

# キューブ連結サイクルのスタックナンバーとキューナンバー について

田中 勇樹\*

柴田 幸夫†

## 概要

本稿ではキューブ連結サイクルのスタックナンバーとキューナンバーについて考察を行う。スタックナンバーとキューナンバーはそれぞれグラフのスタックレイアウトとキューレイアウトに関する値である。スタックレイアウトは本型埋め込みとも呼ばれ、グラフの配置問題として多くの研究がされている。本研究ではキューブ連結サイクルが3スタックレイアウト可能であることを示す。これは4以上の次元のキューブ連結サイクルが2スタックレイアウト不可能であることから最適解であると言える。また、キューブ連結サイクルが3キューレイアウト可能であることも示す。

キーワード キューブ連結サイクル, スタックレイアウト, キューレイアウト, 本型埋め込み

## The stack number and the queue number of cube-connected cycles

Yuuki Tanaka\*

Yukio Shibata†

### Abstract

In this manuscript, we treat the stack layout and the queue layout of cube-connected cycles. The stack layout is also called the book embedding of graph and has been studied widely. In this manuscript, we show that the stack number of cube-connected cycles  $CCC(n)$  is 3 for  $n \geq 4$ . This result is optimal since  $CCC(n)$  does not have 2 stacks layout for  $n \geq 4$ . We also consider the queue layout of  $CCC(n)$ . We show that the queue number of  $CCC(n)$  is at most 3 by showing  $CCC(n)$  has 3 queues layout.

**Keywords** cube-connected cycles, stack layout, queue layout, book embedding

## 1 まえがき

グラフのレイアウト問題に、スタックレイアウトとキューレイアウトがある。これらのレイアウト問題は回路設計の分野をはじめ、並列プロセッサのスケジューリング問題や並列スタック/キューを用いたソーティング問題への応用などが考えられていることから、広く研究されている [3, 4, 5]。特にスタックレイアウトはグラフの本型埋め込みとも呼ばれている。

また、キューブ連結サイクルは [7] で提案され、計算機相互結合網のトポロジとして良い性質を多く持つことから、広く研究がされている。また、代数的な構造などについての研究もなされ

ている [1]。

鴻江らは [6] で、ハイパーキューブの本型埋め込みに関する結果から  $n$  次元キューブ連結サイクルは  $n-1$  ページに埋め込み可能である、即ち、スタックナンバーは  $n-1$  以下であるという結果を示した。著者は [8] でキューブ連結サイクルが Butterfly グラフの部分グラフであることに着目し、奇数次元のキューブ連結サイクルのスタックナンバーは 5 以下、偶数次元のものに関しては 4 以下であることを示した。本研究の結果はこれらの結果を改善するものである。

## 2 諸定義

本節では本稿で用いる用語や扱うグラフ、問題の定義などを行う。なお、ここに示していな

\*群馬大学アドバンス・テクノロジー高度研究センター  
Email: ytanaka@atec.gunma-u.ac.jp  
†群馬大学大学院工学研究科 情報工学専攻

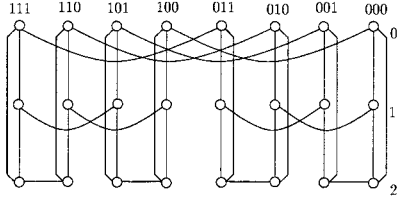


図 1: cube-connected cycles  $CCC(3)$ .

い用語の定義は [2] などに従う。  $\mathbf{x}$  は二進  $n$  桁列  $x_0x_1 \cdots x_{n-1}$  を表すものとする。また、  $\mathbf{x}$  のある桁  $x_i$  のみが  $\mathbf{x}$  のそれと異なっている二進  $n$  桁列を  $\mathbf{x}^i$  と表す。

## 2.1 キューブ連結サイクル

$n$  次元 cube-connected cycles  $CCC(n)$  [7] は、レベルと呼ばれる  $\mathbb{Z}_n$  の整数と、列と呼ばれる二進  $n$  桁列のペアにより頂点集合が定義される。2 頂点  $u = (k; \mathbf{x})$ ,  $v = (k'; \mathbf{y})$  が隣接するための必要十分条件は  $k = k' + 1 \pmod n$  かつ  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , または  $k = k'$  かつ  $\mathbf{x} = \mathbf{y}^k$  であることである。 $CCC(n)$  の異なるレベルにある 2 頂点を結ぶ辺を  $C$  辺, 同じレベルの 2 頂点を結ぶ辺を  $S$  辺と呼ぶ。図 1 に 3 次元 cube-connected cycles  $CCC(3)$  を示す。図 1 では  $C$  辺を上下方向,  $S$  辺を左右方向で表している。

## 2.2 スタックレイアウト, キューレイアウト

グラフ  $G$  の頂点集合に対し、全順序  $\sigma$  を与える。  $G$  の 2 つの辺  $(u, v)$ ,  $(x, y)$  に対し、一般性を失うことなく  $\sigma(u) < \sigma(v)$ ,  $\sigma(x) < \sigma(y)$  とする。  $\sigma(u) < \sigma(x) < \sigma(v) < \sigma(y)$  のとき、辺  $(u, v)$  と辺  $(x, y)$  は交差すると言い、  $\sigma(u) < \sigma(x) < \sigma(y) < \sigma(v)$  のとき、辺  $(u, v)$  と辺  $(x, y)$  はネストすると言う。  $G$  の辺集合  $E(G)$  を  $E_0, E_1, \dots, E_{k-1}$  と分割したとき、任意の  $E_i$  に属する全ての辺の対が交差していないならば  $\{\sigma, E_0, E_1, \dots, E_{k-1}\}$  は  $G$  のスタックレイアウトであるという。一方、任意の  $E_i$  に属する全ての辺の対がネストしていないならば  $\{\sigma, E_0, E_1, \dots, E_{k-1}\}$  は  $G$  のキューレイアウトであるという。辺集合の分割数  $k$  をそれぞれスタックナンバー, キューナンバーと呼ぶ。

## 3 キューブ連結サイクルのスタックナンバー

鴻江らの結果 [6] から、3 次元キューブ連結サイクルに対する結果は次のように与えられる。これは最適な結果である。

系 1 3 次元キューブ連結サイクル  $CCC(3)$  のスタックナンバーは 2 である。

キューブ連結サイクルのスタックナンバーを求める前に、証明で用いる関数の定義と性質を示す。

定義 1 関数  $B: \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}$  を次のように定義する。

$$B(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1-i} \left( \bigoplus_{j=0}^i x_j \right).$$

関数  $B$  は二進  $n$  桁列を交番二進符号とみたときに、対応する整数値を返す関数である。

補題 1 4 つの二進列  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}^t, \mathbf{y}^t$  に対し、一般性を失うことなく  $B(\mathbf{x}) < B(\mathbf{x}^t)$ ,  $B(\mathbf{y}) < B(\mathbf{y}^t)$  とする。任意の  $0 \leq t \leq n-1$  に対し、  $B(\mathbf{x}) < B(\mathbf{y}) < B(\mathbf{x}^t)$  ならば、  $B(\mathbf{x}) < B(\mathbf{y}) < B(\mathbf{y}^t) < B(\mathbf{x}^t)$  である。

証明: 排他的論理和の性質から、任意の  $t \leq s$  に対し、  $x_0 \oplus x_1 \oplus \cdots \oplus x_{t-1} \oplus \bar{x}_t \oplus \cdots \oplus x_s = \neg(x_0 \oplus x_1 \oplus \cdots \oplus x_s)$  であることと関数  $B$  の定義より

$$B(\mathbf{x}^t) = \sum_{i=0}^{t-1} 2^{n-1-i} \left( \bigoplus_{j=0}^i x_j \right) + \sum_{i=t}^{n-1} 2^{n-1-i} \left( \neg \bigoplus_{j=0}^i x_j \right),$$

と書くことができる。更に二番目の和を書き換えることで、

$$B(\mathbf{x}^t) = \sum_{i=0}^{t-1} 2^{n-1-i} \left( \bigoplus_{j=0}^i x_j \right) + 2^{n-t} - 1 - \sum_{i=t}^{n-1} 2^{n-1-i} \left( \bigoplus_{j=0}^i x_j \right),$$

が得られる。  $B(\mathbf{x}^t) > B(\mathbf{x})$  としていることから、

$$B(\mathbf{x}^t) - B(\mathbf{x}) = 2^{n-t} - 1 - 2 \sum_{i=t}^{n-1} 2^{n-1-i} \left( \bigoplus_{j=0}^i x_j \right) \leq 2^{n-t} - 1.$$

が得られる。また,

$$B(\mathbf{y}) = \sum_{i=0}^{t-1} 2^{n-1-i} \left( \bigoplus_{j=0}^i y_j \right) + \sum_{i=t}^{n-1} 2^{n-1-i} \left( \bigoplus_{j=0}^i y_j \right),$$

と表せることと,  $B(\mathbf{x}) < B(\mathbf{y}) < B(\mathbf{x}^t)$  であることから,  $\sum_{i=0}^{t-1} 2^{n-1-i} \left( \bigoplus_{j=0}^i x_j \right) = \sum_{i=0}^{t-1} 2^{n-1-i} \left( \bigoplus_{j=0}^i y_j \right)$  であり, ここから

$$\sum_{i=t}^{n-1} 2^{n-1-i} \left( \bigoplus_{j=0}^i x_j \right) < \sum_{i=t}^{n-1} 2^{n-1-i} \left( \bigoplus_{j=0}^i y_j \right),$$

が言える。よって,

$$B(\mathbf{y}^t) = \sum_{i=0}^{t-1} 2^{n-1-i} \left( \bigoplus_{j=0}^i y_j \right) + 2^{n-t} - 1 - \sum_{i=t}^{n-1} 2^{n-1-i} \left( \bigoplus_{j=0}^i y_j \right) < B(\mathbf{x}^t),$$

となり, 命題が示された。□

本節ではキューブ連結サイクルのスタックナンバーが3である, 即ち3スタックレイアウトが存在することを示すが,  $n$  の偶奇性によりその導出法が少し異なるため, それぞれ個別に証明を行う。始めに  $n$  が偶数の場合について証明する。

**定理 1**  $n$  が4以上の偶数のとき,  $CCC(n)$  のスタックナンバーは3である。

**証明:** 写像  $\psi_e : V(CCC(n)) \rightarrow \mathbb{Z}_{2^{2n}}$  を次のように与える。

$$\psi_e((t; \mathbf{x})) = t2^n + ((t \pmod{2})(2^n - 1)) + (-1)^t B(\mathbf{x}).$$

始めに, 写像  $\psi_e$  が頂点の順序づけになっていることを,  $\psi_e$  が単射であることと  $\psi_e$  の定義域と値域が同じ濃度を持つことで示す。  $CCC(n)$  の2頂点  $u = (s; \mathbf{x}), v = (t; \mathbf{y})$  に対し,  $s \neq t$  のとき, ここでは  $s < t$  を仮定すると,  $s2^n < \psi_e(u) < (s+1)2^n \leq t2^n < \psi_e(v) < (t+1)2^n$  となるので,  $\psi_e$  が単射であることを示すには,  $s = t$  のとき単射であることを示せば十分となる。  $s = t$  が偶数のとき,  $\psi_e$  が単射であるためには  $B$  が単

射であることが必要条件となるが,  $B$  は交番二進符号と非負整数の対応関数なので単射である。  $s = t$  が奇数のときも同様に考えることで結論として  $\psi_e$  が単射であることが示せる。定義域と値域が同じ濃度であることは明らかであることから,  $\psi_e$  は全単射, すなわち頂点の順序づけとなっている。

次に, 辺のスタックへの割り当てを次のように与える。

- $S$  辺: スタック 0
- ある  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^n$  と奇数  $s \in \mathbb{Z}_n$  に対し,  $((s; \mathbf{x}), (s+1 \pmod{n}; \mathbf{x}))$  であるような  $C$  辺: スタック 1
- ある  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^n$  と偶数  $s \in \mathbb{Z}_n$  に対し,  $((s; \mathbf{x}), (s+1; \mathbf{x}))$  であるような  $C$  辺: スタック 2

始めに, 順序づけ  $\psi_e$  の上で全ての  $S$  辺がスタック 0 に割り当て可能であることを示す。2つの  $S$  辺  $e = (x, x') = ((s; \mathbf{x}), (s; \mathbf{x}^s))$ ,  $f = (y, y') = ((t; \mathbf{y}), (t; \mathbf{y}^t))$  に対し, 一般性を失うことなく,  $\psi_e(x) < \psi_e(x')$ ,  $\psi_e(x) < \psi_e(y)$ ,  $\psi_e(y) < \psi_e(y')$  とする。  $\psi_e(x') < \psi_e(y)$  ならば辺  $e$  と辺  $f$  は同じスタックに割り当て可能である。よってここでは  $\psi_e(x) < \psi_e(y) < \psi_e(x')$  のときを考える。このとき,  $s2^n \leq \psi_e(x) < \psi_e(x') < (s+1)2^n$  であることから  $s = t$  となる。  $s = t$  が奇数のとき,  $\psi_e(x)$  と  $\psi_e(y)$  の大小関係は  $B(x)$  と  $B(y)$  のそれと逆になり,  $B(y) < B(x)$  となる。同様に  $B(x') < B(y)$  であるから, 補題1より  $B(x') < B(y') < B(y) < B(x)$  が成り立ち,  $\psi_e(x) < \psi_e(y) < \psi_e(y') < \psi_e(x')$  を得る。よって辺  $e$  と辺  $f$  を同じスタックに割り当てることができる。  $s = t$  が偶数のとき,  $\psi_e(x)$  と  $\psi_e(y)$  の大小関係は  $B(x)$  と  $B(y)$  のそれと同じになり, 同様に考えることで辺  $e$  と辺  $f$  を同じスタックに割り当て可能である。ゆえに全ての  $S$  辺を一つのスタックに割り当て可能であることが言える。

次に, 順序づけ  $\psi_e$  の上で全ての  $C$  辺が2つのスタックに割り当て可能であることを示す。始めに, 辺  $e = (x, x') = ((0; \mathbf{x}), (n-1; \mathbf{x}))$  が  $1 \leq t \leq n-3$  なる奇数  $t$  を持つ辺  $f = (y, y') = ((t; \mathbf{y}), (t+1; \mathbf{y}))$  と同じスタックに割り当て可能であることを示す。それぞれの  $\psi_e$  による頂点の順序は

$$\begin{aligned} \psi_e(x) &= B(\mathbf{x}) < 2^n, \\ \psi_e(x') &= n2^n - 1 - B(\mathbf{x}) > (n-1)2^n, \\ \psi_e(y) &= (t+1)2^n - 1 - B(\mathbf{x}) \geq t2^n > 2^n, \\ \psi_e(y') &= t2^n + B(\mathbf{x}) < (t+1)2^n < (n-1)2^n. \end{aligned}$$

となることから、レベル0とレベル $n-1$ の2頂点を結ぶ辺は、スタック1に割り当てられた他のレベルにある頂点を結ぶ辺と交差ししない。

二番目に、レベル0の頂点とレベル $n-1$ の頂点を結ぶ2つの辺 $e = (x, x') = ((0; \mathbf{x}), (n-1; \mathbf{x}))$ ,  $f = (y, y') = ((0; \mathbf{y}), (n-1; \mathbf{y}))$ が同じスタックに割り当て可能であることを示す。一般性を失うことなく、 $\psi_e(x) < \psi_e(y)$ とすると、 $B(x) < B(y)$ となる。よって $\psi_e(y') < \psi_e(x')$ となり、同じスタックに割り当て可能である。ゆえにレベル0の頂点とレベル $n-1$ の頂点を結ぶ全ての $C$ 辺が一つのスタックに割り当て可能である。

三番目に、レベル0の頂点とレベル $n-1$ の頂点を結ぶ $C$ 辺ではない2つの $C$ 辺 $e = (x, x') = ((s; \mathbf{x}), (s+1; \mathbf{x}))$ ,  $f = (y, y') = ((t; \mathbf{y}), (t+1; \mathbf{y}))$ が交差ししないことを示す。一般性を失うことなく、 $\psi_e(x) < \psi_e(x')$ ,  $\psi_e(x) < \psi_e(y)$ ,  $\psi_e(y) < \psi_e(y')$ とする。 $s$ と $t$ の偶奇性が異なるならば辺が割り当てられるスタックが異なるので、ここでは $s$ と $t$ の偶奇性は同じとする。 $\psi_e(x') < \psi_e(y)$ ならば辺 $e$ と辺 $f$ は同じスタックに割り当て可能である。よってここでは $\psi_e(x) < \psi_e(y) < \psi_e(x')$ のときを考える。このときも $S$ 辺のときと同様に $s = t$ となる。 $s = t$ が偶数のとき、 $\psi_e(x)$ と $\psi_e(y)$ の大小関係は $B(x)$ と $B(y)$ のそれと同じになり、 $B(y) > B(x)$ となる。よって $\psi_e(y') < \psi_e(x')$ となり、辺 $e$ と辺 $f$ は同一のスタックに配置できる。 $s = t$ が奇数のとき、 $\psi_e(x)$ と $\psi_e(y)$ の大小関係は $B(x)$ と $B(y)$ のそれと逆になり、 $B(y) < B(x)$ となる。よって $\psi_e(y') < \psi_e(x')$ となり、辺 $e$ と辺 $f$ は同一のスタックに配置できる。□

図2に $CCC(4)$ の3スタックレイアウトを示す。山型に描かれている辺はスタック0に、矩形で描かれている辺は頂点の列の上側がスタック1、下側がスタック2に配置されているものである。

**定理 2**  $n$ が5以上の奇数のとき、 $CCC(n)$ のスタックナンバーは3である。

**証明:** 写像 $\psi_o : V(CCC(n)) \rightarrow \mathbb{Z}_{n2^n}$ を次のように与える。

$0 \leq t \leq n-3$ のとき

$$\begin{aligned} \psi_o((t; \mathbf{x})) &= t2^n + ((t \pmod{2})(2^n - 1)) \\ &\quad + (-1)^t B(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

$t = n-2$ のとき

$$\begin{aligned} \psi_o((n-2; \mathbf{x})) &= n2^n - 1 - \left( 2B(\mathbf{x}) + \bigoplus_{i=0}^{n-1} x_i \right), \end{aligned}$$

$t = n-1$ のとき

$$\begin{aligned} \psi_o((n-1; \mathbf{x})) &= n2^n - 1 - \left( 2B(\mathbf{x}) + \neg \bigoplus_{i=0}^{n-1} x_i \right). \end{aligned}$$

始めに $\psi_o$ が全単射であることを示す。レベルが0以上 $n-3$ 以下の頂点に対して $\psi_o$ は $\psi_e$ と同一の関数である。また、レベルが $n-3$ 以下の頂点に対し、関数 $\psi_o$ の値は $(n-2)2^n - 1$ 以下になることは明らかである。レベルが $n-2$ 及び $n-1$ の頂点に対しては、関数 $\psi_o$ の値は $(n-2)2^n$ 以上 $n2^n - 1$ 以下となる。よって、 $\psi_o$ が全単射であることを示すには、レベルが $n-2$ および $n-1$ の頂点の集合(定義域の部分集合)に対し単射であることを示せば十分である。

レベルが $n-2$ もしくは $n-1$ の2頂点 $u = (t; \mathbf{x})$ ,  $v = (s; \mathbf{y})$ に対し、 $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ ならば $|2B(\mathbf{x}) - 2B(\mathbf{y})| \geq 2$ であることと、 $\bigoplus_{i=0}^{n-1} x_i$ は高々1の非負整数であることから、 $\psi_o(u) \neq \psi_o(v)$ である。 $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ なる頂点对に対しては次の主張を示す。

**Claim 1**  $|\psi_o((n-2; \mathbf{x})) - \psi_o((n-1; \mathbf{x}))| = 1$ .

**証明:**

$$\begin{aligned} \psi_o((n-2; \mathbf{x})) - \psi_o((n-1; \mathbf{x})) &= n2^n - 1 - \left( 2B(\mathbf{x}) + \bigoplus_{i=0}^{n-1} x_i \right) \\ &\quad - \left( n2^n - 1 - \left( 2B(\mathbf{x}) + \neg \bigoplus_{i=0}^{n-1} x_i \right) \right) \\ &= - \bigoplus_{i=0}^{n-1} x_i + \neg \bigoplus_{i=0}^{n-1} x_i, \end{aligned}$$

$\bigoplus_{i=0}^{n-1} x_i = 0$ のとき、 $\neg \bigoplus_{i=0}^{n-1} x_i = 1$ なので与式は1となり、 $\bigoplus_{i=0}^{n-1} x_i = 1$ のとき、 $\neg \bigoplus_{i=0}^{n-1} x_i = 0$ なので与式は-1となる。□  
よって $\psi_o$ は全単射である。

次に、辺のスタックへの割り当てを次のように与える。これは $n$ が偶数のときの割り当てとほぼ同じである。

- $S$ 辺: スタック0
- ある $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^n$ に対し、 $((n-1; \mathbf{x}), (0; \mathbf{x}))$ であるような $C$ 辺: スタック1

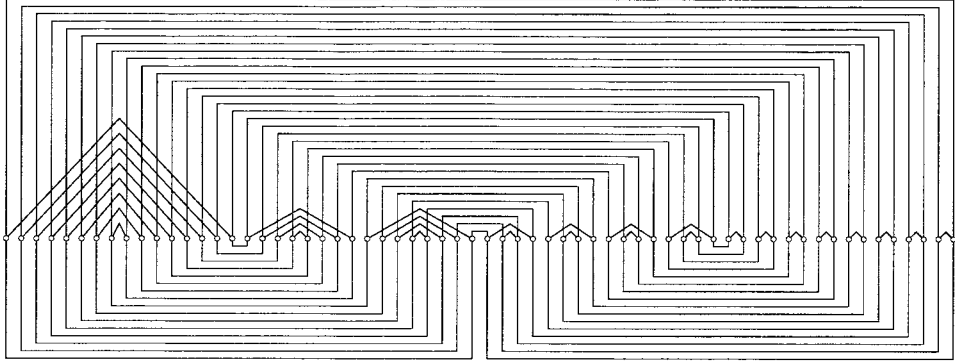


図 2: CCC(4) の 3 スタックレイアウト

- ある  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^n$  と奇数  $s \in \mathbb{Z}_n$  に対し,  $((s; \mathbf{x}), (s+1; \mathbf{x}))$  であるような  $C$  辺: スタック 1
- ある  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^n$  と偶数  $s \in \mathbb{Z}_n \setminus \{n-1\}$  に対し,  $((s; \mathbf{x}), (s+1; \mathbf{x}))$  であるような  $C$  辺: スタック 2

始めに, 順序づけ  $\psi_o$  の上で全ての  $S$  辺がスタック 0 に割り当て可能であることを示す.  $n$  が偶数のときと同様に, レベルが 0 から  $n-3$  に関する  $S$  辺は 1 つのスタックに割り当てることが可能である. レベル  $n-2$  とレベル  $n-1$  の頂点に関する  $S$  辺について次の 2 つの主張を示す.

**Claim 2** 頂点の順序づけ  $\psi_o$  のもとで, レベル  $n-2$  の 2 頂点を結ぶ全ての  $S$  辺は 1 つのスタックに割り当て可能である.

**証明:** レベル  $n-2$  の頂点を結ぶ 2 つの  $S$  辺  $e = (x, x') = ((n-2; \mathbf{x}), (n-2; \mathbf{x}^{n-2}))$ ,  $f = (y, y') = ((n-2; \mathbf{y}), (n-2; \mathbf{y}^{n-2}))$  に対し, 一般性を失うことなく  $\psi_o(x) < \psi_o(y)$ ,  $\psi_o(x) < \psi_o(x')$ ,  $\psi_o(y) < \psi_o(y')$  とする.  $\psi_o(x') < \psi_o(y)$  のときは明らかに一つのスタックに辺  $e$  と  $f$  を割り当てることが可能なので,  $\psi_o(x) < \psi_o(y) < \psi_o(x')$  のときを考える. それぞれの頂点の順序は,

$$\begin{aligned} \psi_o(x) &= n2^n - 1 - \left( 2B(\mathbf{x}) + \bigoplus_{i=0}^{n-1} x_i \right), \\ \psi_o(x') &= n2^n - 1 \\ &\quad - \left( 2B(\mathbf{x}^{n-2}) + \bigoplus_{i=0}^{n-3} x_i \oplus \overline{x_{n-2}} \oplus x_{n-1} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_o(y) &= n2^n - 1 - \left( 2B(\mathbf{y}) + \bigoplus_{i=0}^{n-1} y_i \right), \\ \psi_o(y') &= n2^n - 1 \\ &\quad - \left( 2B(\mathbf{y}^{n-2}) + \bigoplus_{i=0}^{n-3} y_i \oplus \overline{y_{n-2}} \oplus y_{n-1} \right). \end{aligned}$$

となることから,

$$\begin{aligned} 2B(\mathbf{x}) + \bigoplus_{i=0}^{n-1} x_i &> 2B(\mathbf{y}) + \bigoplus_{i=0}^{n-1} y_i \\ &> 2B(\mathbf{x}^{n-2}) + \bigoplus_{i=0}^{n-3} x_i \oplus \overline{x_{n-2}} \oplus x_{n-1}. \end{aligned}$$

となる. 補題 1 と,  $\bigoplus_{i=0}^{n-1} x_i$  や  $\bigoplus_{i=0}^{n-3} x_i \oplus \overline{x_{n-2}} \oplus x_{n-1}$  は高々 1 の非負整数であることから,

$$\begin{aligned} 2B(\mathbf{x}) + \bigoplus_{i=0}^{n-1} x_i &> 2B(\mathbf{y}) + \bigoplus_{i=0}^{n-1} y_i \\ &> 2B(\mathbf{y}^{n-2}) + \bigoplus_{i=0}^{n-3} y_i \oplus \overline{y_{n-2}} \oplus y_{n-1} \\ &> 2B(\mathbf{x}^{n-2}) + \bigoplus_{i=0}^{n-3} x_i \oplus \overline{x_{n-2}} \oplus x_{n-1}. \end{aligned}$$

となり,  $\psi_o(x) < \psi_o(y) < \psi_o(y') < \psi_o(x')$  が成り立つ.  $\square$

レベルが  $n-2$  の頂点は  $(n-2)2^n$  から  $n2^n - 1$  の間にあり, その間にはレベルが 0 から  $n-3$  の頂点を結ぶ  $S$  辺は存在しないので, スタック 0 に割り当てることが可能である.

**Claim 3**

$$|\psi_o((n-1; \mathbf{x})) - \psi_o((n-1; \mathbf{x}^{n-1}))| = 1.$$

証明:

$$\begin{aligned} & \psi_o((n-1; \mathbf{x})) - \psi_o((n-1; \mathbf{x}^{n-1})) \\ &= - \left( 2B(\mathbf{x}) + \neg \bigoplus_{i=0}^{n-1} x_i \right) \\ & \quad + \left( 2B(\mathbf{x}^{n-1}) + \neg \bigoplus_{i=0}^{n-2} x_i \oplus \overline{x_{n-1}} \right) \\ &= -2 \bigoplus_{i=0}^{n-1} x_i - \neg \bigoplus_{i=0}^{n-1} x_i \\ & \quad + 2 \bigoplus_{i=0}^{n-2} x_i \oplus \overline{x_{n-1}} + \neg \bigoplus_{i=0}^{n-2} x_i \oplus \overline{x_{n-1}} \\ &= - \bigoplus_{i=0}^{n-1} x_i + \bigoplus_{i=0}^{n-2} x_i \oplus \overline{x_{n-1}}. \end{aligned}$$

$\bigoplus_{i=0}^{n-1} x_i = 0$  のとき,  $\bigoplus_{i=0}^{n-2} x_i \oplus \overline{x_{n-1}} = 1$  なので与式は 1 となり,  $\bigoplus_{i=0}^{n-1} x_i = 1$  のとき,  $\bigoplus_{i=0}^{n-2} x_i \oplus \overline{x_{n-1}} = 0$  なので -1 となる.  $\square$

主張 3 より, レベルが  $n-1$  同士の頂点を結ぶ  $S$  辺はどのスタックにも割り当てが可能であることが言える. ここではスタック 0 に割り当てることによって全ての  $S$  辺がスタック 0 に割り当てられることになる.

次に, 順序づけ  $\psi_o$  の上で全ての  $C$  辺が 2 つのスタックに割り当て可能であることを示すが, 主張 1 より, 証明を完了するにはレベル 0 の頂点とレベル  $n-1$  の頂点を結ぶ辺, レベル  $n-3$  の頂点とレベル  $n-2$  の頂点を結ぶ辺がそれぞれ, 他のレベル間を結ぶ辺と交差しないことを示し, 更にレベル 0 の頂点とレベル  $n-1$  の頂点を結ぶ任意の 2 辺, およびレベル  $n-3$  の頂点とレベル  $n-2$  の頂点を結ぶ任意の 2 辺がそれぞれ交差しないことを示せば十分である.

始めにレベル 0 の頂点とレベル  $n-1$  頂点を結ぶ辺  $e = ((0; \mathbf{x}), (n-1; \mathbf{x}))$  が, スタック 1 に割り当てられているレベル 0 の頂点とレベル  $n-1$  の頂点を結ぶ辺ではない辺と交差していないことを示す. スタック 1 に割り当てられている, レベル 0 の頂点とレベル  $n-1$  の頂点を結ぶ辺ではない辺  $f = ((t; \mathbf{y}), (t+1; \mathbf{y}))$  は,  $t+1 \leq n-1$  である. しかし, 主張 1 より,  $t+1 = n-1$  であるような辺は他のどの辺とも交差することなくスタックに配置することが可能であるので,

$t+1 \leq n-3$  の場合を考えれば十分である. それぞれの頂点の順序は以下のように与えられる.

$$\begin{aligned} \psi_o((0; \mathbf{x})) &= B(\mathbf{x}) < 2^n, \\ \psi_o((n-1; \mathbf{x})) &= n2^n - 1 \\ & \quad - \left( 2B(\mathbf{x}) + \neg \bigoplus_{i=0}^{n-1} x_i \right) \geq (n-2)2^n, \\ \psi_o((t; \mathbf{y})) &= (t+1)2^n - 1 - B(\mathbf{y}) \geq 2^n, \\ \psi_o((t+1; \mathbf{y})) &= (t+1)2^n + B(\mathbf{y}) < (n-2)2^n. \end{aligned}$$

よって, レベル 0 の頂点とレベル  $n-1$  の頂点を結ぶ辺はそれ以外の 2 つのレベルの頂点を結ぶ辺と交差しない.

二番目にレベル  $n-3$  の頂点とレベル  $n-2$  の頂点を結ぶ辺について考える. この辺はスタック 2 に割り当てられる. スタック 2 に割り当てられる, 他の 2 つのレベルの頂点を結ぶ  $C$  辺  $f = ((t; \mathbf{y}), (t+1; \mathbf{y}))$  は  $t$  が偶であるので,  $t+1 \leq n-4$  となる. 任意の  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^n$  に対して,

$$\begin{aligned} \psi_o((n-3; \mathbf{x})) &= (n-3)2^n + B(\mathbf{x}) \geq (n-3)2^n, \\ \psi_o((n-2; \mathbf{x})) &= n2^n - 1 - \left( 2B(\mathbf{x}) + \bigoplus_{i=0}^{n-1} x_i \right) \\ & \geq (n-2)2^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_o((t; \mathbf{y})) &= t2^n + B(\mathbf{y}) < (t+1)2^n \leq (n-4)2^n, \\ \psi_o((t+1; \mathbf{y})) &= (t+2)2^n - 1 - B(\mathbf{y}) < (n-3)2^n. \end{aligned}$$

となるので, レベル  $n-3$  の頂点とレベル  $n-2$  の頂点を結ぶ  $C$  辺は, 他の 2 つのレベルの頂点を結ぶ辺と交差せず, スタック 2 に割り当てが可能となる.

三番目に, レベル 0 の頂点とレベル  $n-1$  の頂点を結ぶ任意の 2 つの辺  $e = ((0; \mathbf{x}), (n-1; \mathbf{x}))$ ,  $f = ((0; \mathbf{y}), (n-1; \mathbf{y}))$  が同じスタックに配置できることを示す. 一般性を失うことなく,  $\psi_o((0; \mathbf{x})) < \psi_o((0; \mathbf{y}))$  とする. それぞれの頂点の順序は,

$$\begin{aligned} \psi_o((0; \mathbf{x})) &= B(\mathbf{x}), \\ \psi_o((n-1; \mathbf{x})) &= n2^n - 1 - \left( 2B(\mathbf{x}) + \neg \bigoplus_{i=0}^{n-1} x_i \right), \\ \psi_o((0; \mathbf{y})) &= B(\mathbf{y}), \\ \psi_o((n-1; \mathbf{y})) &= n2^n - 1 - \left( 2B(\mathbf{y}) + \neg \bigoplus_{i=0}^{n-1} y_i \right). \end{aligned}$$

となる. 仮定より  $B(\mathbf{x}) < B(\mathbf{y})$  なので,  $\psi_o((n-1; \mathbf{y})) < \psi_o((n-1; \mathbf{x}))$  となり, 辺  $e$  と辺  $f$  は同じスタックに割り当てることができる.

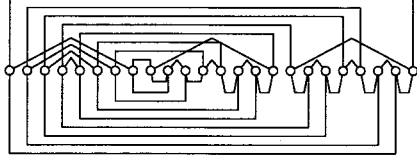


図 3:  $CCC(3)$  の 3 スタックレイアウト

最後に、レベル  $n-3$  の頂点とレベル  $n-2$  の頂点を結ぶ任意の 2 つの辺  $e = ((n-3; \mathbf{x}), (n-2; \mathbf{x}))$ ,  $f = ((n-3; \mathbf{y}), (n-2; \mathbf{y}))$  が同じスタックに配置できることを示す。一般性を失うことなく、 $\psi_o((n-3; \mathbf{x})) < \psi_o((n-3; \mathbf{y}))$  とする。それぞれの頂点の順序は、

$$\psi_o((n-3; \mathbf{x})) = (n-3)2^n + B(\mathbf{x}),$$

$$\psi_o((n-2; \mathbf{x})) = n2^n - 1 - \left( 2B(\mathbf{x}) + \bigoplus_{i=0}^{n-1} x_i \right),$$

$$\psi_o((n-3; \mathbf{y})) = (n-3)2^n + B(\mathbf{y}),$$

$$\psi_o((n-2; \mathbf{y})) = n2^n - 1 - \left( 2B(\mathbf{y}) + \bigoplus_{i=0}^{n-1} y_i \right),$$

となる。仮定より  $B(\mathbf{x}) < B(\mathbf{y})$  なので、 $\psi_o((n-2; \mathbf{y})) < \psi_o((n-2; \mathbf{x}))$  となり、辺  $e$  と辺  $f$  は同じスタックに割り当てることができる。これで全ての  $C$  辺について、命題に与えたスタックへの割り当てが可能であることが示せた。□

図 3 に定理 2 に従う  $CCC(3)$  の 3 スタックレイアウトを示す。山型に描かれている辺はスタック 0 に、矩形で描かれている辺は頂点の列の下側がスタック 1、上側がスタック 2 に配置されているものである。

#### 4 キューブ連結サイクルのキューナンバー

本節ではキューブ連結サイクルのキューナンバーについて考察を行う。

**定理 3**  $n$  次元キューブ連結サイクル  $CCC(n)$  のキューナンバーは 3 以下である。

**証明:** 頂点の全順序を以下の関数  $\phi$  により与える。

$$\phi((t; \mathbf{x})) = t2^n + \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1-i} x_i.$$

また、辺  $e = (u, v)$  のキューへの割り当てを次のように与える。

- $e$  が  $S$  辺: キュー 0
- $e$  が  $C$  辺:
  - レベルが 0 の頂点とレベル  $n-1$  の頂点を結ぶ辺: キュー 1
  - それ以外: キュー 2

初めに、全ての  $S$  辺が一つのキューに割り当て可能であることを示す。辺  $e = ((s; \mathbf{x}), (s; \mathbf{x}^s))$ ,  $f = (x, y) = ((t; \mathbf{y}), (t; \mathbf{y}^s))$  に対し、 $\phi(u) < \phi(v)$ ,  $\phi(x) < \phi(y)$ ,  $\phi(u) < \phi(x)$  とする。  $s \neq t$  のとき、関数  $\phi$  の定義から、 $\phi(v) < (s+1)2^n \leq \phi(x)$  となるので同じキューに割り当てが可能となる。  $s = t$  のとき、 $\phi$  の定義と  $\phi(u) < \phi(x)$  から  $\sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1-i} x_i < \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1-i} y_i$  であり、 $\phi(v) < \phi(y)$  となるので、一つのキューに割り当て可能である。

次に、レベル 0 の頂点とレベル  $n-1$  の頂点を結ぶ全ての  $C$  辺が一つのキューに割り当て可能であることを示す。辺  $e = ((0; \mathbf{x}), (n-1; \mathbf{x}))$ ,  $f = ((0; \mathbf{y}), (n-1; \mathbf{y}))$  に対し、一般性を失うことなく  $\phi((0; \mathbf{x})) < \phi((0; \mathbf{y}))$  とすると、 $\sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1-i} x_i < \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1-i} y_i$  であるから、 $\phi((n-1; \mathbf{x})) < \phi((n-1; \mathbf{y}))$  となり、一つのキューに割り当て可能である。

最後に、キュー 1 に割り当てられなかった全ての  $C$  辺が一つのキューに割り当て可能であることを示す。キュー 1 に割り当てられなかった  $C$  辺  $e = ((s; \mathbf{x}), (s+1; \mathbf{x}))$  は、 $s+1 \leq n-1$  であることから  $\phi((s+1; \mathbf{x})) - \phi((s; \mathbf{x})) = 2^n$  となる。キュー 1 に割り当てられていない全ての  $C$  辺に対し、その両端点の順序の差が同じであることからネストは発生せず、キュー 1 に割り当てられなかった全ての  $C$  辺を一つのキューに割り当て可能である。□

図 4 に 4 次元キューブ連結サイクル  $CCC(4)$  の 3 キューレイアウトを示す。図 4 では、頂点の列の下部に点線で描かれている辺がキュー 0、頂点の列の下部にある実線の辺がキュー 1、頂点の列の上部にある実線の辺がキュー 2 を表している。

#### 5 まとめ

本研究ではキューブ連結サイクルのスタックナンバーとキューナンバーについて、それぞれ 3

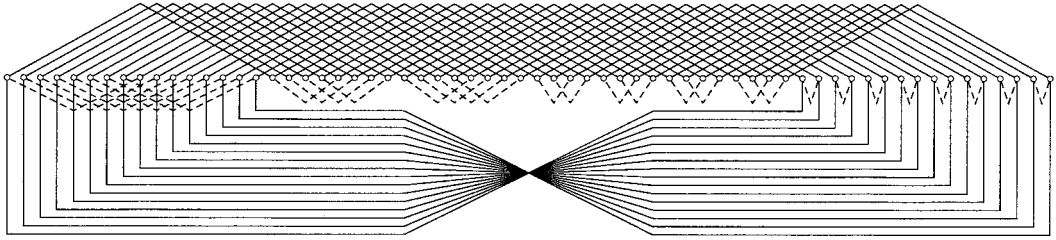


図 4:  $CCC(4)$  の 3 キューレイアウト

という結果を示した。スタックナンバーに関して本研究の結果は最適解である。

今後の課題として、今回得られたキューブ連結サイクルのキューナンバーが最適解か否かについて考察することが考えられる。キューナンバーが 1 であるための必要十分条件は [5] で与えられており、そのグラフクラスは平面グラフのサブクラスであるので、キューブ連結サイクルのキューナンバーが 1 ではないことはすぐに分かるが、2 であるか否かについては不明である。

グラフのページ数について”，信学論 J71-D, No.3, pp.490–500, 1988.

- [7] F. P. Preparata and J. Vuillemin, “The Cube-Connected Cycles: A versatile network for parallel computation,” *Commun. ACM*, vol.24, No.5, pp.300–309, May 1981.
- [8] Y. Tanaka and Y. Shibata, “On the page-number of trivalent Cayley graphs,” *Disc. Appl. Math.* 154, pp.1279–1292, 2006.

## 参考文献

- [1] F. Annexstein, M. Baumslag, and A. L. Rosenberg, “Group action graphs and parallel architectures,” *SIAM J. Comput.*, vol.19, no.3, pp.544–569, June 1990.
- [2] G. Chartrand and L. Lesniak, *Graphs & Digraphs, fourth ed.*, Chapman&Hall/CRC, 2004.
- [3] F. R. K. Chung, F. T. Leighton and A. L. Rosenberg, Embedding graphs in books: A layout problem with application to VLSI design , *SIAM J. Alg. Discr. Methods*, 8(1987) 33–58.
- [4] V. Dujmović and D. R. Wood, “Stacks, Queues and Tracks: Layouts of Graph subdivisions,” *Discrete Math, and Theoretical Comput. Sci.*, Vol.7, pp.155–202, 2005.
- [5] L. S. Heath and A. L. Rosenberg, “Laying out graphs using queues,” *SIAM J. Comput.*, Vol.21, No.5, pp.927–958, October 1992.
- [6] 鴻江 美智子, 萩原 兼一, 都倉 信樹, “本型埋め込みにおける超立方体グラフと超立方体環