解説

—近似アルゴリズムに関する最近の話題—

論理システム解析のための高性能近似アルゴリズム —四角い問題を丸くして解く—

浅野孝夫／中央大学

はじめに

人工知能，VLSIの配線設計，線画解析などの論理システムにおいては，各種の望まれる条件をブール変数等からなる論理式を用いて表現し，その解を求めてシステムを解析し評価するという手法がとられている．これらの問題は，専門的には，制約充足問題あるいは充足可能性問題として定式化できる．

文献6)による大学の時間割作成の問題の例で具体的に考えてみよう．学生60人に対して30個の講義科目が教室3個を用いて開講される(各教室10コマ開講)．学生は自分の興味に基づいて30個の講義科目から8-10個の講義科目を選択できる．教員は13人で複数の講義科目を担当するが，いずれの講義科目も担当者はちょうど1人である．使用できる3教室は大きさが異なり，それぞれ，定員20人，40人，60人である．学生の受講希望を事前に調査し，それに基づいて時間割を作成するが，いくつかの要望・要求を考慮しなければならない．たとえば，各学生の選んだ科目はできるだけすべて聴講できるように，同一時限には開講されないように時間割の作成に努力することが要望される．また，各教員の不都合な時間帯に担当科目が割り当たらないようにも考慮しなければならない．さらに教室の定員から，受講者が教室に収まるように講義科目と教室の割り振りをしなければならない．このように，さまざまな要望・要求を論理式で表現して制約式とみなして，すべての制約式を満たす解を求める問題が制約充足問題(CSP)あるいは充足可能性問題(SAT)と呼ばれる問題である．

しかしながら，すべての制約式を満たす解を見つけるのは，一般にきわめて困難である．一方で，裁判支援用の判例システムや医学用診断システムにおいてもよく観察されることであるが，論理式間に矛盾を含むことも多く，すべての制約式を満たす解が存在しないこともありうる．そのような状況では，できるだけ多くの制約式を満たす近似解が望まれる．しかしながら，そのような解もやはり求めるのが困難であり，そのため，論理式で表現されたシステムの解析はきわめて難しいのが現状である．

これに対して，最近アルゴリズムの分野で，高性能近似アルゴリズムの理論の研究が脚光をあび，このような論理式(制約式)で表現されたシステムの解あるいは近似最適解を求める研究において画期的な手法が提案されている．そこでこの分野の最新の情報を分かりやすく解説するのが本稿の目的である．なお，制約充足問題の重要性は各分野で指摘され，さまざまな解説記事が企画され掲載されてきた．特に，人工知能学会誌の特集「制約充足問題の基礎と応用」の5編の解説は興味深く，最新のこの分野の研究状況が理解できる．本稿でもその中の西原氏の論文「制約充足問題の基礎と展望」[7]をかなり参考にした．そこでは，現実の問題を制約充足問題として定義し，それを汎用制約ソルバ(制約充足器)で解くというアプローチ(制約パラダイムと呼んでいる)の意義として，

(1)問題解決手順を記述する必要がない(プログラミングからの解放)

(2)数式系で表現できない制約条件が表現できる(数値からの解放)

をあげている．さらに，制約パラダイムの今後の課題として，

(1)制約ソルバのための効率的なアルゴリズムの開発と解析(制約の計算論)

(2)制約の多様性の分類と簡潔表現および言語の開発(制約の表現論)

(3)応用分野の開拓(制約の適用論)

をあげている．本稿は，この観点からは，制約の計算論に対応するものである．

制約充足問題と充足可能性問題

前節であげた時間割作成の問題を通して制約充足問題と充足可能性問題をより具体的に説明してみよう．各講義科目$L_i(i=1,2,\ldots,30)$に対応して変数x_iを用意する．さらに，時間割の教室jと時限kをペアにして(j,k)の集合$D=\{(j,k)\mid j=1,2,3,\ k=1,2,\ldots,10\}$を考える．必要

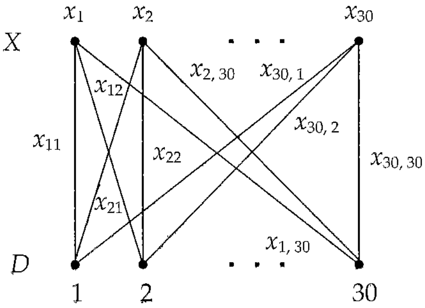

図-1　時間割作成に対応する完全2部グラフ$K_{30,30}$

ならば，$(j,k)\equiv 10(j-1)+k$とみなし，$D=\{\ell \mid \ell=1,2,\ldots,30\}$と考えることもできる．変数$x_i$はDのいずれかの値をとるのでDを値域ともいう．時間割であるので解は$X=\{x_i \mid i=1,2,\ldots,30\}$とDとの1対1対応である．以下これをクラス0の制約式と考える．

また各学生の選んだ科目が異なる時限に開講されるようにすることがクラス1の制約式に対応する．たとえば，学生1の選んだ科目が

$L_1, L_2, L_3, L_5, L_7, L_9, L_{16}, L_{19}, L_{27}$

ならば，任意の$p,\ q\in S_1=\{1,2,3,5,7,9,16,19,27\}$$(p\neq q)$に対して$x_p\neq x_q \pmod{10}$となる．そこで$x_i$に対して$\{0,1\}$-変数$x_{i\ell}$$(\ell\in D)$を考え，$x_i=\ell$のときおよびそのときのみ$x_{i\ell}=1$, $x_{i\ell'}=0$$(\ell'\in D-\{\ell\})$とみなす．すると，

$$\sum_{\ell\in D} x_{i\ell}=1 \quad (i=1,2,\ldots,30),$$

$$\sum_{i=1}^{30} x_{i\ell}=1 \quad (\ell\in D)$$

がクラス0の制約式に対応する．この解は，図-1の完全2部グラフの完全マッチングといわれるものに対応する．またクラス1の(学生1に対する)制約式は

$$\sum_{i\in S_1}\sum_{j=1}^{3} x_{i(j,k)}\leq 1 \quad (k=1,2,\ldots,10)$$

と書ける．他の学生に対する制約式も同様である．

各教員の担当科目，都合の悪い時間の考慮はクラス2の制約式に対応する．たとえば，教員1の担当科目がL_1, L_7で都合の悪い時間が時限1,3,8ならば，

$$\sum_{i\in\{1,7\}}\sum_{j=1}^{3} x_{i(j,k)}\leq 1 \ (k\in\{1,2,\ldots,10\}-\{1,3,8\}),$$

$$\sum_{i\in\{1,7\}}\sum_{j=1}^{3} x_{i(j,k)}=0 \ (k\in\{1,3,8\})$$

と書ける．他の教員に対する制約式も同様である．さらに教室の定員の考慮はクラス3の制約式に対応する．たとえば，講義L_4の受講希望者が26人ならば，教室1は定員20人で割り当てられないので，$\sum_{k=1}^{10} x_{4(1,k)}=0$と書ける．他の講義および教室に対する制約式も同様である．こうして，時間割作成の問題は制約充足問題(CSP)として定式化できる．実際，Miyazaki-Iwama-Kambayashi[6)]のデータに基づいて，Nonobe-Ibaraki[8)]は774個の制約式を得て，それをタブサーチを用いて解いている．実際にはこれらの制約式を同時に満たす解は存在しないので，譲歩できない制約式(クラス0,3の制約式とクラス2の最初のタイプの制約式)と譲歩できる制約式(クラス1の制約式とクラス2の最後のタイプの制約式)とに分け，譲歩できない制約式には重み100を割り当て，譲歩できる制約式には重み1を割り当て，そして満たされる制約式の重みを最大にする最適解(に対する近似解)を求めている．

時間割作成の問題は充足可能性問題(SAT)としても定式化できる．$x_{i\ell}$$(i=1,2,\ldots 30,\ \ell\in D)$をブール変数と考えると($\overline{x}_{i\ell}$は$x_{i\ell}$の否定で$\overline{x}_{i\ell}$と$x_{i\ell}$を**リテラル**という)，クラス0の最初のタイプの制約式には

$$\bigvee_{\ell\in D} x_{i\ell}$$

という論理式$(i=1,2,\ldots,30)$が対応する．このようにリテラルの論理和で表される論理式を以下，**節**という．クラス0の最後のタイプの制約式には

$$\overline{x}_{i\ell}\vee\overline{x}_{i'\ell} \quad (i,i'\in\{1,2,\ldots 30\},\ i\neq i')$$

という節$(\ell\in D)$が対応する．これは，クラス0の制約式を$\sum_{\ell\in D} x_{i\ell}\geq 1$および$\sum_{i=1}^{30} x_{i\ell}\leq 1$とすることができることに基づいている．同様にクラス1の(学生1に対する)制約式には

$$\overline{x}_{i(j,k)}\vee\overline{x}_{i'(j',k)} \quad (i,i'\in S_1, j,j'\in\{1,2,3\})$$

というリテラル2個からなる節$(k=1,\ldots,10)$が対応する．クラス2, 3の制約式に対応する節も同様に得られる．これらの節すべてを満たす真偽割当が存在するかどうかを判定し，存在するときにはその割当を求めるのが**充足可能性問題**(SAT)である．このように，時間割作成の問題は充足可能性問題としても定式化できる．Miyazaki-Iwama-Kambayashi[6)]のデータに基づいて得られる節の集合をすべて満たすような真偽割当は存在しないので，制約充足問題と同様に，各節に重みを考え，満たされる節の重みの総和を最大にするような真偽割当を求めることが重要になる．このような問題を**最大充足化問題**(maximum satisfiability problem)という．以下慣例に従い，最大充足化問題を単に**MAX SAT**という．

線形計画法＋乱数＝0.75近似

前節で論理システムで扱う問題が制約充足問題あるいはMAX SATの形式で表現されることを示したが，MAX SATはきわめて難しい問題(NP困難な問

題)であることが知られている．そのため高精度の近似解を求める研究がなされてきたが以下それについて述べる．

MAX SATは，節の集合$\boldsymbol{C}$と各節$C \in \boldsymbol{C}$に対する非負の重み$w(C)$の対$(\boldsymbol{C},w)$で入力インスタンスが規定される(wが暗黙のうちに了解されているときは単に$\boldsymbol{C}$と書く)．$X=\{x_1,x_2,\ldots, x_n\}$を$\boldsymbol{C}$の節に現れる変数の集合とする．各変数$x_i \in X$に対して，$x_i$が，真ならば$x_i=1$とし，偽ならば$x_i=0$とすると，$\overline{x}_i=1-x_i$となり，$C_j \in \boldsymbol{C}$は

$$C_j = C_j(x) = 1 - \prod_{x_i \in X_j^+} (1-x_i) \prod_{x_i \in X_j^-} x_i$$

として$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2,\ldots,x_n)$の関数と考えることができる．ここで$X_j^+$は$C_j$に肯定形であらわれる変数の集合で$X_j^-$は否定形であらわれる変数の集合である．こうして，任意の真偽割当$\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n$に対し$C_j$は$C_j=C_j(\boldsymbol{x})=0$または1となる($C_j=1$のときに$C_j$は満たされているという)．真偽割当$\boldsymbol{x}$の値は

$$F(\boldsymbol{x}) = \sum_{C_j \in C} \boldsymbol{w}(C_j)\, C_j(\boldsymbol{x})$$

と定義される．すなわち$\boldsymbol{x}$によって満たされる$\boldsymbol{C}$内の節の重みの和が$\boldsymbol{x}$の値である．こうしてMAX SATは値が最大となるような$\boldsymbol{x}$を見つける問題となる．

$w^A(\boldsymbol{C})$をインスタンス$\boldsymbol{C}$に対してMAX SATアルゴリズムAが作り出す真偽割当$\boldsymbol{x}^A(\boldsymbol{C})$の値とする．任意のインスタンス$\boldsymbol{C}$に対して$w^A(\boldsymbol{C})$が常に最適な真偽割当$\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{C})$の値$w^*(\boldsymbol{C})$の$\alpha$倍以上ならば，$A$は**近似率**$\alpha$を持つという．近似率$\alpha$の多項式時間アルゴリズムを**$\alpha$–近似アルゴリズム**という．

多くのMAX SATに対する近似アルゴリズムは確率的方法に基づいている．具体例で説明しよう．たとえば，$\boldsymbol{C}=\{C_1=x_1,\ C_2=x_2,\ C_3=\overline{x}_3,\ C_4=\overline{x}_1 \vee x_2,\ C_5=\overline{x}_2 \vee x_3,\ C_6=\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3\}$, $w(C_1)=4$, $w(C_2)=2$, $w(C_3)=6$, $w(C_4)=8$, $w(C_5)=2$, $w(C_6)=6$が入力インスタンスとして与えられたとする($X=\{x_1,x_2,x_3\}$)．各変数$x_i(i=1,2,3)$に対してp_iをx_iが真になる確率とする．すると，節C_1が満たされる確率はp_1となる．同様にC_2,C_3,C_4,C_5,C_6の満たされる確率はそれぞれ，p_2, $1-p_3$, $1-p_1(1-p_2)$, $1-p_2(1-p_3)$, $1-p_1p_2(1-p_3)$となる．このように，各変数に真になる確率を割り当てた$\boldsymbol{x}^p=(p_1,p_2,p_3)$を**ランダム真偽割当**という．したがって，ランダム真偽割当$\boldsymbol{x}^p$によって節$C_j \in \boldsymbol{C}$が満たされる確率は

$$C_j(x^p) = 1 - \prod_{w_i \in X_j^+} (1-p_i) \prod_{x_i \in X_j^-} p_i$$

となり，ランダム真偽割当$\boldsymbol{x}^p$の期待値は

$$F(x^p) = \sum_{C_j \in C} w(C_j)\, C_j(\boldsymbol{x}^p)$$

となる．上の例で簡単のため各p_iを0.5としてみよう．

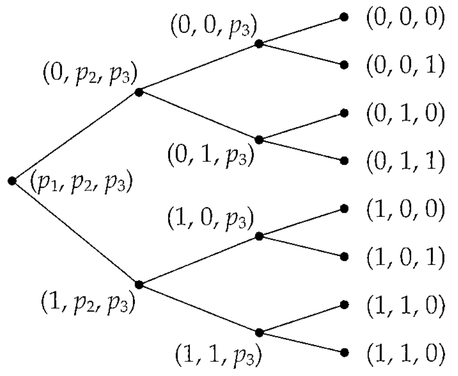

図-2　条件付き確率法の説明図

するとランダム真偽割当は$\boldsymbol{x}^p=(0.5,0.5,0.5)$となり，$C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6$の満たされる確率はそれぞれ，0.5,0.5,0.5,0.75,0.75,0.875となり，期待値は$F(\boldsymbol{x}^p)=4\times0.5+2\times0.5+6\times0.5+8\times0.75+2\times0.75+6\times0.875=18.75$となる．値が少なくとも$F(\boldsymbol{x}^p)$であるような真偽割当$\boldsymbol{x}^q \in \{0,1\}^n$は$F(\boldsymbol{x}^p)$が各$p_i$の線形関数であることから，条件付き確率法と呼ばれる方法で以下のようにして求められる(**図-2**)．

p_1以外のp_iを固定し，p_1を$p_1=0$とおいてみる．するとランダム真偽割当$\boldsymbol{x}_0^p=(0,0.5,0.5)$の期待値は19.5になる．同様に，$p_1=1$とおくとランダム真偽割当$\boldsymbol{x}_1^p=(1,0.5,0.5)$の期待値は18になる．したがって，期待値が大きくなる方にx_1の値を固定し，ランダム真偽割当$\boldsymbol{x}_0^p=(0,0.5,0.5)$を求める．次に，$x_1=0$, $x_3=p_3=0.5$を固定しながら，$p_2=0$とおくと期待値は19となり，$p_2=1$とおくと期待値は20となるので，$x_2=1$と固定し，ランダム真偽割当$\boldsymbol{x}_{01}^p=(0,1,0.5)$を求める．最後に，$x_1=0$, $x_2=1$を固定しながら，$p_3=0$とおくと期待値は22となり，$p_3=1$とおくと期待値は18となるので，$x_3=0$と固定し，真偽割当$\boldsymbol{x}_{010}^p=(0,1,0)$が得られる．このように条件付き確率法に基づいて，常に前の期待値以上の期待値を持つように，各変数に0,1を割り当てていくことができる．

したがって，ランダム真偽割当の期待値の評価が重要になる．実際，Johnsonの0.5–近似アルゴリズムは上述のことを行っている．各変数x_iが真になる確率p_iを0.5としているので，k個のリテラルからなる節C_kの満たされる確率は$1-0.5^k$となり，ランダム真偽割当$\boldsymbol{x}^p$の期待値$F(\boldsymbol{x}^p)=\sum_{k\geq 1}(1-0.5^k)W_k$は

$$F(x^p) \geq \sum_{k \geq 1} (1-0.5^k) W_k^* \geq 0.5\, F(x^*)$$

を満たす．ただし，W_kはk個のリテラルからなる節全体C_kの総重みであり，W_k^*はそのなかで最適解で満たされる節の総重みである($F(\boldsymbol{x}^*)=\sum_{k\geq1} W_k^*$)．

Johnsonが0.5–近似アルゴリズムを提案して以来，20年ほど近似率の改善は成功しなかったが，

Yannakakis がネットワークの手法を取り入れ改良し0.75–近似アルゴリズムを提案する[10]とGoemans-Williamsonも線形計画法に基づく方法で 0.75–近似アルゴリズムを提案した[2]．以下この節ではこれらについて概観する．

●Goemans-Williamsonの線形緩和法

MAX SATは次のような整数計画問題

$$\max \sum_{C_j \in C} w(C_j)\, z_j$$

$$\text{subject to: } \sum_{x_i \in X_j^+} y_i + \sum_{x_i \in X_j^-} (1 - y_i) \geq z_j$$

$$\forall C_j \in C$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \forall x_i \in X$$

$$z_j \in \{0,1\} \quad \forall C_j \in C$$

として定式化できる(X_j^+はC_jに肯定形であらわれる変数の集合でX_j^-は否定形であらわれる変数の集合)．変数$\boldsymbol{y}=(y_i)$は変数$X=\{x_1,\ldots,x_n\}$に対応し，$\boldsymbol{z}=(z_j)$は節$\boldsymbol{C}$に対応する．$x_i=1$のときそしてそのときのみ $y_i=1$である．同様にC_j が満たされるときそしてそのときのみ $z_j=1$となる．こうしてはじめの制約式は節C_j内のリテラルの少なくとも1つが真であるときそしてそのときのみ節 C_j は満たされるということを意味している．Goemans-Williamsonは変数$\boldsymbol{y}$と$\boldsymbol{z}$に対する$\{0,1\}$制約を$0 \leq y_i, z_j \leq 1$とすることにより線形計画問題へと緩和した．緩和問題に対する最適解$(\boldsymbol{y}^\#,\boldsymbol{z}^\#)$を用いて，$x_i^p=y_i^\#$とおいてランダム真偽割当 $\boldsymbol{x}^\#=(y_i^\#)$を求めた．すると$k$個のリテラルを含む節 C_j が満たされる確率は

$$C_j(y^\#) \geq \left(1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^k\right) z_j^\#$$

となり，$\boldsymbol{x}^\#$ の期待値 $F(\boldsymbol{x}^\#)$は

$$F(x^\#) \geq W_1^* + 0.75\, W_2^* + \sum_{k \geq 3} \left(1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^k\right) W_k^*$$

を満たすことになる．したがって線形計画法によって得られた解をそのままランダム真偽割当に用いた場合の近似率は$1-1/e(\approx 0.632120)$となる．線形計画法を用いたアルゴリズムは少ないリテラルを含む節に対してよい近似であることに注意されたい．これはJohnsonのアルゴリズムとちょうど反対の性質である．そこで線形計画法を用いて得られた解とJohnsonのアルゴリズムによって得られた解のよい方を選ぶことにすると，そのときの期待値は$F(\boldsymbol{x}) \geq 0.75\, W_1^* +$

$$0.75\, W_2^* + \textstyle\sum_{k \geq 3} \frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{2^k}\right)+\left(1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^k\right)\right) W_k^* \geq 0.75 F(x^*)$$

を満たすことになる．

●Yannakakisの方法

Yannakakisは，すべての節が2個以上リテラルを含む場合Johnsonのアルゴリズムが0.75–近似アルゴリズムとなることに注目し，1個のリテラルからなる節の変数 x_i の満たされる確率を0.75とおいてみた．しかしながらそうすると満たされる確率が0.75未満になってしまう節が生じる．そこでそのような状況が生じないように，前処理をすることにした．具体的には，節集合を表現するネットワークを構築しネットワークアルゴリズムを駆使して問題を引き起こす節集合を除外した．そして，最後に残った節の変数をクラス分けし，各クラスごとに異なる確率を割り当て，最適解の値の0.75倍以上になる期待値を達成した．

0.75の壁を破る―四角い問題を丸くして解く―

MAX SATに対する0.75–近似アルゴリズムを提案する一方で，Goemans-WilliamsonはMAX 2-SAT(各節に含まれるリテラルが2個以下と限定されたMAX SAT)に対する0.878–近似アルゴリズムも提案した．その手法はMAX 2-SATというディジタルな問題(四角い問題)を単位球面に向かうベクトルとしてのアナログな問題(丸い問題)に巧妙に変換し，そこに強力な数理計画法の1つ(半正定値計画法)を適用するというものであった．近似アルゴリズムに半正定値計画法の手法を適用したのはこれが初めてで，その有効性からきわめて画期的な手法と認識され，それ以降の半定値計画法に基づく高性能近似アルゴリズムの研究には目を見張るものがある．実際，MAX SATにも応用できて，MAX 2-SATに対する彼らのアルゴリズムを，Johnsonのアルゴリズムと線形計画法の手法に組み合わせると0.7584–近似アルゴリズムに結びつくことを示した[3]．これは，近似率の改善は低かったものの，MAX SATに対する0.75よりよい近似率を得るのはきわめて困難だと予想されていたので，これまた画期的な出来事であった．Asano-Hori-Ono-Hirata はYannakakisの0.75–近似アルゴリズムと半正定値計画法に基づくアルゴリズムとを組み合わせることにより0.767–近似アルゴリズムを提案した．これはさらに詳細化され0.770–近似アルゴリズムへと導かれている[1]．以下Goemans-Williamsonの半定値計画法に基づく0.7584–近似アルゴリズムを説明するが，かなり難しい内容であるので詳細に興味を持つ読者を対象にしている．この部分をスキップして次節から読み続けても問題はない．

彼らはまず，MAX SATを以下の半正定値計画問題

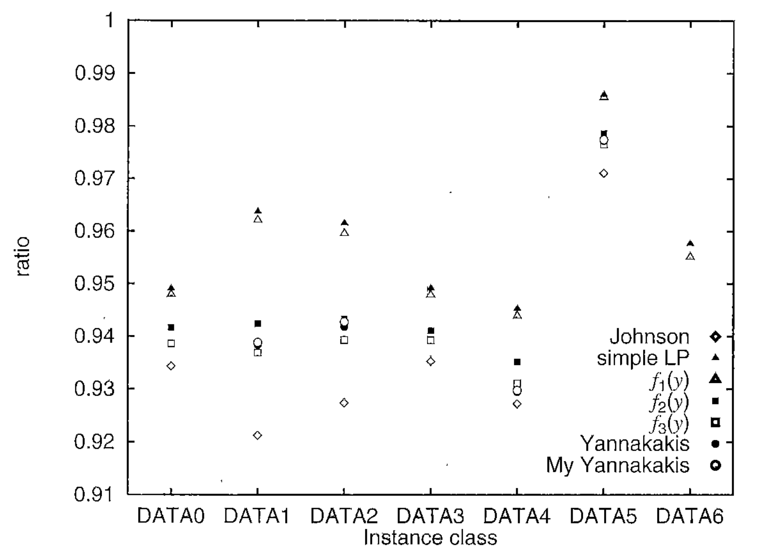

図-3　ランダム真偽割当の期待値の近似率

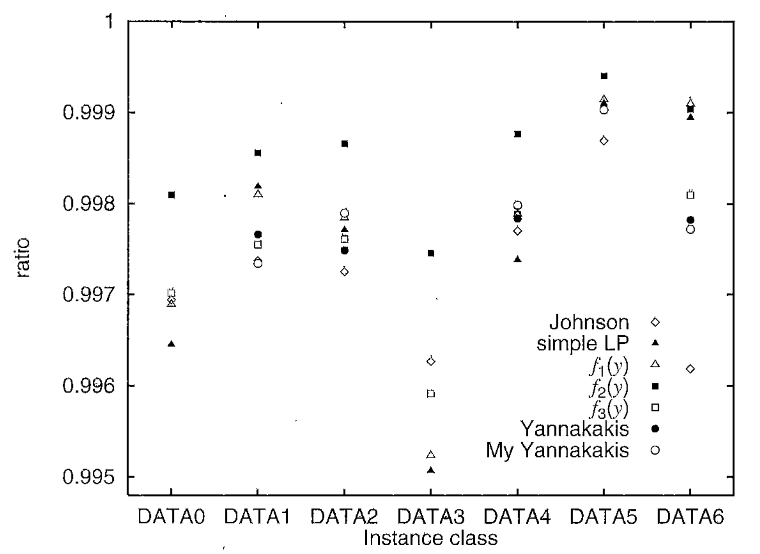

図-4　真偽割当の値の近似率（丸めはGreedy）

$$\max \sum_{C_j \in C} w(C_j) z_j$$

$$\text{subject to: } \sum_{x_i \in X_j} \frac{1 + sgn_j(x_i)\, y_{0i}}{2} \geq z_j \quad \forall C_j \in C$$

$$\frac{k}{2} C_j^{(2)}(Y) \geq z_j \quad \forall C_j \in C_k, \forall k \geq 2$$

$$y_{ii} = 1 \qquad 0 \leq \forall i \leq n$$

$$0 \leq z_j \leq 1 \qquad \forall C_j \in C$$

$Y = (y_{i1i2})$ は半正定値対称行列

に緩和した．ここで，X_j は C_j にあらわれる変数の集合であり，$sgn_j(x_i)$は，$sgn_j(x_i)=1(x_i \in X_j^+)$，$sgn_j(x_i)=-1(x_i \in X_j^-)$である．少し説明を加えよう．$Y=(y_{i1i2})$が半正定値対称行列とは，固有値が非負の対称行列であることである．あるいは，ある実数行列Bを用いて$Y=BB^T$と書けることであるともいえる(B^TはBの転置行列)．半正定値計画法のため，変数$\boldsymbol{y}=(y_0,y_1,\ldots,y_n)$を

$$y_0 y_i \equiv 2x_i - 1 \text{かつ} |y_0| = |y_i| = 1$$

を満たすようにしながら導入した．すると，x_i と $\bar{x}_i$ はそれぞれ，$\frac{1+y_0y_i}{2}$ と $\frac{1-y_0y_i}{2}$ となり，各$C_j \in C$ は$y = (y_0,y_1,\ldots,y_n)$ の関数として

$$C_j = C_j(y) = 1 - \prod_{x_i \in X_j} \frac{1 - sgn_j(x_i)\, y_0 y_i}{2}$$

と書ける．さらに，$|y_i|=1$となる y_i に対応してノルム$\|v_i\|=1$の$(n+1)$次元ベクトル$\boldsymbol{v}_i$を考え，$y_{i1}y_{i2}$をベクトルの内積$\boldsymbol{v}_{i1} \cdot \boldsymbol{v}_{i2}$で置き換え，$y_{i1i2}=\boldsymbol{v}_{i1} \cdot \boldsymbol{v}_{i2}$とおいた．すると，$\frac{1+y_{0i}}{2}$ がx_iに対応し，行列$Y=(y_{i1i2})$は，$\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n)$を用いて，$Y=\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v}$と書け，半正定値対称行列になる．

最初の制約式は，線形計画緩和問題の最初の制約式に対応する．すなわち，$C_j=1(z_j=1)$ならば，C_jに含まれるリテラルの少なくとも1つは真となることを意味している．したがって，任意の真偽割当 $\boldsymbol{x}$ に対して成立する．2番目の制約式はMAX 2-SATへの緩和問題に対応する．k個のリテラルを含む各$C_j \in C_k (k \geq 2)$は C_jの2個のリテラルからなる節の全体$C_j^{(2)}$として近似的に表現される．C_jの重みは均等に配分され，$C_j^{(2)}$の各節の重みは $\frac{2w(C_j)}{k(k-1)}$ となる．たとえば，$C_j=a_1 \vee a_2 \vee a_3$ならば，$C_j^{(2)}=\{a_1 \vee a_2, a_1 \vee a_3, a_2 \vee a_3\}$となり，$C_j^{(2)}$の各節の重みは $\frac{w(C_j)}{3}$ となる($C_j^{(2)}$の総重みは$w(C_j)$)．もちろん，C_jが2個のリテラルからなるときは $C_j^{(2)}=C_j$である．したがって，$C_j^{(2)}$はYの関数として書ける．$C_j \in C_k$が満たされるときは，C_jの少なくとも1つのリテラルが真であり，$C_j^{(2)}$の少なくとも$(k\text{-}1)$個の節が満たされる．したがって，2番目の制約式もすべての真偽割当で成立する．

こうして，上の定式化は，半正定値計画法に基づくMAX 2-SATと線形計画法の緩和と見なせる．この問題の解$Y = \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v}$ は2通りに用いられる．1つは線形計画緩和問題としてのランダム真偽割当($x_i^p= \frac{1+v_0 \cdot v_i}{2}$)とし

てであり，もう1つはMAX 2-SAT緩和に対応するランダム真偽割当である．後者は，$(n+1)$次元のランダムなベクトル $\boldsymbol{r}$ を用いて，$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}_i$と$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}_0$の符号が一致するとき $x_i=1$とし，それ以外のとき $x_i=0$として得られるランダム真偽割当である．これら2つのランダム真偽割当とともに，Johnsonによるランダム真偽割当も含めて，最良の期待値を持つランダム真偽割当を選べば，近似率0.7584が達成される．

各種手法の実際的性能実験

前節までに説明したアルゴリズムの実際的な立場からの性能を評価するための実験が堀–浅野[4]でなされている．そこでは，半正定値計画法による手法は除かれている．与えられた変数の2乗個の変数が導入されるため実験にまで至らなかったのが最大の理由である．その代わり，Goemans-Williamsonの線形計画法(simple LPと表示)の変形版(f_1,f_2,f_3と表示)とYannakakisの修正版(My Yannakakisと表示)の実験を行っている．実験データは 2nd DIMACS Implementation Challenge の SATインスタンスクラスjnhを加工したものであり，GRASPの実験に使われたものである[9]．さらにそれらのインスタンスに手を加えインスタンスはすべて100変数，800から950のクローズで構成されるようにしてある．データは7クラスあり，1クラス44インスタンス，計308個のインスタンスを用いている．また最適解はXPRESS-MPを用いて得ている．

図-3は各アルゴリズムによって得られたランダム真偽割当の期待値のクラスごとの平均値である．どのクラスにおいても期待値が最もよかったアルゴリズムは線形計画法の解をそのままランダム真偽割当に用いるものであり，期待値の平均値が最も悪かったのはJohnsonのアルゴリズムであった．**図-4**は，条件付き確率法を用いて，ランダム真偽割当から{0,1}真偽割当を求めたときの近似率を示している．ここでは，前から順に真偽割当を定めていく(丸める)方法はとらずに，現在まだ丸められていない変数 x_i^pの中で，それを丸めたときに得られる値が最も大きいものをGreedyに選び丸めている．真偽割当の値の平均値が，0.995 以上という結果であり，Greedyに丸めた効果は非常に大きい．

おわりに

制約充足問題やMAX SATのソルバとしての近似アルゴリズムの理論的な性能および実際的な性能について解説した．なお，最近MAX 3-SATに対して0.875近似アルゴリズムが提案されており[5]，それに基づけば，MAX SATに対するより高精度の近似アルゴリズムが得られるだろう．一方，半正定値計画法はきわめて強力な道具であり困難な組合せ問題に対する高精度近似アルゴリズムが多数得られている．クラスタリング，グラフ彩色，VLSIの配置配線問題などがその例である．また，Nonobe-Ibaraki[8]では，制約充足問題に対する一般的ソルバとしてのタブサーチ法の有効性を理論実際の両面から実証している．人工知能やVLSI設計への有効性もそれから理解できるであろう．その意味でも，制約充足問題やMAX SATのソルバとしての近似アルゴリズムの研究は今後ますますその重要性が増していくものと思われる．

本文をまとめるにあたり多くの人からご教示いただいた．心から感謝の意を表したい．特に，京都大学の茨木俊秀先生，岩間一雄先生には，時間割作成のデータをいただくと同時に，この問題を制約充足問題および充足可能性問題として定式化する方法を学ばせていただいた．東京大学の阿久津達也先生には，人工知能学会の解説記事の情報をいただくと同時に内容の構成についてご助言いただいた．また，名古屋大学の平田富夫先生，中央大学OBの堀邦彰氏にはすべてにおいてご協力いただいた．

参考文献

1)Asano, T.: Approximation Algorithms for MAX SAT: Yannakakis vs. Goemans-Williamson, Proc. 5th Israel Symp. Theory of Comput. & Systems, pp.24-37 (1997).
2)Goemans, M. X. and Williamson, D. P.: New 3/4-Approximation Algorithms for the Maximum Satisfiability Problem, SIAM J. Disc. Math., 7, pp.656-666 (1994).
3)Goemans, M. X. and Williamson, D. P.: Improved Approximation Algorithms for Maximum Cut and Satisfiability Problems using Semidefinite Programming, Journal of the ACM, 42, pp.1115-1145 (1995).
4)堀 邦彰, 浅野孝夫: MAX SATに対する近似アルゴリズムの実際的評価, 情報処理学会アルゴリズム研究会報告, SIGAL-TR-61-4, pp.23-30 (1998).
5)Karloff, H. and Zwick, U.: A 7/8-Approximation Algorithm for MAX 3SAT?, Proc. 38th IEEE Symp. Foundations of Computer Science, pp.406-415 (1997).
6)Miyazaki, S., Iwama, K. and Kambayashi, Y.: Database Queries as Combinatorial Optimization Problems, Proc. International Symposium on Cooperative Database Systems for Advanced Applications, pp.448-454 (1996).
7)西原清一: 制約充足問題の基礎と展望, 人工知能学会誌, 12, pp.351-358 (1997).
8)Nonobe, K. and Ibaraki, T.: A Tabu Search Approach to the CSP (Constraint Satisfaction Problem)as a General Problem Solver, European Journal of Operational Research, to appear.
9)Resende, M. G. C., Pitsoulis, L. S. and Pardalos, P. M.: Approximate Solution of Weighted MAX SAT Problems using GRASP, (D. Du, J. Du and M. Pardalos, eds.,) Satisfiability Problem: Theory and Applications, DIMACS 35, Amer. Math. Soc., pp.393-405 (1997).
10)Yannakakis, M.: On the Approximation of Maximum Satisfiability, J. Algorighms, 17, pp.475-502 (1994).

(平成10年5月7日受付)

◆◆◆