2部グラフの細分の$(d,3)$トラックレイアウト

宮内 美樹
日本電信電話株式会社 NTT コミュニケーション科学基礎研究所
〒243-0198 神奈川県厚木市森の里 3-1
E-mail: miyauchi@theory.brl.nt.co.jp

あらまし グラフの細分のトラックイアウトについては，最近，Dujmovic と Wood によって，任意のグラフ G にたいし，各辺が $1+2\lceil\log_d qn(G)\rceil$ 個の細分点を持つ G の細分の$(d,3)$-トラックレイアウトが存在することが示された．本論文では２部グラフに対してこの結果を改良し，m 頂点，n 頂点$(m\geq n)$からなる部集合を持つ任意の２部グラフ $G_{m,n}$ に対して，各辺が $\lceil\log_d n\rceil$-1 個の細分点を持つ $G_{m,n}$ の細分の$(d,3)$-トラックレイアウトが存在することを示す．

キーワード グラフドローイング，２部グラフ，グラフの細分，グラフのトラックレイアウト

$(d,3)$-track layout of bipartite graph subdivisions

Miki MIYAUCHI
NTT Communication Science Laboratories, NTT Corporation
3-1, Morinosato Wakamiya, Atsugi-shi, Kanagawa Pref., 243-0198 Japan
E-mail: miyauchi@theory.brl.ntt.co.jp

Abstract. This paper studies the problem of track layout of bipartite graph subdivisions. Recently Dujmovic and Wood showed that every graph G has a $(d,3)$-track subdivision with $1+2\lceil\log_d qn(G)\rceil$ division vertices per edge. This paper improves this result for the case of bipartite graphs $G_{m,n}$ $(m\geq n)$ with m and n partite sets, and shows that for every integer $d\geq 2$, every bipartite graph $G_{m,n}$ $(m\geq n)$ has a $(d,3)$-track subdivision with $\lceil\log_d n\rceil$-1 division vertices per edge.

Keyword graph drawing, bipartite graph, subdivision, track, track layout of graphs

1. はじめに

グラフ $G=(V,E)$の頂点集合 V を２つの部分集合 A と B に分けて，G の辺がすべて A の頂点と B の頂点とを結ぶ辺になっているようにできるとき G を **2 部グラフ**という．この分割集合 A, B を**部集合**と呼び，A, B の頂点の個数がそれぞれ m, n のとき，$G=G_{m,n}$で表す．もし G が A の頂点と B の頂点を結ぶ辺を全て含んでいれば G は**完全 2 部グラフ**と呼ばれ $G=K_{m,n}$ で表す．

グラフ G の辺上に次数２の頂点を幾つか付け加えて得られるグラフを G の**細分**という．付け加えられた次数２の頂点を**細分点**と呼ぶ．グラフはまたそれ自身の細分ともみなす．

集合 S における２項関係$\leq_\sigma$が次の性質を満たすとき**順序**という．

1. 反射律 $s\leq_\sigma s$
2. 反対称律 $s\leq_\sigma t$, $t\leq_\sigma s$ ならば $s=t$

3. 推移律 $s \leq_\sigma t$, $t \leq_\sigma u$ ならば $s \leq_\sigma u$

順序を持つ集合を**順序集合**といい，$(S, \leq_\sigma)$ などと表す．$s \leq_\sigma t$, $s \neq t$ であるとき，$s <_\sigma t$ と表す．S 上の順序がさらに次の性質を持つとき，**全順序**といい，S を**全順序集合**という．

4. Sの任意の2つの元s,tにたいして，$s \leq_\sigma t$ または $t \leq_\sigma s$ のいずれかが成り立つ．

集合 S の**全順序**というのは，S 上の全順序$\leq_\sigma$のことをさす．集合 S はσによって順序付けられているというように，全順序$\leq_\sigma$のことを簡単に全順序σとも書くことにする．グラフ G の**頂点順序**というのは，頂点集合 $V(G)$上の全順序σのことである．

頂点集合 $V(G)$の分割$\{V_i : 1 \leq i \leq t\}$が G の**頂点 t-彩色**であるとは，任意の辺 $vw \in E(G)$に対して，$v \in V_i$ かつ $w \in V_j$ ならば $i \neq j$ が成り立つときのことを言う． G の頂点 t-彩色$\{V_i : 1 \leq i \leq t\}$の各部分集合 V_i が $<_i$ によって順序づけられているとき，順序集合 $(V_i, <_i)$ を**トラック**と呼び，$\{(V_i, <_i) : 1 \leq i \leq t\}$ を G の **t-トラック割り当て** と呼ぶ．各部分集合での順序がわかっているときは，単にトラック割り当てを$\{V_i : 1 \leq i \leq t\}$とも表記する．

トラック割り当て$\{(V_i, <_i) : 1 \leq i \leq t\}$において辺 vw の**幅**とは，$|i-j|$のことである．ただし，$v \in V_i$ かつ $w \in V_j$である．

トラック割り当てにおける **X-交差**とは，異なる i と jで $v <_i x$ かつ $y <_j w$ となるような 2 辺 vw と xy のことを言う．$E(G)$の分割$\{E_i : 1 \leq i \leq k\}$ のことを，G の**辺 k-彩色**と言う．辺 $vw \in E_i$ は色 i に彩色されていると言う．グラフ G の **(k, t)-トラックレイアウト**とは，G の t-トラック割り当てと，同色の X-交差を持たない G の辺 k 彩色からなるものを言う．(k, t)-トラックレイアウトを持つグラフのことを **(k, t)-トラックグラフ**という．
G が(k, t)-トラックレイアウトを持つとき，その最小のtを$tn_k(G)$と書く．

本論文では，グラフの細分の$(k,3)$-トラックレイアウトについて検討する．最近，Dujmovic と Wood は，任意のグラフ G に対し次の定理を示した．

定理 1．[Dujmovic & Wood [1]] 任意の整数 $d>0$ と任意のグラフ G に対して，G の細分の$(d,3)$-トラックレイアウトで各辺が $1+2\lceil \log_d qn(G) \rceil$ 個の細分点を持つようなレイアウトが存在する．

2 部グラフ Gのキュー数に関しては Heath と Rosenberg[2]によって次の定理が示された．

定理 2．[Heath & Rosenberg[3]]

$$qn(K_{m,n}) = \min\{\lceil m/2 \rceil, \lceil n/2 \rceil\}$$

定理 1 に定理 2 を代入すると以下の系が得られる．

系 3． 任意の整数 $d>0$ と任意の 2 部グラフ $G_{m,n}$ に対して，$G_{m,n}$ の細分の$(d,3)$-トラックレイアウトで各辺が $1+2\lceil \log_d n - \log_d 2 \rceil$ 個の細分点を持つようなレイアウトが存在する

本論文では 2 部グラフに対してさらに細分点の個数を減らすことを検討し次の定理を示する．

定理 4． 任意の 2 部グラフ $G_{m,n}$ に対して $G_{m,n}$ の細分の$(d,3)$-トラックレイアウトで各辺が$\lceil \log_d n \rceil -1$ 個の細分点を持つようなレイアウトが存在する．但し，m, n はそれぞれ $V(G_{m,n})$の 2 つの部集合の頂点数で $m \geq n$ とする．

2. 定理 4 の証明

それぞれ m 頂点 n 頂点($m \geq n$)からなる 2つの部集合 A と Bを持つ 2 部グラフ $G_{m,n}$ を考える．まず $G_{m,n}$ の細分 $G_{m,n}{}^*$で，各辺の細分点の個数が$\lceil \log_d n \rceil -1$ となるものを次のように構成する． $G_{m,n}$ の各辺(a_s, b_t) $(0 \leq s < m,\ 0 \leq t < n)$を a_s から b_t に，

$$a_s = (s,t;0), (s,t;1), \cdots, (s,t;k-1), (s,t;k) = b_t$$

とこの順序にラベル付けした頂点を新た

に付加して得られる細分 $G_{m,n}{}^{*}$ を考える．ここで $(s,t;0)$ は a_s と，そして$(s,t;k)$は b_tと同一視する．頂点集合 $V(G_{m,n}{}^{*})$の隣接関係は，辺 $a_s,b_t \in E(G)$のとき頂点$(a_s,b_t;i-1)$と $(a_s,b_t;i)$ とを結ぶ$(0 < i \leq k)$.

$V_i=\{ (s,t;i), st \in E(G)\}$とする．

$V(G_{m,n}{}^{*})=\cup_i V_i$

頂点集合 $V(G_{m,n}{}^{*})$に 2 項関係を定義するため，まず数字列に対する幅優先順序を定義する．

集合 S を d 個の整数の集合 $S = \{0, \cdots,d-1\}$とし，S の元からなる数字列の集合を S^*とし， $s \in S^*$ が長さ k $(k>0)$のときは， $s=s_1s_2 \cdots s_k$ と書くことにする，ここで s_iは数字列 s の i 番目の数字である．

集合 S^*上の幅優先全順序<*を次のように定義する．

1. 数字列 s が数字列 t より短い場合には $s<t$ とする．
2. s と t の長さが等しいとき．$s = s_1 s_2 \cdots s_k$, $t= t_1t_2 \cdots t_k \in S^*$とするとき，$s_i$と t_i を順に大小関係を比較し，ある i で s_iと t_iが初めて異なってしかも $s_i < t_i$となるときは，$s<t$ と定義する．

例えば，長さ 2 までの数字列でかつ $d=3$ のとき数字列の全順序<*は，

$$\varepsilon <^* 0 <^* 1 <^* 2 <^* 00 <^* 01 <^* 02 <^* 10 <^* 11 <^* 12 <^* 20 <^* 21 <^* 22$$

となる．但しεは長さ 0 の数字列を表すものとする．

自然数 n に対して，$k=\lceil \log_d n \rceil$と定義する．自然数 s $(0<s<n)$は d 進数表示することで，(必要ならば 0 を幾つか追加して)S^k の元として一意に表すことができる．ここで S^kは S の元からなる長さ k の全ての数字列からなる集合とする．自然数 s の d 進表示を $s_1 \cdots s_k$と表記することにする．また，数字列

$$s= s_1 \cdots s_k \in S^k$$

に対して，$s(i)$を s の最初の i 番目までの数字列を表すものとする．すなわち

$$s(i)= s_1 \cdots s_i,$$

また $s(0)$ は空の数字列εを表すとする．

頂点集合 $V(G_{m,n}{}^{*})$の 2 項関係σを次のように決める．V_i の 2 つの頂点 $(s,t;i)$ と $(p,q;j)$ に対して $(s,t;i) <_{\sigma} (p,q;j)$となるのは次のいずれかの条件を満たすときとする．

1. $t(i) <^* q(j)$
2. $t(i) = q(j)$かつ $s<p$
3. $t(i) = q(j)$かつ $s=p$, $t<q$

補題 5．この 2 項関係σは全順序となる．

証明．まずこの2項関係σは順序となることを示す．まず，$(s,t;i) =(s,t;i)$より反射律

$$(s,t;i) \leq_{\sigma} (s,t;i)$$

を満たす．次に反対称律については，

$$(s,t;i) \leq_{\sigma} (p,q;j)$$

のとき，σの定義より

$$s \leq p,\ t \leq q,\ i \leq j$$

となるから

$$(s,t;i) \leq_{\sigma} (p,q;j) \text{ かつ } (p,q;j) \leq_{\sigma} (s,t;i)$$

ならば $s=p$, $t=q$, $i=j$ となり反対称律

$$(s,t;i) \leq_{\sigma} (p,q;j) \text{ かつ } (p,q;j) \leq_{\sigma} (s,t;i) \text{ ならば} (s,t;i) = (p,q;j)$$

を満たす．次に$(s,t;i)$,$(p,q;j)$, $(r,u;h)$に対して，2 項関係σが推移律を満たすこと

を示す．すなわち，

$$(s,t;i) \leq_\sigma (p,q;j) \qquad (*)$$

かつ

$$(p,q;j) \leq_\sigma (r,u;h) \qquad (**)$$

となるとき

$$(s,t;i) \leq_\sigma (r,u;h) \qquad (***)$$

となることを示す．

(*)より $t(i) \leq^* q(j)$である．$t(i) <^* q(j)$のとき(**)より $q(j) \leq^* u(h)$であるから，$t(i) <^* u(h)$となりσの定義1より(***)を満たす．

$t(i) = q(j)$で $q(j) <^* u(h)$のとき，$t(i) <^* u(h)$となりσの定義1より(***)を満たす．$t(i) = q(j)=u(x)$のとき(**)より $s \leq p$ である．$s<p$ のとき，(**)より $p \leq r$ であるから $s<r$ となりσの定義2より(***)を満たす．

$s=p$ で $p<r$ のとき，$s<r$ となり(***)を満たす．$s=p=r$ のとき(**)より $t \leq q$ である．今 $t<q$ のとき，(**)より $q \leq u$ より $t<u$ となりσの定義3より(***)を満たす．

$t=q$ で $q<u$ のときは，$t<u$ となり(***)を満たす．$t=q=u$ のときは，$(s,t;i) =(r,u;h)$となりやはり(***)を満たす．よって推移律を満たす．ゆえにσは順序である．

順序σが全順序であることを示すためには以下の式が成り立つことを示せばよい．すなわち，$G_{m,n}^*$の任意の2頂点$(s,t;i)$, $(p,q;j)$に対して，

$(s,t;i) \leq_\sigma (p,q;j)$あるいは $(p,q;j) \leq_\sigma (s,t;i)$ (****)

が成り立てばよい．もし $i \neq j$ ならば，幅優先順序の定義から

$$t(i) <^* q(j) \text{ あるいは } q(j) <^* t(i)$$

が成り立つ．よって順序σの定義1より(****)が成り立つ．もし $i=j$ ならば，2つの文字列 $t(i)$ と $q(j)$に対して，

$$t(i) <^* q(j),\ q(j) <^* t(i) \text{あるいは } t(i)=q(j)$$

が成り立つ．ここでもし $t(i) <^* q(j)$あるいは $q(j) <^* t(i)$とすると，順序σの定義1より(****)が成り立つ．また，もし $t(i)=q(j)$とすると2数 s と p に対して，

$$s < p,\ s > p \text{ あるいは } s=p$$

が成り立つ．もし，$s < p$ あるいは $s > p$ とすると，順序σの定義2より(****)が成り立つ．また $s=p$ のときは，2数 t と q に対して，

$$t < q,\ t > q \text{ あるいは } t=q$$

が成り立つ．もし $t < q$ あるいは $t > q$ とすると，順序σの定義3より(*)が成り立つ．もし $t=q$ とすると $(s,t;i)=(p,q;j)$ となりやはり(****)が成り立つ．よって順序σは全順序となる．

□

例えば，完全2部グラフ $K_{4,4}$ (i.e., $k=2$, $d=2$)の細分 $K_{4,4}^*$に対して，その頂点集合$V(X)$の全順序σは次の順序となる．

a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11},
(00,00;1), (00,01;1), (01,00;1), (01,01;1),
(10,00;1), (10,01;1), (11,00;1), (11,01;1),
(00,10;1), (00,11;1), (01,10;1), (01,11;1),
(10,10;1), (10,11;1) ,(11,10;1), (11,11;1),
b_{00}, b_{01}, b_{10}, b_{11}.

補題6 任意の2部グラフ $G_{m,n}$ の細分 $G_{m,n}^*$は，順序集合$\{(V_i, \sigma): 0 \leq i < k\}$と上で定義した辺 d 彩色に対して，(d,k)-トラックレイアウトとなりその最大幅は1である．また，各辺の細分点の個数は$\lceil \log_d n \rceil -1$となる．

証明． 補題5とより順序σは全順序であるから，この順序集合$\{(V_i, \sigma)\}$は $G_{m,n}^*$の k-トラック割り当てとなる．

2部グラフ $G_{m,n}$ の細分 $G_{m,n}{}^*$ の辺 d 彩色については，次のように定める．辺 $((s,t;i\text{-}1)$, $(s,t;i))$ は，数字列 $s(i)$ $(0 < i \leq d)$ を用いて次の式によって定義された色番号 $c(t(i))$ 番とする．

1. $c(\varepsilon)=0$ とする．
2. $c(t(i\text{-}1)\ t_i)=c(t(i\text{-}1))+ t_i \bmod d$

この漸化式から次の式を得ることができる．

$$c(t(i)) =\sum^{i}_{j=1} t_j \bmod d.$$

よって $G_{m,n}{}^*$ がトラックレイアウトを持つことを示すためには，$\{(V_i, \sigma)\}$ において，同じ番号の色を持つ $E(G_{m,n}{}^*)$ の任意の 2 辺 $((s,t;i\text{-}1),(s,t;i))$ と $((p,q;j\text{-}1),(p,q;j))$ $(0 \leq i,j \leq k)$ とが X-交差しないことを示せばよい．注意として，細分点の頂点順序 σ の定義から，

$$(s,t;i\text{-}1) <_\sigma (s,t;i)$$

であり

$$(p,q;j\text{-}1) <_\sigma (p,q;j)$$

が成り立っている．2 辺 $((s,t;i\text{-}1),(s,t;i))$ と $((p,q;j\text{-}1),(p,q;j))$ とが X-交差する可能性があるのは X-交差の定義から，$i=j$ のときのみである．この 2 辺が X-交差しているとする．すなわちそれぞれの両端点が頂点順序 σ 上で

$(s,t;i\text{-}1)$ $<_\sigma$ $(p,q;i\text{-}1)$ かつ $(p,q;i)$ $<_\sigma$ $(s,t;i)$

の順に並んでいるとする．このときこの 2 辺は必ず違う色をもつことを示す．

上記の仮定と頂点の配置の定義から以下の不等式が成り立つ．

$$t(i\text{-}1) \leq^* q(i\text{-}1) \text{ かつ } q(i) \leq^* t(i).$$

このとき $t(i\text{-}1) <^* q(i\text{-}1)$ とすると，頂点順序の定義から，$t(i) < q(i)$ となってしまい仮定に反する．

ゆえに，$t(i\text{-}1) = q(i\text{-}1)$ で，$q(j) \leq^* t(i)$ となる．$(s,t;i\text{-}1) <_\sigma (p,q;i\text{-}1)$ より，頂点順序の定義から，

1. $t(i\text{-}1) = q(i\text{-}1)$ かつ $s<p$
2. $t(i\text{-}1) = q(i\text{-}1)$ かつ $s=p,t<q$

のいずれかとなるため，$t_i =q_i$ とすると，

$$(s,t;i) <_\sigma (p,q;j)$$

となってしまい仮定に反する．よって，$q_i < t_i (< d)$．ここで，$0 \leq q_j$ より $t_i \neq 0$ となり，辺の番号の定義から，$c(t(i)) \neq c(q(j))$ が成り立つ．よって X-交差しないことが示せた．

また $G_{m,n}$ の細分 $G_{m,n}{}^*$ の各頂点の隣接関係の決め方よりその最大幅も 1 でかつ，各辺の細分点の個数は $\lceil \log_d n \rceil$ -1 であることは容易にわかる．

□

補題 7 ［Dujmovic', Pór and Wood[2]］G を (d,k)-トラックグラフで最大幅が 1 を持つものとするとき，$tn_d(G) \leq 3$ となる．

補題 6 を補題 7 に当てはめると，$G_{m,n}{}^*$ は $(d,3)$-トラックレイアウトを持つことがわかる．補題 7 の証明に使われている構成方法を補題 6 で構成した (d,k) トラックレイアウトにそのまま適用すると定理 4 が得られる．

定理 4 の証明． 頂点集合を以下のように分割する．

$$V_0=\{(s,t;i): i \equiv 0 \bmod 3\}$$
$$V_1=\{(s,t;i): i \equiv 1 \bmod 3\}$$
$$V_2=\{(s,t;i): i \equiv 2 \bmod 3\}$$

それぞれの頂点部分集合 V_i と全順序 σ の対を考えると頂点 3 彩色 $\{(V_i, \sigma):i=0,1,2\}$ を得る．この頂点 3 彩色と補題 6 で定義した辺彩色は補題 7 の証明より $(d,3)$-トラックレイアウトとなる．

（任意の 2 辺 $((s,t;i\text{-}1),(s,t;i))$ と $((p,q;j\text{-}1),(p,q;j))$ を考える．$j\text{-}(i\text{-}1)>2$ のとき $(j\text{-}1)\text{-}i>0$ より $(p,q;j\text{-}1)$ は $(s,t;i)$ より大きいトラックに含まれる．よってたとえ新しいトラックレイアウトにおいて $(s,t;i\text{-}1)$ あるいは $(s,t;i)$ が $(p,q;j\text{-}1)$ あるいは $(p,q;j)$ と同じトラックに現れたとしても，$(s,t;i\text{-}1)$ あるいは $(s,t;i)$ は $(p,q;j\text{-}1)$ あるいは $(p,q;j)$ の左側にあるため，X-交差しない．$j\text{-}(i\text{-}1)\leq 2$ のとき．$(s,t;i\text{-}1),(s,t;i),(p,q;j\text{-}1)$ あるいは $(p,q;j)$ の任意の 2 つが新しいトラックレイアウトで同じトラック上に現れるためには与えられた元のトラックレイアウトでも同じトラック上にあるときでそのときのみ．このときは元のレイアウトがトラックレイアウトであるという仮定から $((s,t;i\text{-}1),(s,t;i))$ と $((p,q;j\text{-}1),(p,q;j))$ は X-交差しない．）
この構成方法では各辺の細分数は変わっていないため，各辺の細分点の個数は $\lceil \log_d n \rceil$-1 のままとなる．

□

3. 結論

本論文では，Dujmovic と Wood による任意のグラフ G にたする $(d,3)$-トラックレイアウトの結果を，2 部グラフに限って改良し，それぞれ m 頂点と n 頂点($m\geq n$)からなる 2 個の部集合を持つ任意の 2 部グラフ $G_{m,n}$ に対して，各辺の細分点の個数が $\lceil \log_d n \rceil$-1 となるような $G_{m,n}$ の細分の $(d,3)$ トラックレイアウトを構成した．本結果が最高次数の係数に関して最善かどうかの証明が今後の課題である．

文　献

[1] Vida Dujmovic' and David R. Wood. "Stacks, queues and tracks: Layouts of graph subdivisions," Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 7:155-202, 2005.

[2] Vida Dujmovic', Attila Pór and David R. Wood. "Track layouts of graphs," Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science, 6(2):497-522, 2004

[3] L. S. Heath and A. L. Rosenberg, "Laying out graphs using queues." *SIAM J. Comput.*, 21(5):927–958, 1992.