる。また、外見で区別できず、すべてのロボットは同じアルゴリズムを実行する。

ロボットは通信能力を持たず、ロボット群全体の配置を観測する事ができる。また、すべてのロボット共通の座標系をもたず、独自の直交座標系を持つ。

ロボットは待機、観測、計算、移動を一回ずつ順番におこなない（これをサイクルという）、それを繰り返す。ロボットが待機をおこなっているときを、ロボットが待機状態であるといい、待機以外も同様である。ロボットは非同期にそれぞれの状態になる。また、過去のサイクルにおける情報を記憶しておくことができない。

#### 2.1.1 1 サイクルの動作

ロボットの1サイクルの動作について、以下に詳細を述べる。

1. **待機** ロボットは何もしない。初期状態ではすべてのロボットがこの状態である。
2. **観測** 各ロボットの座標を観測する。この観測において、ロボットの視野に制限はなく、他のロボットが視野の邪魔になることはないものとする。ロボットが得る観測結果は、観測を開始した時刻における自らの座標系に対する各ロボットの位置である。
3. **計算** ロボットに与えられたアルゴリズムにより目的地の計算をおこなう。ロボットは過去のサイクルにおける情報を記憶しておくことができないので、アルゴリズムの入力は同一サイクルにおける観測結果のみである。出力は次の移動で向かう目的地の座標点である。
4. **移動** 計算によって出力された目的地に向かって直進する。ただし、移動の速度は非決定的に定まる。また目的地に到達する前に非決定的に停止することがある。その場合、次のサイクルではその位置で新たに観測し目的地の計算をおこなう。

上の4状態は任意の時刻で変化する可能性があり、また移動においての停止もどこでおきるかわからない。状態変化の時刻と移動の仕方の一例をスケジュールという。ここで移動の仕方とは、移動に関する非決定的な要因である。

#### 2.1.2 ロボットモデルの仮定

有限時間以内で問題が解けることを保証するために、ロボットのサイクルの時間と移動距離について制限する仮定を置く。ただし、以下の仮定で使われている  $\varepsilon$  と  $\delta$  についてロボットは知らない。また、 $\varepsilon$  と  $\delta$  はすべてのロボットで共通の値とする。

**仮定 1 (時間)** ロボットがサイクルを終えるのに必要な時間は少なくとも定数  $\varepsilon (> 0)$  以上であり、かつ、有限である。

**仮定 2 (距離)** ロボットが一度の移動で進む距離は少なくとも定数  $\delta (> 0)$  以上である。ただし、計算した目的地までの距離が  $\delta$  より短い場合には、その移動で目的地に到達する。

ロボットのサイクルは予測できない有限時間以内で終了し、ロボットは完全に非同期で動作をする。そして、ロボットの移動距離は予測できない長さである。また、あるサイクルでの移動で目的地に到達できなかった場合でも、以降のサイクルで同じ目的地を目指すならば有限時間以内でその目的地に到達できる。

#### 2.1.3 ロボットの座標系

本論文で扱うロボット群は、独自の  $x$ - $y$  直交座標系を持ち、他のロボットと一致するとは限らない。

すべてのロボットは、それぞれ一つのコンパスを持つ。ロボットの座標系は、コンパスが指し示す方向と  $y$  軸の正の方向が常に一致するような座標系であるとす。つまり、コンパスの指し示す方向が変化した場合、ロボットの座標系の軸の角度もそれに伴って変化する。本論文では、時刻によってコンパスの指し示す方向即ち、ロボットの座標系の軸の角度が時刻によって変化するモデルを考える。

本論文で扱うロボットの座標系をまとめると次のようになる。

- 系はすべてのロボットが右手系で一致している。
- 単位距離は一致しているとは限らない。
- 原点は、ロボット自身のその時刻での位置とする。
- 軸の方向は一致しているとは限らない。そしてコンパスの指す方向に依存する。

### 2.1.4 ロボットの移動モデル

ロボットの移動の仕方について考える。計算によって求めた目的地の座標点  $p$  に向かって移動する方法として、以下の二通りが考えられる。

- (a) **ロボットのローカルな座標系に依存する移動**  
移動状態の間、その時点の座標系において  $p$  に向かって移動するモデル。移動状態の間にロボットの座標系が変化した場合、変化した座標系に従って移動の軌跡は複雑に変化し得る。
- (b) **ロボットのローカルな座標系に依存しない移動**  
現在の位置から移動開始時の座標における  $p$  への相対的移動ベクトルに従って移動するモデル。例えば右のタイヤを5回、左を2回回転せよ、などと、一端、駆動命令を出すと駆動装置はそのまま進むことが想定される場合のモデル。

本研究では、上記の (a) ロボットのローカルな座標系に依存する移動モデルを扱う。

## 2.2 コンパスの故障モデル

コンパスとは、ある一つの方向を指し示す機構であり、ロボットはいつでもコンパスが指し示す方向が  $y$  軸と一致する座標系を持つとする。

理想的なコンパスは、絶対的な方向（一般的には北）が存在し、すべてのコンパスが常にその方向を指し示すコンパスである。

本論文では、故障したコンパスを扱う。以下に任意の時刻に指し示す方向が変化するコンパスや、複数のコンパス間で指し示す方向が一致していないようなコンパスを定義する。

### 2.2.1 動的なコンパス

**定義 1 (Full Dynamic Compass (FDC))** 任意の時刻で指し示す方向が変化する可能性のあるコンパスを *Full Dynamic Compass* とする。

**定義 2 (Semi Dynamic Compass (SDC))** 任意のサイクルで指し示す方向が変化する可能性のあるコンパスを *Semi Dynamic Compass* とする。*SDC* は、1 サイクルの間は指し示す方向が変化しない。

**定義 3 (Fixed Compass (FXC))** すべてのサイクルで指し示す方向が変化しないコンパスを *Fixed Compass* とする。

2.1.4 で (a) ロボットのローカルな座標系に依存する移動を仮定したため、FDC を持つロボットの移動は、計算状態と移動状態の間にコンパスの変化が発生した場合、本来向かおうとしていた目的地に向かって、移動することが保証されない。これに対して、SDC と FXC は計算状態で計算した目的地に向かって移動することが保証される。

### 2.2.2 不一致なコンパス

**定義 4 ( $\alpha$ -相対不一致コンパス)** ロボット群のコンパスが  $\alpha$ -相対不一致コンパスであるとは、任意の二台のロボットのコンパス間で指し示す方向の角度の違いが、高々  $\alpha$  である場合をいう。

**定義 5 ( $\alpha$ -絶対不一致コンパス)** ロボット群のコンパスが  $\alpha$ -絶対不一致コンパスであるとは、コンパスとは独立に絶対座標が存在するものとし、すべてのロボットのコンパスが絶対座標の  $y$  軸の正方向ベクトルとの方向の角度の違いが高々  $\alpha/2$  である場合をいう。

どちらのモデルも、二台のロボットのコンパス間で指し示す方向の違いが、高々  $\alpha$  である。本論文では、各々のロボットが持つコンパスは、上記に示す通り時刻によって非決定的に変化し得る。したがって、非決定的なコンパス変化もスケジュールの一部に含める。

## 2.3 一点集合問題

一点集合問題とは、任意の位置に配置されたロボット群をあらかじめ決められていないある一点に集合させる問題である。一点集合問題を解くアルゴリズムとは、任意のスケジュールおよび、任意の初期配置で、有限時間内にすべてのロボットを一点に集合させるようなアルゴリズムである。

FDC を持つロボット群は、 $\alpha$ -絶対不一致 ( $\alpha > 0$ ) または  $\alpha$ -相対不一致 ( $\alpha \geq 0$ ) コンパスにおいて、一点集合問題が非可解なのは容易に示される。これは移動中の任意の時刻にコンパス変化が起こり得るため、どんなアルゴリズムを用いても、一点集合するスケジュールに対し、最後の集合時刻直前で進む方向をずらされ得るためである。よって、以下では、SDC と FIX の場合について考える。

## 2.4 諸定義

### 回転の向き

原点から  $x$  軸の正方向のベクトルを  $y$  軸の正方向へ傾けるときの回転を正の方向の回転とする。逆に、 $y$  軸の負の方向へ傾けるときの回転を負の方向の回転とする。

### 方向の定義

原点から点  $p$  へのベクトルが、 $x$  軸の正方向のベクトルからの回転の角度を  $d$  とするとき、点  $p$  は方向  $d$  に存在すると表す。

## 3 一点集合の可解性

本章では、 $\alpha$ -相対不一致 FXC と、 $\alpha$ -絶対不一致 SDC の場合の一点集合問題の可能性について述べ

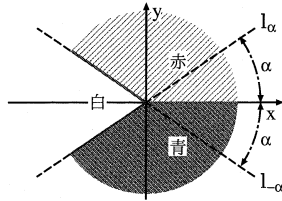


図 1: 直線  $l_\theta$  と  $\alpha$ -彩色

る。まず 3.1 節で  $\alpha$ -相対不一致 FXC または、 $\alpha$ -絶対不一致 SDC を持つ場合の一点集合アルゴリズムを示す。なお、本節と次節の証明は紙面の都合上省略している。完全な証明については文献 [16] に示す通りである。

### 3.1 アルゴリズム

アルゴリズムを示すためにいくつかの定義をする。

**定義 6 (直線  $l_\theta$ )** ある  $x$ - $y$  直交座標系に対して、原点を通り、 $x$  軸の正方向のベクトルとの角度が  $\theta$  となる直線を  $l_\theta$  と表す。

**定義 7 ( $\alpha$ -彩色)** ある正の角度の値  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha < \pi$ ) に対して、次のように方向に色を与えることを  $\alpha$ -彩色と呼ぶ。0 以上  $(\pi - \alpha)$  未満の方向を“赤の方向”， $(\pi - \alpha)$  以上  $(\pi + \alpha)$  未満の方向を“白の方向”， $(\pi + \alpha)$  以上  $2\pi$  未満の方向を“青の方向”とする。ただし、0-彩色の場合、白の方向がないものとする(図 1)。

定義 6, 定義 7 を用いて、一点集合アルゴリズムを図 2 に示す。ただし図 2 のアルゴリズムには二つのパラメータ  $\alpha, \theta$  が存在し、それらの値によって  $\alpha$ -相対不一致 FXC または  $\alpha$ -絶対不一致 SDC の一点集合アルゴリズムに適用できる。

$(\alpha, \theta)$ -アルゴリズムは、相手のロボットを観測した方向によって動作が分岐している。観測した方向が、赤の場合は移動せず、青の場合は相手のロボットの位置を目的地として移動する。そして、観測した方向が白の場合は、直線  $l_\theta$  上を図 3 のように移動する。この移動を調整移動と呼ぶ。この調整移動は  $\alpha$  と  $\theta$  の値によって目的地が定まる。

図 2 のアルゴリズムから得られる補題を示す。

**補題 1 (赤赤と青青の不可能性)**  $\alpha$ -相対不一致コンパスを持つ二台のロボット  $r_1, r_2$  に対して、 $\alpha$ -彩色による、 $r_1$  に対する  $r_2$  の方向が赤の方向のとき、 $r_2$  に対する  $r_1$  の方向は赤の方向ではない。同様に、 $r_1$  に対する  $r_2$  の方向が青の方向のとき、 $r_2$  に対する  $r_1$  の方向は青の方向ではない。

**補題 2 (調整移動)** 二台のロボット  $r_1, r_2$  に対して、 $r_1$  が  $(\alpha, \theta)$ -アルゴリズムの調整移動を行なうとき、 $r_2$  が移動しないか、 $r_1$  の位置に向かって移動するかの

```

if(周りにロボットを観測していない) {
    動かない;
} else {
    d = 相手ロボットを観測した方向;
    if(0 ≤ d < π - α) { // 赤の場合
        動かない;
    } else if (π + α ≤ d < 2π) { // 青
        p = 相手ロボットの位置;
        Move(p);
    } else if (π - α ≤ d < π + α) { // 白
        p = 相手ロボットの位置;
        l = p を通り l_α と平行な直線;
        p' = l と l_θ の交点;
        p'' = 原点に対して、p' から単位距離
            離れた l_θ 上の点;
        Move(p'');
    }
}

```

図 2:  $(\alpha, \theta)$ -アルゴリズム

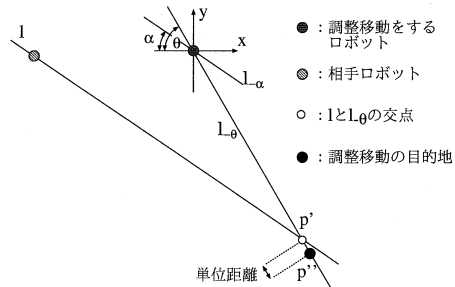


図 3: 調整移動

どちらかの動作をしかなければ、 $r_1$  に対する  $r_2$  の方向  $d$  は、必ず減少する。また、 $d = \theta$  のとき最小となる。

**補題 3** 二台のロボット  $r_1, r_2$  に対して、 $r_1$  の座標系の方向  $d$  に  $r_2$  が存在し、かつ  $r_2$  の座標系が  $r_1$  の座標系に対して  $\beta$  回転しているとき、 $r_2$  の座標系に対して  $r_1$  は  $d + \pi - \beta$  の方向に存在する。

### 3.2 FXC の可解性

本節では、 $(\alpha, \theta)$ -アルゴリズムが  $\alpha < \pi/2$  のとき  $\alpha$ -相対不一致 FXC を持つ二台のロボットに対して、有限時間内に一点に集合できることを証明する。

アルゴリズムの正当性の証明のために、二台のロボットの相対的な配置の状況を定義する。

**定義 8 (相対状況)** 二台のロボット  $r_1, r_2$  について、一方のロボット  $r_1$  を基準とし、 $r_1$  に対して、もう一方のロボット  $r_2$  が存在する方向を  $d$ 、 $r_1$  の座標

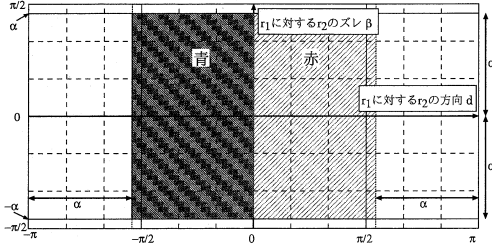


図 4:  $\alpha < \pi/2$  のマップ ( $r_1$  に対する彩色)

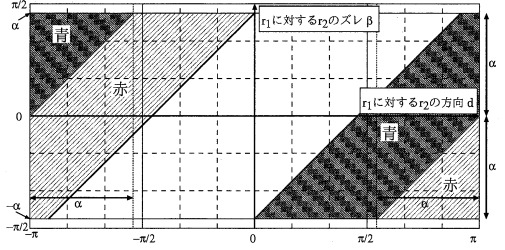


図 5:  $\alpha < \pi/2$  のマップ ( $r_2$  に対する彩色)

系に対して  $r_2$  の座標系が  $\beta$  回転しているとき、相対状況を  $(d, \beta)$  と表す。

本論文では、以下二台のロボットと  $r_1, r_2$  に対する相対状況表記するとき、常に  $r_1$  を基準にしているものとする。

ある相対状況  $(d, \beta)$  は、二つの値  $d$  と  $\beta$  によって決められている。そこで、 $d$  を表すパラメータと  $\beta$  を表すパラメータをそれぞれ軸とする平面を考える (横軸を  $r_1$  に対する  $r_2$  の方向  $d$ 、縦軸を  $r_1$  に対する  $r_2$  の座標系の回転  $\beta$  とする)。この平面を状況マップと呼ぶ。

状況マップ上の点は、 $d$  と  $\beta$  が一つずつ決定している状態なので、一つの相対状況を表す。

まず、 $\alpha < \pi/2$  における、状況マップを考える。二台のロボットのコンパスのズレの角度  $\beta$  は  $\alpha$  以下であるため、状況マップの縦軸の範囲は  $-\alpha \leq \beta \leq \alpha$  である。方向  $d$  は  $-\pi \leq d < \pi$  の範囲とする (図 4)。

一つの相対状況は、二台のロボット  $r_1, r_2$  に対して  $r_1$  に対する  $r_2$  の方向と、補題 3 より  $r_2$  に対する  $r_1$  の方向が一意に決定している。つまり、一つの相対状況は  $\alpha$ -彩色によって、 $r_1$  に対する  $r_2$  の方向の色と、 $r_2$  に対する  $r_1$  の方向の色が決定している。

マップ上のある点  $(d, \beta)$  において、 $0 \leq d < \pi - \alpha$  を満たす領域は  $r_1$  に対して  $r_2$  が赤の方向に存在する状況を表し、 $\pi - \alpha \leq d < \pi + \alpha$  を満たす領域は白の方向を、 $\pi + \alpha \leq d < 2\pi$  を満たす領域は青の方向を表している (図 4)。

次に、補題 3 より  $d + \pi - \beta$  に対して、 $0 \leq d + \pi - \beta < \pi - \alpha$  を満たす領域は  $r_2$  に対して  $r_1$  が赤の方向に存在する状況を表している。この領域を赤色で塗ると図 5 のようになる。白と青の場合も同様にして、状況マップに色をつける (図 5)。

ここで、図 5 のマップの青色の領域で、かつ、 $0 \leq d < \pi - \alpha$  の領域を考える。この領域は  $r_2$  の座標系に対して  $r_1$  が青の方向に存在し、 $r_1$  の座標系に対しては  $r_2$  は赤の方向に存在する。つまり一方が赤、もう一方が青の方向に相手を観測しているため、この領域内の相対状況はその後有限時間内に一点に集合する。同様にして、図 5 のマップの赤色の領域で、かつ、 $-\pi + \alpha \leq d < 0$  の領域も有限時間内に一点に集合する。

$r_1$  の座標系に対して  $r_2$  が白の方向に存在するとき (図 4 の白の領域  $(d, \beta)$ ,  $\pi - \alpha \leq d < \pi + \alpha$ ),  $r_1$

が調整移動を行なうと、補題 2 より相対状況  $(d', \beta)$ ,  $\pi/2 \leq d' < \pi - \alpha$  となる。このとき  $\beta \leq 0$  ならば、 $r_1$  の赤の方向に  $r_2$  が存在し、 $r_2$  の青の方向に  $r_1$  が存在するような配置になるため、その後一点に集合する。

$r_2$  の座標系に対して  $r_1$  が白の方向に存在するとき (図 5 の白の領域  $(d, \beta)$ ,  $\pi - \alpha \leq d + \pi - \beta < \pi + \alpha$ ),  $r_2$  が調整移動を行なうと、補題 2 より相対状況  $(d', \beta)$ ,  $\pi/2 \leq d' + \pi - \beta < \pi - \alpha$  となる。このとき  $0 \leq \beta$  ならば、 $r_2$  の赤の方向に  $r_1$  が存在し、 $r_1$  の青の方向に  $r_2$  が存在するような配置になるため、その後一点に集合する。

よって、どんな  $\beta$  ( $-\alpha \leq \beta \leq \alpha$ ) でも、有限時間内に  $(\alpha, \pi/2)$ -アルゴリズムによって一点に集合する。

**定理 1** 任意の  $\alpha < \pi/2$  に対して  $\alpha$ -相対不一致 FXC を持つ二台のロボットは、 $(\alpha, \pi/2)$ -アルゴリズムによって有限時間内に一点に集合する。

故障コンパスのモデルの包含関係より以下の系が成り立つ。

**系 1** 任意の  $\alpha < \pi/2$  に対して  $\alpha$ -絶対不一致 FXC を持つ二台のロボットは、 $(\alpha, \pi/2)$ -アルゴリズムによって有限時間内に一点に集合する。

### 3.3 $\alpha$ -絶対不一致 SDC の可解性

本節では、 $(\alpha, \theta)$ -アルゴリズムが  $\alpha < \pi/3$ ,  $\theta = \pi/3$  のとき  $\alpha$ -絶対不一致 SDC を持つ二台のロボットに対して、有限時間内に一点に集合できることを証明する。前節の FXC の状況マップと同様にして、 $\alpha < \pi/3$  における状況マップを図 6 に示す。

SDC の場合、コンパスの変化がロボットの動作中に起こり得る。コンパスの変化が起こると、相対状況も変化する。また、 $\alpha$ -絶対不一致の場合は、絶対軸に対して  $-\alpha/2$  から  $\alpha/2$  まで変化し、変化の範囲に制限がある。

いま、 $r_1, r_2$  のコンパスがともに絶対軸と一致している場合を考え、コンパスの変化と、状況マップ上の相対状況  $(d, \beta)$  の変化を図 6 とともに示す。

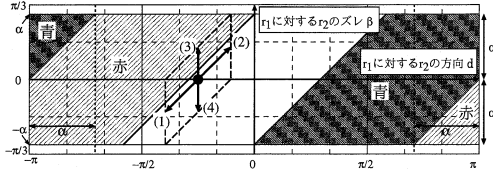


図 6:  $\alpha < \pi/3$  の状況マップ

- (1)  $r_1$  が  $\alpha/2$  回転した場合  
相対状況は  $\langle d - \alpha/2, \beta - \alpha/2 \rangle$  となり、状況マップ上の点は左下へ遷移する。
- (2)  $r_1$  が  $-\alpha/2$  回転した場合  
相対状況は  $\langle d - \alpha/2, \beta - \alpha/2 \rangle$  となり、状況マップ上の点は右上へ遷移する。
- (3)  $r_2$  が  $\alpha/2$  回転した場合  
相対状況は  $\langle d, \beta + \alpha/2 \rangle$  となり、状況マップ上の点は上へ遷移する。
- (4)  $r_2$  が  $-\alpha/2$  回転した場合  
相対状況は  $\langle d, \beta - \alpha/2 \rangle$  となり、状況マップ上の点は下へ遷移する。

$r_1, r_2$  のコンパスがともに絶対軸と一致している場合から、 $\alpha$ -絶対不一致の制限の下、自由なコンパスの変化を考えると、図 6 の (1) ~ (4) のベクトルの合成で作られる平行四辺形内の任意の点へ相対状況は遷移する。他の角度（絶対軸に対する  $r_1, r_2$  のズレ）においても、同様な平行四辺形になる。また、ロボットが移動しなければ、平行四辺形の位置は変化することはない。

このように、 $\alpha$ -絶対不一致コンパスを考慮した状況マップは、相対状況を表す点と絶対軸からのコンパスの方向を表す平行四辺形の領域によって状況を表す。

また、FXC の場合と同様にロボットの調整移動によって、相対状況は、方向  $d$  が減少するように状況マップ上を左へ遷移する。このとき、平行四辺形の領域も相対状況の点と一緒に遷移する。

図 7 の破線で囲まれた領域は、一方は赤、もう一方は青の領域である。 $r_1, r_2$  のどちらかが調整移動をし、図 7 の破線の領域に平行四辺形がすべて収まったとき、 $r_1, r_2$  のコンパスが  $\alpha$ -絶対不一致の制限の下で自由に方向が変化しても、必ず一方は赤、もう一方は青となる状況になり一点に集合する。

**定理 2** 任意の  $\alpha < \pi/3$  に対して  $\alpha$ -絶対不一致 SDC を持つ二台のロボットは、 $(\alpha, \pi/3)$ -アルゴリズムによって有限時間内に一点に集合する。

### 3.4 $\alpha$ -絶対不一致 SDC の可解性

本節では、 $\alpha$ -絶対不一致 SDC の  $\alpha = 0$  における一点集合可解性について示す。定義 7 より、0-彩色

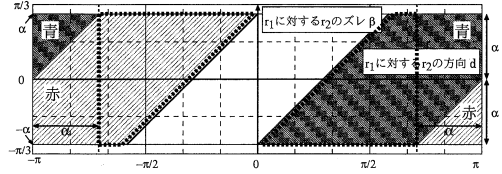


図 7: コンパスが変化しても赤青となる領域

には白の方向が存在しないため、 $(0, \theta)$ -アルゴリズムに調整移動はなく、補題 1 より一方のロボットは相手を赤の方向に、もう一方のロボットは相手を青の方向に必ず排他的に観測する。

**定理 3** 0-相対不一致 FXC を持つ二台のロボットは、 $(0, \theta)$ -アルゴリズムによって有限時間内に一点に集合する。

## 4 一点集合非可解性

本節では、任意の  $\alpha > 0$  に対して、 $\alpha$ -絶対不一致 SDC を持つ二台のロボットに対する一点集合アルゴリズムが存在しないこと、および任意の  $\alpha \geq \pi/2$  に対して、 $\alpha$ -絶対不一致 SDC を持つ二台のロボットに対する集合アルゴリズムが存在しないことを示す。

### 4.1 諸定義

本節では、偏角  $\theta$  の値域が  $0 \leq \theta < 2\pi$  であるような極座標系での座標表現を用いる。

本章では、二台のロボットをロボット A、ロボット B と表記する。ある状況において二台のロボットがどちらも待機状態にある場合、その状況を安定な状況と呼ぶ。本論文で考えているロボットは記憶を持たないため、ある安定な状況は、ロボット A の座標系における B の座標  $(d_A, \theta_A)$ 、ロボット B の系におけるロボット A の座標  $(d_B, \theta_B)$ 、絶対座標系に対するロボット A の座標系のズレの角度を  $\phi_A$ 、絶対座標系に対するロボット B の座標系のズレの角度を  $\phi_B$  の 4 つ組で表すことができる。すなわち、安定な状況  $C$  は、 $(d_A, \theta_A, d_B, \theta_B, \phi_A, \phi_B)$  ( $0 \leq \theta_A < 2\pi, 0 \leq \theta_B < 2\pi$ ) のような形式で記述する。ある状況  $C = (d_A, \theta_A, d_B, \theta_B, \phi_A, \phi_B)$  における最初の 2 項の組  $(d_A, \theta_A)$  を状況  $C$  の A による観測座標と呼び、 $\Gamma_A(C)$  で表す。同様にして中の 2 項  $(d_B, \theta_B)$  を状況  $C$  の B による観測座標と呼び、 $\Gamma_B(C)$  で表す。また、後ろの 2 項  $(\phi_A, \phi_B)$  を状況  $C$  の角度誤差と呼び、 $\angle(C)$  で表す。

**定義 9** (許容可能な状況 ( $\alpha$ -絶対不一致 SDC))

二台のロボットが持つコンパスが  $\alpha$ -絶対不一致 SDC であるとする。このときある安定な状況  $C = (d_A, \theta_A, d_B, \theta_B, \phi_A, \phi_B)$  について、 $|(\theta_A - \phi_A) - (\theta_B - \phi_B)| = \pi$ 、かつ  $|\phi_A - \phi_B| \leq \alpha$  であるとき、状況  $C$  を許容可能な安定状況と呼ぶ。

**定義 10 (許容可能な状況 ( $\alpha$ -絶対不一致 SDC))** 二台のロボットが持つコンパスが  $\alpha$ -絶対不一致 SDC であるとする. このときある安定な状況  $C = (d_A, \theta_A, d_B, \theta_B, \phi_A, \phi_B)$  について,  $|(\theta_A - \phi_A) - (\theta_B - \phi_B)| = \pi$ ,  $-\alpha/2 \leq \phi_A \leq \alpha/2$ ,  $-\alpha/2 \leq \phi_B \leq \alpha/2$  であるとき, 状況  $C$  を許容可能な安定状況と呼ぶ.

直感的には, ある状況  $C$  がコンパス  $X$  をもつロボット群において許容可能であるとは,  $X$  を持つ二台のロボットにおいて, その状況が実際に起こりえることを意味する. 以下, 特に断りが無い限り, “状況”とは許容可能な状況の意味するものとする. また, 全ての許容可能な状況の集合を  $\mathcal{C}$  とする.

本節の議論では, 以下のような条件を満たすような実行のみを考える<sup>1</sup>.

- 任意の 1 回の移動動作は, 必ず目的地に到達する. すなわち, 移動は十分に速く, 移動途中で自身の 1 サイクルが終了することはない.
- ある安定な状況から起こりえる状況変化は, (1) コンパスの変化, (2) ロボット A, B のいずれか一方が 1 サイクルを実行, (3) ロボット A, B の両方が同時に 1 サイクルを実行 (すなわち, A が観測, B が観測, A が計算, B が計算, A が移動, B が移動, という順序でロボット A, B がそれぞれの 1 サイクルを実行), の 3 通りだけである.

上記のような条件を満たす実行は, 安定な状況が, ロボットの移動, あるいはコンパスのズレの変化により, 別の安定な状況へと決定的に遷移するということの繰り返しにより記述できる. すなわち, アルゴリズムの実行は, 安定な状況  $C_i$  とその決定性遷移を引き起こすイベント  $e_i$  の交代列  $C_0, e_0, C_1, e_1, C_2, \dots$  により表すことができる. ここでイベントとは, 以下に定義される 4 種類のいずれかである.

**A-単体移動** ロボット A のみが 1 サイクルを実行する.  $e_A$  と記述する.

**B-単体移動** ロボット B のみが 1 サイクルを実行する.  $e_B$  と記述する.

**同時移動** ロボット A, B が同時に 1 サイクルを実行する.  $e_C$  と記述する.

**コンパス変化** ロボット A, B のコンパスがそれぞれ正の回転方向に  $\phi_A, \phi_B$  回転する.  $e_D(\phi_A, \phi_B)$  と記述する.

今, ある一点集合アルゴリズム  $\mathcal{A}$  を考える. このとき, ある状況において移動イベント ( $e_A, e_B, e_C$ ) による遷移が生じたとき, 遷移後の状況は  $\mathcal{A}$  により一意に決定される. この意味において, 本節で考える一点集合アルゴリズムは, 現状況, および移動イベントを入力値として次状況を返す状態遷移関数  $\delta_{\mathcal{A}} : \mathcal{C} \times \{e_A, e_B, e_C\} \rightarrow \mathcal{C}$  と見なすことができ

<sup>1</sup>これは鈴木・山下のモデルの実行に相当する

る. 現れる全ての状況が許容可能であるような実行  $E = C_0, e_0, C_1, e_1, C_2, \dots$  において, 実行中の任意のイベント  $e_j$  に対して  $e_j$  が移動イベントのとき  $C_{j+1} = \delta_{\mathcal{A}}(e_j, C_j)$  であり,  $e_j$  がコンパス変化  $e_D(\phi'_A, \phi'_B)$  のとき  $C_j = (d_A, \theta_A, d_B, \theta_B, \phi_A, \phi_B)$  かつ  $C_{j+1} = (d_A, \theta_A, d_B, \theta_B, \phi_A + \phi'_A, \phi_B + \phi'_B)$  であるとき,  $E$  をアルゴリズム  $\mathcal{A}$  の実行と呼ぶ. また, 無限長の実行  $E$  において,  $e_A$  と  $e_B$  がともに無限回生起する. あるいは  $e_C$  が無限回生起するとき,  $E$  を許容可能な実行と呼ぶ.

### 定義 11 (停止ベクトル)

$\mathcal{A}$  を一点集合アルゴリズムとし, ある状況  $C = (d_A, \theta_A, d_B, \theta_B, \phi_A, \phi_B)$  から始まる  $\mathcal{A}$  の実行  $C, e_A$  (または  $e_B$ ),  $C'$  を考える. このとき  $C = C'$  ならば, 座標ベクトル  $(d_A, \theta_A)$  (または  $(d_B, \theta_B)$ ) をアルゴリズム  $\mathcal{A}$  の停止ベクトルと呼ぶ.

直感的には, 停止ベクトル  $v$  とは, 自分の座標系において相手を  $v$  の位置に観測し続ける限り, 自身が停止を続けるようなベクトルである. 停止ベクトルでないベクトルを移動ベクトルと呼ぶ.

**補題 4**  $\mathcal{A}$  を  $\alpha$ -不一致なコンパスを持つ二台のロボットの一点集合アルゴリズムとする ( $\alpha > 0$ , コンパスは絶対, 相対を問わない).  $(d_1, \theta_1), (d_2, \theta_2)$  を  $\mathcal{A}$  の停止ベクトルとすると,  $|\theta_1 - \theta_2| < \pi - \alpha$  である.

## 4.2 $\alpha$ -相対不一致 SDC の非可解性

補題 4 より, 以下の系が成り立つ.

**系 2**  $\mathcal{A}$  を  $\alpha$ -相対不一致なコンパスを持つ二台のロボットの一点集合アルゴリズムとする. このとき, 任意の  $d_1, d_2 (\neq 0)$  について  $(d_1, \theta), (d_2, (\theta + \pi \bmod 2\pi))$  の両方が  $\mathcal{A}$  の移動ベクトルとなるような角度  $\theta$  が存在する.

**補題 5**  $\alpha > 0$  とする.  $\mathcal{A}$  を  $\alpha$ -相対不一致 SDC を持つ二台のロボットの一点集合アルゴリズムとする. このとき, 永遠に集合を達成しない,  $\mathcal{A}$  の許容可能な無限実行が存在する.

補題 5 より, 以下の定理が成り立つ.

**定理 4** 任意の  $\alpha > 0$  に対して,  $\alpha$ -相対不一致 SDC を持つ二台のロボットに対する一点集合アルゴリズムは存在しない.

## 4.3 $\alpha$ -絶対不一致 SDC の非可解性

補題 4 より, 以下の系が成り立つ.

**系 3**  $\mathcal{A}$  を  $\alpha$ -絶対不一致 SDC を持つ二台のロボットの一点集合アルゴリズムとする ( $\alpha \geq \pi/2$ ). このとき,  $(d, \theta)$  が  $\mathcal{A}$  の停止ベクトルであるならば, 任意の  $d'$  について,  $(d', (\theta + \pi/2) \bmod 2\pi), (d', (\theta - \pi/2) \bmod 2\pi)$  は  $\mathcal{A}$  の移動ベクトルである.

表 1: 一点集合問題の可解性

	$\alpha$ -絶対不一致	$\alpha$ -相対不一致
FXC	可解 ( $\alpha < \pi/2$ ) 系 1	可解 ( $\alpha < \pi/2$ ) 定理 1
	非可解 ( $\alpha = \pi$ ) 文献 [6]	非可解 ( $\alpha = \pi$ ) 文献 [6]
SDC	可解 ( $\alpha < \pi/3$ ) 定理 2	可解 ( $\alpha = 0$ ) 定理 3
	非可解 ( $\alpha \geq \pi/2$ ) 定理 5	非可解 ( $\alpha > 0$ ) 定理 4
FDC	可解 ( $\alpha = 0$ )	
	非可解 ( $\alpha > 0$ ) 文献 [15]	非可解 ( $\alpha \geq 0$ ) 文献 [15]

**補題 6**  $\alpha \geq \pi/2$  とする。  $\mathcal{A}$  を  $\alpha$ -絶対不一致 SDC を持つ二台のロボットの一点集合アルゴリズムとする。このとき、永遠に集合を達成しない、 $\mathcal{A}$  の許容可能な無限実行が存在する。

補題 6 より、以下の定理が成り立つ。

**定理 5** 任意の  $\alpha \geq \pi/2$  に対して、 $\alpha$ -絶対不一致 SDC を持つ二台のロボットに対する一点集合アルゴリズムは存在しない。

## 5 おわりに

本研究では、コンパスの故障モデル [15] に基づいてそれぞれのモデルにおいての一点集合問題の可解性と非可解性について示した。表 1 にその結果をまとめる。

今後の課題として、 $\alpha$ -絶対不一致 SDC を持つ場合の  $\pi/3 \leq \alpha < \pi/2$  の可解性について、および、ロボットが三台以上の場合の可解性を求めることなどが考えられる。

## 参考文献

[1] I. Suzuki and M. Yamashita. Distributed anonymous mobile robots: Formation of geometric patterns. *SIAM Journal on Computing*, Vol. 28, No. 4, pp. 1347–1363, 1999.

[2] G. Prencipe. Corda: Distributed coordination of a set of autonomous mobile robots. In *ERSADS 2001*, pp. 185–190, 2001.

[3] G. Prencipe. *Distributed Coordination of a Set of Autonomous Mobile Robots*. PhD thesis, Università di Pisa, 2002.

[4] P. Flocchini, G. Prencipe, N. Santoro, and P. Widmayer. Gathering of asynchronous oblivious robots with limited visibility. In *STACS 2001, LNCS 2010*, pp. 247–258, 2001.

[5] M. Cieliebak and G. Prencipe. Gathering autonomous mobile robots. In *SIROCCO 2002*, pp. 57–72, 2002.

[6] G. Prencipe. On the feasibility of gathering by autonomous mobile robots. In *SIROCCO 2005*, pp. 246–261, 2005.

[7] P. Flocchini, G. Prencipe, N. Santoro, and P. Widmayer. Pattern formation by autonomous robots without chirality. In *SIROCCO 2001*, pp. 147–162, 2001.

[8] R. Cohen and D. Peleg. Convergence properties of the gravitational algorithm in asynchronous robot systems. In *ESA 2004*, pp. 228–239, 2004.

[9] M. Cieliebak. Gathering non-oblivious mobile robots. In *LATIN 2004, LNCS2976*, pp. 577–588, 2004.

[10] M. Cieliebak, P. Flocchini, G. Prencipe, and N. Santoro. Solving the robots gathering problem. In *ICALP 2003, LNCS2719*, pp. 1181–1196, 2003.

[11] N. Agmon and D. Peleg. Fault-tolerant gathering algorithms for autonomous mobile robots. In *SODA 2004, SIAM*, pp. 1070–1078, 2004.

[12] S. Souissi, X. Défago, and M. Yamashita. Using eventually consistent compasses to gather oblivious mobile robots with limited visibility. In *SSS 2006, LNCS4280*, pp. 484–500, 2006.

[13] 今津裕之, 伊藤暢浩, 片山喜章, 犬塚信博, 和田幸一. 不一致なコンパスを持つ自律分散ロボット群に対する一点集合問題. 第 1 回 情報科学ワークショップ, 2005.

[14] S. Souissi, X. Défago, and M. Yamashita. Gathering asynchronous mobile robots with inaccurate compasses. In *OPODIS 2006, LNCS4305*, pp. 333–349, 2006.

[15] 富田祐一, 今津裕之, 片山喜章, 犬塚信博, 和田幸一. 時間変化する不一致なコンパスを持つ自律分散ロボット群の一点集合問題. 信学技報 COMP2006-45, 2006.

[16] 富田祐一. 故障したコンパスを持つ自律分散ロボット群の一点集合問題に関する研究. 平成 18 年度 名古屋工業大学 修士論文, 2007.