一般化メディアン安定結婚問題に対する乱択近似アルゴリズム

来嶋 秀治[1] 根本 俊男[2]

概要

本稿では，**一般化メディアン安定結婚** (*generalized median stable matching: GMSM*) 問題について議論する．GMSM は，問題構造から誘導される公平な安定マッチングとして，Teo-Sethuraman (1998) によって提案された．Cheng (2008) は i 番目の GMSM を見つけることは#P 困難であることを，$i = \mathrm{O}(N)$ の場合について示した．ただし N は入力例に対する安定マッチングの個数を表す．本稿では計算困難性に関する 2 つの結果を与える．ひとつは i 番目の GMSM を見つけることは $i = \mathrm{o}(N^{1/c})$ の場合でさえ#P 困難であることを示す．ただし $c \geq 1$ は任意の定数である．もうひとつは，与えられたマッチングが GMSM として現れるか否かの判定が#P 困難であることを示す．また，i 番目の GMSM に対する**乱択近似計算法**を 2 つ提案する．この計算法においては，半順序集合のイデアルの近似一様ランダム生成オラクルを仮定する．

Randomized Approximation for Generalized Median Stable Matching

Shuji Kijima and Toshio Nemoto

Abstract

This paper deals with finding a *generalized median stable matching* (GMSM), introduced by Teo and Sethuraman (1998) as a fair stable marriage. Cheng (2008) showed that finding the i-th GMSM is #P-hard in case of $i = \mathrm{O}(N)$, where N is the number of stable matchings of an instance. In this paper, we establish two hardness results. We show that finding the i-th GMSM is #P-hard even when $i = \mathrm{o}(N^{1/c})$, where $c \geq 1$ is an arbitrary constant, and that deciding if a matching can be a GMSM is #P-hard. We also devise two *randomized approximation schemes* for the i-th GMSM using an oracle for almost uniformly sampling ideals of a partially ordered set (poset).

1 Introduction

安定結婚問題では，入力として，n 人の男性からなる集合 M，n 人の女性からなる集合 W，および各人の異性全員に対する選好順序が与えられる．**マッチング**とは，n 組の男女の集合で，各人が丁度一回現れるものとする．あるマッチングにおいて，$m \in M$ と $w \in W$ が**ブロッキングペア**

[1]京都大学 数理解析研究所
Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University
kijima@kurims.kyoto-u.ac.jp
[2]文教大学 情報学研究科
Graduate School of Information and Communication, Bunkyo University

a. Preference list

Men's list

m_1	w_1	w_2	w_4	w_3	w_5
m_2	w_2	w_1	w_3	w_4	w_5
m_3	w_3	w_4	w_2	w_5	w_1
m_4	w_4	w_3	w_5	w_1	w_2
m_5	w_5	w_3	w_1	w_2	w_4

Women's list

w_1	m_2	m_1	m_3	m_4	m_5
w_2	m_3	m_1	m_2	m_4	m_5
w_3	m_5	m_4	m_3	m_2	m_1
w_4	m_1	m_3	m_4	m_5	m_2
w_5	m_4	m_5	m_1	m_2	m_3

b. Stable matchings

	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8
m_1	1	2	1	2	1	4	2	4
m_2	2	1	2	1	2	1	1	1
m_3	3	3	4	4	4	2	4	2
m_4	4	4	3	3	5	3	5	5
m_5	5	5	5	5	3	5	3	3

arrange each row

c. GMSMs

	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8
m_1	1	1	1	2	2	2	4	4
m_2	2	2	2	1	1	1	1	1
m_3	3	3	4	4	4	4	2	2
m_4	4	4	3	3	3	5	5	5
m_5	5	5	5	5	5	3	3	3

$\underbrace{\alpha_1\ \alpha_2}_{\mu_1}\ \underbrace{\alpha_3}_{\mu_3}\ \underbrace{\alpha_4\ \alpha_5}_{\mu_4}\ \underbrace{\alpha_6}_{\mu_7}\ \underbrace{\alpha_7\ \alpha_8}_{\mu_8}$

図 1: 一般化安定マッチングの例

であるとは，m，w 共に，お互いを現在のパートナーより好ましいものとする．ブロッキングペアを持たないマッチングを**安定マッチング**という．

Gale-Shaplay [6] は安定結婚問題に対する任意の入力例が安定マッチングを持つことを示し，さらに安定マッチングを求めるアルゴリズムを与えている．安定結婚問題の入力例に対して，一般に安定マッチングは複数存在し得る．Conway は安定マッチング全体の集合が分配束をなすことを指摘している [12]．また Blair [2] は任意の分配側に対して，同型な安定マッチング分配束をもつ入力例が存在することを示している．

Conway の指摘は，安定結婚問題のもつ別の性質，メディアン性を示唆している（[19, 7, 12] 参照）．この性質を一般化し，Teo-Sethuraman [19] は問題構造から誘導される公平な安定マッチングとして，**一般化メディアン安定マッチング**（*GMSM*: *generalized median stable matching*）の概念を提案した．以下，GMSM について簡単に述べる．

ある入力例に対して，安定マッチング全体の集合を $\mathcal{M}$ とし，$N \stackrel{\text{def.}}{=} |\mathcal{M}|$ とする．安定マッチング μ_i $(1 \leq i \leq N)$ に対して，μ_i における $m \in M$ の相手を $\mu_i(m) \in W$ で表す．また $\mathcal{M}(m)$ $(m \in M)$ は $\mu_i(m)$ $(1 \leq i \leq N)$ 全体のなすマルチセットとする．いま $m \in M$ に対して，$\alpha(m) = (\alpha_1(m), \alpha_2(m), \ldots, \alpha_N(m))$ は $\mathcal{M}(m)$ の要素を m の選好順序に従って並び替えたものとする．すなわち m にとって，各 i $(1 \leq i < N)$ について $\alpha_i(m) \in W$ は $\alpha_{i+1}(m) \in W$ と同じかより好ましいものである．この $\alpha(m)$ は各男性 $m \in M$ によって独立に並び替えられることに注意が必要である．このとき，α_i $(1 \leq i \leq N)$ を n 組の $m \in M$ と $\alpha_i(m) \in W$ による n 組の男女の対とすると，各 α_i は安定マッチングになることが Teo-Sethuraman [19] によって，線形計画法に基づいて証明された．この α_i を i 番目の一般化安定マッチング（i-th GMSM）と呼ぶ．

図 1 は男女各 5 人の入力例である．図 1-a は各人の選好順序を表す．男性のリストの i 行目には全女性が m_i の選好順序に従って左から右に並べられており，女性のリストには全男性が w_i の選好順序に従って並べられている．図 1-b はこの入力例の全安定マッチング $\mu_1, \ldots, \mu_8$ が表されている．表中の i 行 j 列には女性 $w_k = \mu_j(m_i)$ の添え字 k が記されている．従って，各列 $j \in \{1, \ldots, 8\}$ が安定マッチング μ_j に対応する．図 1-c では各 i 行目には全安定マッチングでの m_i の相手となる延べ 8 人が，m_i の選好順序に従って並べられている．すなわち i 行目には $\alpha(m_i)$（に相当する女性 $w_k = \alpha_j(m_i)$ の添え字 k）が記されている．このとき各 $\alpha_1, \ldots, \alpha_8$ は安定マッチングである．一般化安定マッチングの持つ他の性質については [19, 3] を参照されたい．

安定結婚問題において，男女間の公平性は重要な問題であり，$\lceil (N+1)/2 \rceil$ 番目の GMSM は問題構造のみから誘導される公平な安定マッチングと見ることができる．一般化安定結婚問題については多くの研究がなされている [3, 10, 11, 13, 16, 17, 19]．Cheng [3] は i 番目の GMSM を正確に計算することは#P 困難であることを i が $\mathrm{O}(N)$ の場合について示した．Cheng は [3] で，GMSM のローテーション半順序集合上での特徴づけを与えている．この特徴づけは根本 [13] によっても独立に発見されている．この特徴づけでは，ローテーション半順序集合上の**イデアル**の個数で定義される**レベル関数**に基づいて，各 GMSM が**サブレベル集合**に対応する（詳細は第 2 章参照）．Cheng [3] は $i = \mathrm{O}(\log n)$ の場合について，i 番目の GMSM を見つける多項式時間の厳密アルゴリズムも与えており，i が $\mathrm{o}(N)$ かつ $\omega(\log n)$ の場合の計算量を未解決問題として挙げている．Cheng は素朴な近似アルゴリズムも提案しているが，近似具合は $\mathrm{O}(N)$ の自明なものでしかない．なお，i 番目の GMSM に対する判定問題が NP に属するか否かは未解決である．

成果．本稿では i 番目の GMSM を見つける問題が任意の定数 $c \geq 1$ に対して $i = \mathrm{o}(N^{1/c})$ の場合でさえ#P 困難であることを示す．さらに，与えられた安定マッチングが GMSM として出現するか否かの判定さえも#P 困難であることを示す．また，2 つの乱択近似計算法も提案する．提案する計算法では半順序集合上のイデアルの近似一様生成オラクルを用いる．

関連研究．Irving-Leather [8] は安定マッチングの数え上げが#P 完全であることを示している．この証明では Provan-Ball [15] によって#P 完全性が示された半順序集合上の反鎖数え上げ（イデアル数え上げ）からの帰着行われている．Steiner [18] は直並列の場合や幅が制限された場合などの特殊なクラスの半順序集合に対して，動的計画法に基づく多項式時間のイデアル数え上げアルゴリズムを与えている．Propp-Wilson [14] は任意の半順序集合上のイデアルのランダム生成に関して，過去からのカップリング法に基づく完璧一様ランダム生成法を与えているが，このアルゴリズムは最悪の場合において期待計算時間が指数時間になることが知られている．イデアルのランダム生成について，多項式時間の（近似）一様生成法の存在は未解決である [1]．

2 準備

2.1 定義と記法

実数（非負実数，正実数）の集合を，それぞれ $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}_{+}$, $\mathbb{R}_{++}$) で表し，整数（非負整数，正整数）の集合を $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}_{+}$, $\mathbb{Z}_{++}$) で表す．半順序 $\preceq$ をもつ半順序集合 P を考える．部分集合 $X \subseteq P$ が P の**イデアル**とは，$x \in X$ かつ $y \preceq x$ ならば $y \in X$ が成り立つものとする．したがって $\emptyset$ も P のイデアルとなる．半順序集合 P に対して，$\mathcal{D}(P)$ でイデアル全体の集合を表す．

半順序集合 P に対して，（レベル）関数 $g : P \to \mathbb{Z}_{++}$ を

$$g(x) \stackrel{\text{def.}}{=} |\{X \in \mathcal{D}(P) \mid x \notin X\}| \qquad (x \in P) \tag{1}$$

と定義する．集合 $U(x) \subseteq P$ $(x \in P)$ を $U(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \{y \in P \mid y \succeq x\}$ と定義すると，$g(x) = |\mathcal{D}(P \setminus U(x))|$ が成り立つ．関数 $g(x)$ は $\prec$ に関して単調である．すなわち $x \prec y$ に対して $g(x) < g(y)$ が成り立つ．半順序集合 P が与えられ，$N = |\mathcal{D}(P)|$ としたとき，サブレベル集合 $S_i \subseteq P$ $(i \in \{1, \ldots, N\})$ を

$$S_i \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \in P \mid g(x) < i\} \tag{2}$$

と定義する．関数 $g(x)$ は単調であることから，S_i は P のイデアルとなる．この S_i を（i 番目の）**レベルイデアル**（*LI*）と呼ぶ．集合族 $\mathcal{F}(P) \subseteq \mathcal{D}(P)$ はレベルイデアル全体

$$\mathcal{F}(P) \stackrel{\text{def.}}{=} \{S \subseteq P \mid S = S_i \ (i \in \{1, \ldots, N\})\} \tag{3}$$

とする．

2.2 ローテーション半順序集合上での GMSM の特徴づけ

各 n 人の男女の組をもつある入力例の安定マッチング全体の集合を $\mathcal{M}$ とすると，$\mathcal{M}$ の大きさは指数的，具体的には 2^{n-1} と成りうることが知られている．For a distributive lattice of stable matchings 安定マッチング分配束 $\mathcal{M}$ に対して，別の半順序集合 R によるコンパクトな表現法が存在し，イデアル集合 $\mathcal{D}(R)$ と $\mathcal{M}$ は一対一に対応する[1]．半順序集合 R は**ローテーション半順序集合**と呼ばれ，R の各要素は，マッチング間の男女対の交換（一般的には巡回）に対応する（[7] 参照）．ローテーション半順序集合 R は $\mathrm{O}(n^2)$ 時間と記憶容量で得られ，$\mathcal{D}(R)$ と $\mathcal{M}$ の全単射写像も簡単に計算できることが知られている [7].

根本 [13] と Cheng [3] は独立に，i 番目の GMSM α_i がローテーション半順序集合 R の i 番目のレベルイデアル S_i に対応することを見つけている．

定理 2.1 [3, 13] 入力例に対する安定マッチング全体の集合を $\mathcal{M}$ として，半順序集合を R で表す．このとき，S_i $(1 \leq i \leq |\mathcal{M}|)$ を R の i 番目のレベルイデアルとすると，the stable matching corresponding to the ideal イデアル S_i に対応する安定マッチングは i 番目の GMSM α_i である．

本節の最後に，任意の半順序集合 P に対して，ある安定結婚問題の入力例が存在して，そのローテーション半順序集合は P と同型となる．このような入力例は $\mathrm{O}(|P|^2)$ 時間で見つかり，各 $\mathrm{O}(|P|^2)$ 人の男女からなる [2, 7].

3 レベルイデアル探索の困難性

本章ではまず次の問題を考える．

問題 1 半順序 P とイデアル $S \in \mathcal{D}(P)$ が与えられたとき $S \in \mathcal{F}(P)$ を満たすか？

この問題に対して，次の結果を得た．

定理 3.1 問題 1 は#P 困難である．

この結果と第 2.2 節の議論から，安定マッチング $M \in \mathcal{M}$ が GMSM α_i $(1 \leq i \leq |\mathcal{M}|)$ として現れるかの判定問題が NP 困難であることが導かれる．

証明． 半順序集合のイデアル数え上げ（半順序集合 P が与えられ $|\mathcal{D}(P)|$ を計算）は#P 完全問題として知られており [15]，この問題から帰着する．正確には半順序集合と P 整数 $K \in \mathbb{Z}_{++}$ が与えられたとき，質問 $|\mathcal{D}(P)| < K$ からの帰着を行う．この質問に答えられれば，K を 0 と $2^{|P|}$ の間で二分探索することで $|\mathcal{D}(P)|$ の計算が可能である．

整数 K に対して，$|\mathcal{D}(Q)| = K$ を満たす半順序集合を Q とする．このような Q が poly($\log K$) 時間で計算できることが知られている．いま半順序集合 R を $R \overset{\text{def.}}{=} (\{x\} \oplus P) \dot{\cup} (\{y\} \oplus Q)$ と定義する（図 2）参照）．ただし $\dot{\cup}$ は直和 (disjoint union)[2]を，$\oplus$ は線形和 (linear sum)[3]を表す．

[1] *Birkhoff* **の表現定理**についても，例えば [4] を参照されたい

[2] 半順序集合 P と Q に対して，$P \dot{\cup} Q$ は以下のように定義される．任意の $x, y \in P \dot{\cup} Q$ について，$x \preceq y$ となるのは $[x, y \in P$ かつ $x \preceq y]$ または $[x, y \in Q$ かつ $x \preceq y]$ の場合，かつその場合に限る．

[3] 半順序集合 P と Q に対して，$P \oplus Q$ は以下のように定義される．任意の $x, y \in P \oplus Q$ について，$x \preceq y$ となるのは $[x, y \in P$ かつ $x \preceq y]$ または $[x, y \in Q$ かつ $x \preceq y]$ または $[x \in P$ かつ $y \in Q]$ のいずれかの場合，かつその場合に限る．

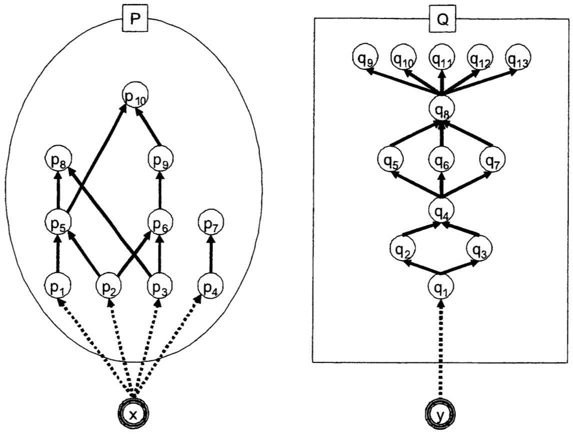

図 2: 半順序集合 $R \stackrel{\text{def.}}{=} (\{x\} \oplus P) \dot{\cup} (\{y\} \oplus Q)$ の例

各 $r \in R$ に対して，式 (1) で定義される $g(r)$ は

$$
\begin{array}{lllllll}
g(x) & = & |\mathcal{D}(R \setminus U(x))| & = & |\mathcal{D}(\{y\} \oplus Q)| & = & 1 + |\mathcal{D}(Q)|, \\
g(y) & = & |\mathcal{D}(R \setminus U(y))| & = & |\mathcal{D}(\{x\} \oplus P)| & = & 1 + |\mathcal{D}(P)|, \\
g(p) & = & |\mathcal{D}(R \setminus U(p))| & \geq & |\mathcal{D}\left((\{y\} \oplus Q) \dot{\cup} \{x\}\right)| & = & 2 \cdot g(x) \qquad (\forall p \in P), \\
g(q) & = & |\mathcal{D}(R \setminus U(q))| & \geq & |\mathcal{D}\left((\{x\} \oplus P) \dot{\cup} \{y\}\right)| & = & 2 \cdot g(y) \qquad (\forall q \in Q),
\end{array}
$$

を満たす．このとき，定義 (2) と (3) から，次の 3 つの場合わけが得られる．
<u>場合 1.</u> もし $|\mathcal{D}(P)| < |\mathcal{D}(Q)| = K$ の場合，すなわち $g(x) > g(y)$ より $\{x\} \notin \mathcal{F}(R)$ かつ $\{y\} \in \mathcal{F}(R)$ を得る．
<u>場合 2.</u> もし $|\mathcal{D}(P)| > |\mathcal{D}(Q)| = K$ の場合，すなわち $g(x) < g(y)$ より $\{x\} \in \mathcal{F}(R)$ かつ $\{y\} \notin \mathcal{F}(R)$ を得る．
<u>場合 3.</u> それ以外の場合，すなわち $|\mathcal{D}(P)| = |\mathcal{D}(Q)| = K$ より，$\{x\} \notin \mathcal{F}(R)$ かつ $\{y\} \notin \mathcal{F}(R)$ かつ $\{x, y\} \in \mathcal{F}(R)$ を得る．
以上の考察から，問題 1 として $\{y\} \in \mathcal{F}(R)$ を質問すると，'yes' (場合 1) なら $|\mathcal{D}(P)| < K$ が成り立ち 'no' (場合 2，3) なら $|\mathcal{D}(P)| \geq K$ が成り立つ． □

次に，以下の問題を考える．

問題 2 半順序集合 P，イデアル $S \in \mathcal{D}(P)$，および関数 $f : \mathbb{Z}_{++} \to \mathbb{Z}_{++}$ が与えられたとき，$i = f(|\mathcal{D}(P)|)$ とおくと，S は i 番目のレベルイデアルか？

この問題に対して次の結果を得た．

定理 3.2 半順序集合 R とイデアル $S \in \mathcal{D}(R)$ が与えられた時，$N = |\mathcal{D}(R)|$ とすると，任意の定数 $c \geq 2$ に対して，$S \in \mathcal{D}(R)$ が R の $\lceil N^{1/c} \rceil$ 番目のレベルイデアルか否かの判定は#P 困難．

この結果と第 2.2 節の議論から，安定マッチング $M \in \mathcal{M}$ が i 番目の GMSM α_i か否かの判定問題が $i = \mathrm{o}(N^{1/c})$ の場合でさえ NP 困難であることが導かれる．証明は省略する．

4　素朴な乱択近似計算法

定理 3.1 から単に $\mathcal{F}(P)$ 中のレベルイデアルを見つけることは困難である．従って i 番目のレベルイデアルに対する素朴な乱択近似計算法を与える．本章では次のオラクルを仮定する．

オラクル 1 (イデアルの近似一様ランダム生成法) 任意の ε $(0<\varepsilon<1)$ と半順序集合 P に対して，オラクルは $\mathcal{D}(P)$ の要素をランダムに出力し，その分布 ν は $d_{\mathrm{TV}}(\pi,\nu) \stackrel{\text{def.}}{=} (1/2)\|\pi-\nu\|_1 \leq \varepsilon$ を満足する．ただし π は $\mathcal{D}(P)$ 上の一様分布を表す．

オラクル 1 の計算量を γ_1 で記述する．なお γ_1 が $\mathrm{poly}(|P|,-\ln\varepsilon)$ かどうかは未解決である．オラクル 1 を用いて，問題 2 に対する乱択計算法を以下に与える．

アルゴリズム 1 (ε-estimator for the λN-th LI.)

1　**Input:** A poset P, λ $(0<\lambda<1)$, ε $(0<\varepsilon\leq\min\{\lambda,1-\lambda\})$, δ $(0<\delta<1)$.
2　**Set** $Z(p):=0$ for each $p\in P$.
3　**Repeat**($T\stackrel{\text{def.}}{=}\lceil -12\varepsilon^{-2}\ln(\delta/|P|)\rceil$ times){
4　　**Generate** $X\in\mathcal{D}(P)$ by Oracle 1 (where ν satisfies $d_{\mathrm{TV}}(\pi,\nu)\leq\varepsilon/2$).
5　　**For**(each $p\in P$){
6　　　**if** $p\notin X$ **then** $Z(p):=Z(p)+1$.
7　　}
8　}
9　**Set** $S\stackrel{\text{def.}}{=}\{p\in P \mid Z(p)/T<\lambda\}$.
10　**Output** S and **halt**.

定理 4.1 アルゴリズム 1 はイデアル $S\in\mathcal{D}(P)$ を $\mathrm{O}((\gamma_1+|P|)\varepsilon^{-2}\ln|P|/\delta)$ 時間で出力し，S は

$$\Pr\left[S_{\lfloor(\lambda-\varepsilon)N\rfloor}\subseteq S\subseteq S_{\lceil(\lambda+\varepsilon)N\rceil}\right]\geq 1-\delta. \tag{4}$$

を満たす．

証明の概略　計算量は自明である．アルゴリズム 1 の出力 S が P のイデアルであることを示すには $p\in P$ と $q\in P$ が $p\prec q$ かつ $q\in S$ ならば $p\in S$ を示せばよい．Step 1 の任意の確率変数 $X\in\mathcal{D}(P)$ について，X は P のイデアルなので，もし $q\in X$ ならば $p\in X$ が成り立つ．したがって Step 1 において，$Z(p)\geq Z(q)$ が成り立ち，Step 2 の S の定義から，もし $q\in S$ ならば $p\in S$ が成り立つ．

不等式 (4) を得るには，次の主張を導く

主張. 任意の $p\in P$ に対して，

<u>場合 1.</u> もし $g(p)\leq(\lambda-\varepsilon)N$ ならば，事象 $p\notin S$ (すなわち $Z(p)/T\geq\lambda$) の起こる確率は高々 $\delta/|P|$，

<u>場合 2.</u> もし $g(p)\geq(\lambda+\varepsilon)N$ ならば，事象 $p\in S$ (すなわち $Z(p)/T<\lambda$) の起こる確率は高々 $\delta/|P|$.

この主張は Chernoff 限界から得られるが，詳細は省略する．この主張を利用すると不等式 (4) が得られる．　■

この結果と第 2.2 節の議論から，安定結婚問題の入力例と比 λ が与えられたとき，λN 番目の GMSM $\alpha_{\lambda N}$ を近似する安定マッチング $\mu\in\mathcal{M}$ が得られ，

$$\Pr\left[\alpha_{\lfloor(\lambda-\varepsilon)N\rfloor}\preceq\mu\preceq\alpha_{\lceil(\lambda+\varepsilon)N\rceil}\right]\geq 1-\delta$$

を満たす．ただし $\preceq$ は安定マッチング分配束 $\mathcal{M}$ 上の半順序である（[12, 7] 参照）.

5 イデアルの近似数え上げに基づく計算法

第3章で議論したように, 問題2は i が $\mathrm{o}(N^{1/c})$ の場合でさえ#P 困難である. しかし, アルゴリズム1の近似比は N の線形を与えるだけである. 本章では i 番目のレベルイデアルに対する別の近似計算法を与える. 本章では以下のオラクルを仮定する.

オラクル 2 (イデアル数え上げに対する乱択近似計算法) 任意の ε $(0<\varepsilon<1)$ と δ $(0<\delta<1)$ および半順序集合 P に対して, オラクルは $|\mathcal{D}(P)|$ の近似値 $Z \in \mathbb{Z}_+$ を出力し,

$$\Pr\left[\frac{|Z-|\mathcal{D}(P)||}{|\mathcal{D}(P)|} \leq \varepsilon\right] \geq 1-\delta$$

を満たす.

オラクル2の計算量を γ_2 で表す. オラクル2はオラクル1を用いて, $\mathrm{poly}(\varepsilon^{-1}, -\ln\delta, |P|, \gamma_1)$ 時間, より詳細には $\mathrm{O}(\gamma_1 |P|^3 \varepsilon^{-2} \ln(|P|/\delta))$ 時間で実現可能である ([9] 等参照).

アルゴリズムの基本的なアイデアは各 $p \in P$ について, $g(p)$ の近似値 $\widehat{g}(p)$ を計算し, $\widehat{g}(p) < k$ を満たす部分集合 $S \subseteq P$ を出力しようというものである. しかし, この素朴なアイデアでは, 出力がイデアル $S \in \mathcal{D}(P)$ になるとは限らない. 本稿で提案するアルゴリズムはこの問題を解決するものである.

アルゴリズム 2 (ε-estimator for the $f(N)$-th LI.)

1 **Input:** A poset P, ε $(0<\varepsilon<\lambda)$, δ $(0<\delta<1)$, a uniformly contraction map $f:\mathbb{Z}_{++}\to\mathbb{Z}_{++}$.
2 **Compute** $\widehat{N}$ approximating $|\mathcal{D}(p)|$ by Oracle 2.
(where $\widehat{N}$ satisfies $\Pr[|\widehat{N}-|\mathcal{D}(p)|| \leq (\varepsilon/3)\cdot|\mathcal{D}(p)|] \geq 1-\delta/(2|P|)$).
3 **Set** $k := f(\widehat{N})$ (thus k satisfies $\Pr[|k-|f(N)|| \leq (\varepsilon/3)\cdot|f(N)|] \geq 1-\delta/(2|P|)$).
4 **Set** $S := \emptyset$, and $T := P$.
5 **While**($\exists p \in T\setminus S$, s.t. $\forall q \in P$, if $q \prec p$ then $q \in S$){
6 　**Compute** $\widehat{g}(p)$ approximating $g(p)$ by Oracle 2
　(where $\widehat{g}(p)$ satisfies $\Pr[|\widehat{g}(p)-g(p)| \leq (\varepsilon/3)\cdot g(p)] \geq 1-\delta/(2|P|)$).
7 　**If** $\widehat{g}(p) < k$ **then** $S := S\cup\{p\}$, **otherwise** $T := T\setminus\{q\}$.
8 }
9 **Output** S and **halt**.

定理 5.1 アルゴリズム2はイデアル $S \in \mathcal{D}(P)$ を $\mathrm{O}(|P|\cdot\gamma_2)$ 時間で出力し, S は

$$\Pr\left[S_{\lfloor(1-\varepsilon)f(N)\rfloor} \subseteq S \subseteq S_{\lceil(1+\varepsilon)f(N)\rceil}\right] \geq 1-\delta$$

を満たす.

証明は省略する. この結果と第2.2節の議論から, 安定結婚問題の入力例と関数 f が与えられたとき, $f(N)$ 番目の GMSM $\alpha_{f(N)}$ を近似する安定マッチング $\mu \in \mathcal{M}$ が得られ,

$$\Pr\left[\alpha_{\lfloor(1-\varepsilon)f(N)\rfloor} \preceq \mu \preceq \alpha_{\lceil(1+\varepsilon)f(N)\rceil}\right] \geq 1-\delta$$

を満たす. ただし $\preceq$ は安定マッチング分配束 $\mathcal{M}$ 上の半順序である ([12, 7] 参照).

6 まとめ

本稿では i 番目の GMSM に対する乱択近似計算法を与えた．Steiner [18] より，特殊なローテーション半順序集合をもつ入力例に対しては多項式時間で i 番目の GMSM を見つけることができる．しかし，このようなローテーション半順序集合をもつ入力例の特徴づけについては不明である．また，半順序集合のイデアルの近似一様ランダム生成法の多項式性については未解決である．問題 1 および 2 の判定問題版が NP に属するか否かも未解決である．

参考文献

[1] N. Bhatnagar, S. Greenberg, and D. Randall, Sampling stable marriages: why the spouse-swapping won't work, Proceedings of the nineteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms (SODA 2008), 1223–1232.

[2] C. Blair, Every finite distributive lattice is a set of stable matchings, Journal of Combinatorial Theory A, **37** (1984), 353–356.

[3] C.T. Cheng, The generalized median stable matchings: finding them is not that easy, Proceedings of the 8th Latin American Theoretical Informatics (Latin 2008), 568–579.

[4] B.A. Davey and H.A. Priestley, Introduction to Lattices and Order, Second Edition, Cambridge University Press, 2002.

[5] D.P. Dubhashi, K. Mehlhorn, D. Rajan, and C.Thiel, Searching, sorting and randomised algorithms for central elements and ideal counting in posets, Lecture Notes in Computer Science, **761** (1993), 436–443.

[6] D. Gale and L.S. Shapley, College admissions and the stability of marriage, The American Mathematics Monthly, **69** (1962), 9–15.

[7] D. Gusfield and R.W. Irving, The Stable Marriage Problem, Structure and Algorithms, The MIT Press, 1989.

[8] R.W. Irving and P. Leather, The complexity of counting stable marriages, SIAM Journal on Computing, **15** (1986), 655–667.

[9] M. Jerrum, Counting, Sampling and Integrating: Algorithms and Complexity, ETH Zürich, Birkhauser, Basel, 2003.

[10] B. Klaus and F. Klijn, Median stable matching for college admission, International Journal of Game Theory, **34** (2006), 1–11.

[11] B. Klaus and F. Klijn, Smith and Rawls share a room: stability and medians, Meteor RM/08-009 (2008), Maastricht University, `http://edocs.ub.unimaas.nl/loader/file.asp?id=1307`

[12] D. Knuth, Stable Marriage and Its Relation to Other Combinatorial Problems, American Mathematical Society, 1991.

[13] T. Nemoto, Some remarks on the median stable marriage problem, Proceedings of 17th International Symposium on Mathematical Programming, 2000.

[14] J. Propp and D.B.Wilson, Exact sampling with coupled Markov chains and applications to statistical mechanics, Random Structures and Algorithms, **9** (1996), 223–252.

[15] J.S. Provan and M.O. Ball, The complexity of counting cuts and of computing the probability that a graph is connected, SIAM Journal on Computing, **12** (1983), 777–788.

[16] M. Schwarz and M.B. Yenmez, Median stable matching, 2007, available at SSRN; `http://ssrn.com/abstract=1031277`

[17] J. Sethuraman, C.P. Teo, and L. Qian, Many-to one stable matching: geometry and fairness, Mathematics of Operations Research, **31** (2006), 581–596.

[18] G. Steiner, On the complexity of dynamic programming for sequencing problems with precedence constraints, Annals of Operations Research, **26** (1990), 103–123.

[19] C.P. Teo and J. Sethuraman, The geometry of fractional stable matchings and its applications, Mathematics of Operations Research, **23** (1998), 874–891.