非線形常微分方程式に関する数式処理の一つの試み
―パンルベの方程式計算の数式処理による追試―

津田塾大学数学科助教授　　渡辺 隼郎

1. 序

いわゆる特殊超越函数は，ガンマ函数を除いて，ほぼ全て1階または2階の常微分方程式の解であることが知られている。　たとえば 指数函数 e^x は $y'=y$ の解，三角函数 $\sin x$ と $\cos x$ は $y''=-y$ の解，楕円函数の1つペー函数 $\wp(x)$ は $(y')^2=4y^3-g_2y-g_3$ の解，ベッセル函数 Z_ν はベッセルの方程式 $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$ の解である。　逆に新しい超越函数を定義する方程式を代数的微分方程式

（1）　　$F(x, y, y', \ldots, y^{(m)})=0$

，ここにFは x の解析函数を係数とする $y, y', \ldots, y^{(m)}$ の多項式，の中から捜そうという試みが思いつく。　この問題は1854年アーベルとヤコビによる楕円函数論へと進む $(y')^2=(1-y^2)(1-k^2y^2)$ の研究に端を発し，以来多数の数学者によって研究が続けられた。　すなわちブリオとブーケ，フックス，ポアンカレ，ピカール，ミッターク・レフラ，フランセン，フレンベルク，フォーサイス，そしてパンルベ，ガンビエ，シャジィ，ガルニエ，ビューローー等である。

この問題においていわゆる動く特異点の存在が研究の焦点となる。　（1）において F が $y, y', \ldots, y^{(m)}$ に関して1次式，すなわち線形方程式ならば，$y^{(m)}$ の係数を1としたとき，（1）の解の特異点は必ず（1）の係数の特異点である。　（1）が非線形のときには，（1）の解の特異点は，一般解に含まれる任意定数に無関係な点に現われるものと，任意定数と共に動くものとに分けられる。前者を動かない特異点といい，後者を動く特異点という。

例　$y\cdot y''=(1+\lambda)(y')^2$ の一般解は　$y=(Ax+B)^\lambda$，A，B は任意定数.

新しい超越函数を見つけるためには，動く極は持っても動く分岐点と動く真性特異点を持たない方程式を見つけなければならない。　1階の代数的微分方程式

（2）　　$F(x, y, y')=0$

の動く特異点は分岐点と極であることをパンルベが示し，フックスとポアンカレは（2）が動く分岐点を持たないならば，（2）はリッカチの方程式

$$y'+p(x)+q(x)y+r(x)y^2=0$$

になるか，楕円函数を用いて積分できるか，代数的に積分できることを示した。

リッカチの微分方程式は　$y=w'/(r(x)\cdot w)$　なる変換で，2階線形方程式

$$w''+P(x)w'+Q(x)w=0$$

，ここに $P(x)=q(x)-r'(x)/r(x)$，$Q(x)=p(x)q(x)$，に移る。

以上より方程式（2）の中には新しい超越函数を定義する方程式のないことが分る。

さて2階の代数的微分方程式

（3）　　$F(x, y, y', y'')=0$

に対しても，1階の方程式に対してと同様に，動く分岐点と動く真性特異点を持たない方程式はどのような方程式か，そのような方程式のうちで一般解が，一価または有限多価となるのはどのような方程式か，そのような方程式を積分するのに，1階の方程式または線形方程式の解として得られる函数以外にどのような新

しい超越函数を必要とするか，という問題が提出される。　これらの問題は，ピカール，パンルベによって研究されたが，２階の方程式では動く超越特異点が現われるため研究は困難を極め，ピカールは１８９３年のActa Mathematica XVIIにおいて「２階以上の方程式において新しい超越函数を導く方程式を見つける可能性はほとんどない」と述べているほどである。

例　$y''=(y')^2\cdot\dfrac{2y-1}{y^2+1}$　の一般解は　$y=\tan\{\log(Ax-B)\}$

であるから，$x=B/A$ は動く超越特異点である。　$x\to B/A$ の極限値はない。

一方P. パンルベ（１８６３～１９３３）は１９００年の論文において，この分野において画期的なパラメータ導入の方法による，動く分岐点，動く真性特異点を持たない方程式の必要条件を求めるための手続きと，この手続きを，２階の有理的微分方程式（（３）において y'' に関し１次の方程式）

$$(4)\qquad y''=\frac{P(x,\ y,\ y')}{Q(x,\ y,\ y')}$$

に適用した結果の一部をのせ，十分条件の判定に必要な計算をこのようにして得られた方程式の１つに適用している。　さらに１９０２年の論文において，必要条件を求める計算の残りと結果をのせている。　ガンビエは１９１０年の論文において，パンルベの計算の欠を補っている。

このようにパンルベの計算は動く分岐点（今後真性特異点もこれに含める）を持たないための必要条件と，そうして求まった５０個の方程式を簡単な変換

$$(5)\qquad w=\frac{l(x)y+m(x)}{p(x)y+q(x)}\qquad z=\phi(x)\ ,\qquad l,m,p,q,\phi:\ x\text{の解析函数}$$

により次の６つの標準形に直すことと，十分条件の計算とからなる。

$$(6)\quad\left\{\begin{array}{ll}
\text{(i)}\ \ y''=6y^2+x\ , & \text{(ii)}\ \ y''=2y^3+xy+\alpha\ ,\\[6pt]
\multicolumn{2}{l}{\text{(iii)}\ \ y''=\dfrac{1}{y}(y')^2-\dfrac{1}{x}y'+\dfrac{1}{x}(\alpha y^2+\beta)+\gamma y^3+\dfrac{\delta}{y}\ ,}\\[8pt]
\multicolumn{2}{l}{\text{(iv)}\ \ y''=\dfrac{1}{2y}(y')^2+\dfrac{3}{2}y^3+4xy^2+2(x^2-\alpha)y+\dfrac{\beta}{y}\ ,}\\[8pt]
\multicolumn{2}{l}{\text{(v)}\ \ y''=\left\{\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{y-1}\right\}(y')^2-\dfrac{1}{x}y'+\dfrac{(y-1)^2}{x^2}\left\{\alpha y+\dfrac{\beta}{y}\right\}+\dfrac{\gamma}{x}y+\dfrac{\delta y(y+1)}{y-1}\ ,}\\[8pt]
\multicolumn{2}{l}{\text{(vi)}\ \ y''=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y-1}+\dfrac{1}{y-x}\right\}(y')^2-\left\{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{y-x}\right\}y'}\\[8pt]
\multicolumn{2}{r}{\qquad+\dfrac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left\{\alpha+\dfrac{\beta x}{y^2}+\dfrac{\gamma(x-1)}{(y-1)^2}+\dfrac{\delta x(x-1)}{(y-x)^2}\right\}}
\end{array}\right.$$

この６つの方程式をパンルベの方程式，その解をパンルベの超越函数という。

私達は以下においてパンルベ，ガンビエの計算を追いかけて，いかに厖大な計算が必要で，数式処理プログラムによる検算が必要であるかを見てゆくことにしよう。　その目的は第１に検算そのもの，特により難かしい十分条件の検証にある。　十分条件に必要な計算はパンルベは方程式（i）のみに対して行っており（ii）から（vi）に対しては十分条件の計算はなされていないように思える。

目的の第２は，これらの計算は数学的な計算技巧の多様のものが集められており，それ自身興味の対象となるからである。

2. 手続きの概略

対象とする方程式は，Fをxの解析函数を係数とするyとy'の多項式を分子，分母とする有理式としたとき

(A) $$y''=F(x,y,y')$$

の形である．連立に直すと $\frac{dy}{dx}=p$，$\frac{dp}{dx}=F(x,y,p)$ もっと一般にして

$$\frac{dy}{dx}=H(x,y,u,\alpha),\quad \frac{du}{dx}=K(x,y,u,\alpha)$$

，ここにHとKは，0を含む領域Dにおいてパラメータαの解析函数であって，αに関する巾級数の係数はyとuの多項式を分子分母とする有理式である．常微分方程式の基礎定理により，初期条件 $x=x_0$ のとき$y=y_0$，$u=u_0$ を満たすαとαに関し解析的な解 $y(x,\alpha)$ と$u(x,\alpha)$が唯一組存在する．

<u>補題</u>（パンルベ）

$y(x,\alpha)$と$u(x,\alpha)$が0以外のDの全ての点で一価なら$\alpha=0$でも一価．

（証明）$x=x_0$ を始点終点とする閉曲線Cで，$y_0(x)=y(x,0)$と$u_0(x)=u(x,0)$がその上で解析的なものを考える．十分小さい$|\alpha|$をもつαとC上のxに対し

$$y(x,\alpha)=y_0(x)+y_1(x)\alpha+\cdots,\quad u(x,\alpha)=u_0(x)+u_1(x)\alpha+\cdots$$

は収束する．xをC上一周したときの$y_\nu(x)$の増分をk_νとすると，$\sum_{\nu=0}^{\infty}k_\nu\alpha^\nu=0$が$0<|\alpha|\leq a_0$なる任意の$\alpha$に対して成り立つ．ゆえに$k_\nu=0$，$\nu=0,1,2,\ldots$したがって$y_0(x)$，$y_1(x)$，…は一価である．同様に$u_0(x)$，$u_1(x)$，…も一価なことが分る．（証明終り）

分岐点と真性特異点を<u>危険点</u>とよぶ．(A)と同値な連立方程式

(B) $$\frac{dy}{dx}=H(x,y,u),\quad \frac{du}{dx}=K(x,y,u)$$

と同じ動かない危険点を持ち，$\alpha=0$のとき積分できるようにαを導入する．求積法で求めた$y_i(x)$と$u_i(x)$が動く危険点を持たないことが，(B)の解が動く危険点を持たないための必要条件である．これがパンルベのパラメータ導入法である．

$u=g(x_0,y_0)$をH(x_0,y_0,u)とK(x_0,y_0,u)の少くとも一方の極とする．$U=u-g(x,y)$なる変換をすれば$g(x,y)\equiv 0$と考えてよい．(B)は

$$u^m\frac{dy}{dx}=H_0(x,y)+uH_1(x,y)+\cdots,\quad u^n\frac{du}{dx}=K_0(x,y)+uK_1(x,y)+\cdots$$

$m<n+1$，$0<n$ と仮定し$x=x_0+\alpha^{n+1}X$，$y=y_0+\alpha^{n-m+1}Y$，$u=\alpha U$とおくと

$$U^m\frac{dY}{dX}=H_0(x_0,y_0)+O(\alpha),\quad U^n\frac{dU}{dX}=K_0(x_0,y_0)+O(\alpha).$$

この連立方程式は(B)と同じ動かない危険点をもつ．$\alpha=0$のとき

$$U=\{(n+1)K_0X+A\}^{\frac{1}{n+1}}\text{，Aは任意定数．}$$

これは動く分岐点をもつから，$m\geq n+1$が必要条件である．$K_0(x,y)$，等を0と見なせば$m=n+1$と仮定できる．$x=x_0+\alpha^mX$，$u=\alpha U$とおくと

$$U^m\frac{dy}{dX}=H_0(x_0,y)+O(\alpha),\quad U^{m-1}\frac{dU}{dX}=K_0(x_0,y)+O(\alpha)$$

3．手続きの適用

Rをxの解析函数を係数とするyとpの多項式を分子分母とする有理式として

(C) $\quad y'' = R(x, y, p)$， $\quad p = y'$

を考えよう。　この方程式は

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} = R(x, y, p)$$

と同値である。　この場合$m = 0$であるから，Rが極$p = g(x, y)$を持てば，条件$m \geq n+1$は満たされない。　ゆえにRはpの多項式でなければならない。　その次数をqとする。　$p = 1/u$とおくと　(C)は次と同値である。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}, \quad u^{q-2}\frac{du}{dx} = -u^q R(x, y, \frac{1}{u}) = R_0(x, y) + R_1(x, y)u + \cdots$$

この場合$m = 1$，$n = q-2$である。　条件$m \geq n+1$は$q \leq 2$となる。　(C)は

(D) $$\frac{d^2y}{dx^2} = L(x, y)p^2 + M(x, y)p + N(x, y)$$

，ここにL，M，Nはxの解析函数を係数とするyの有理式，となる。

$x = x_0 + \alpha X$　とおくと　(D)は$\alpha = 0$のとき

$$\frac{d^2y}{dX^2} = L(x_0, Y)\left(\frac{dy}{dX}\right)^2$$

となる。　まず方程式（E）が動く危険点を持たない条件を求める必要がある。

(E) $$\frac{d^2y}{dx^2} = p^2 l(y)$$

$l(y)$がr位の極y_1を持つとする。　$y_1 = 0$としても一般性を失わない。

方程式は　$\dfrac{dy}{dx} = p$，　$\dfrac{dp}{dx} = p^2 y^{-r}\{k + O(y)\}$．　$y = \alpha Y$，$p = \alpha^r P$　とおくと

$$\frac{dY}{dx} = \alpha^{r-1}P, \quad \frac{dP}{dx} = \frac{kP^2}{Y^r} + O(\alpha). \quad (k\text{は定数.})$$

となる。　この連立方程式の解をαの巾級数として表わすと，

$$Y = Y_0 - \frac{\alpha^{r-1}}{k}Y_0^r \log\left(\frac{x+C}{x_0+C}\right) + O(\alpha^r), \quad P = -\frac{Y_0^r}{k(x+C)} + O(\alpha), \quad C = -x_0 - \frac{Y_0^r}{P_0 k},$$

となる。　ゆえに$r > 1$ならば，Y_rは動く危険点$-C$を持つ。　$r = 1$のとき

$$\frac{dY}{dx} = P, \quad \frac{dP}{dx} = \frac{kP^2}{Y} + O(\alpha)$$

$\alpha = 0$のとき，この方程式は$k \neq 1$なら$Y = (Ax+B)^{\frac{1}{1-k}}$，$k = 1$なら$Y = e^{Ax+B}$なる解をもつが，動く分岐点を持たないためには　$k = 1 + 1/n$　または$k = 1$が必要条件である。　したがって$l(y)$の任意の極y_1の主要部は

$$\frac{1+1/n_1}{y-y_1} \quad \text{または} \quad \frac{1}{y-y_1}$$

である。　方程式（E）はその第1積分として$P = C\cdot\exp\left(\int l(y)dy\right)$を持つ。$l(y)$の極の主要部は第1積分の右辺において$(y-y_1)^{1+\frac{1}{n_1}}$，$(y-y_1)^1$の寄与をする。　νをこのようなn_1（複数）の最小公倍数とすると，第1積分は

(F) $\quad p^\nu = \phi(y)$

となる。　ここにϕは有限部分で極以外の特異点を持たない。　$y = Y^{-1}$なる変換により$y = \infty$が高々極であること，ゆえに$\phi(y)$が有理式なることが分る。

問題は（F）の形をした方程式の中で，動く分岐点を持たないものを決定することに帰着された。 ブリオとブーケは1855年にこの問題に解答を与えている。 すなわち，$\phi(y)$は恒等的に0であるか，次のI'〜VI'のどれかに属する。
（F）をxで微分すると $l(y)=\phi'(y)/(2\cdot\phi(y))$ を得るので，対応する（E）の$l(y)$はI〜VI となる。 型IIは型IIIの退化した形($a_1=a_2$)である。

I' $P^m+K(x)(y-a_1)^{m+1}(y-a_2)^{m-1}=0 \quad m\geq 1$ I $l(y)=\dfrac{m+1}{m(y-a_1)}+\dfrac{m-1}{m(y-a_2)}$

III' $P^2+K(x)\prod_{i=1}^{4}(y-a_i)=0$ III $l(y)=\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\dfrac{1}{y-a_i}$

IV' $P^3+K(x)\prod_{i=1}^{3}(y-a_i)^2=0$ IV $l(y)=\dfrac{2}{3}\sum_{i=1}^{3}\dfrac{1}{y-a_i}$

V' $P^4+K(x)(y-a_1)^3(y-a_2)^3(y-a_3)^2=0$ V $l(y)=\dfrac{\frac{3}{4}}{y-a_1}+\dfrac{\frac{3}{4}}{y-a_2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{y-a_3}$

VI' $P^6+K(x)(y-a_1)^5(y-a_2)^4(y-a_3)^3=0$ VI $l(y)=\dfrac{\frac{5}{6}}{y-a_1}+\dfrac{\frac{2}{3}}{y-a_2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{y-a_3}$

ここで $a_i=a_i(x)$ は同じであってもよく，∞でもよい。 以上で方程式（D）

$$\frac{d^2y}{dx^2}=L(x,y)P^2+M(x,y)P+N(x,y)$$

の解が動く特異点を持たないための必要条件は，L(x,y)が恒等的に0であるか，あるいは上の型I〜VIのいずれかに属さなければならないことが分った。
$y=h(x)$が$M(x,y)$のj位の極で，$N(x,y)$のk位の極とする。 $Y=y-h(x)$なる変換を考えることにより，極$h(x)=0$と仮定できる。 方程式は

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{P^2}{y}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)+O(y)\right\}+\frac{P}{y^j}\{M(x)+O(y)\}+\frac{1}{y^k}\{N(x)+O(y)\}$$

，$y=0$がLの極ならばnは0，1と異なる整数であり，$y=0$がLの極でないならば$n=1$である。 ただし $M(x)=M(x,0)$，$N(x)=N(x,0)$。
$k\leq 2j-1$ なら $y=\alpha Y$，$x=x_0+\alpha^j X$，$k\geq 2j-1$ なら $y=\alpha Y$，$x=x_0+\alpha^{\frac{k+1}{2}}X$ なる変換を施し， $P=dY/dX$， $M_0=M(x_0)$，$N_0=N(x_0)$ を用いると

$k<2j-1$ のとき $\dfrac{d^2Y}{dX^2}=\dfrac{P^2}{Y}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{M_0P}{Y^j}+O(\alpha)$，

$k>2j-1$ のとき $\dfrac{d^2Y}{dX^2}=\dfrac{P^2}{Y}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{N_0}{Y^k}+O(\alpha)$，

$k=2j$ のとき $\dfrac{d^2Y}{dX^2}=\dfrac{P^2}{Y}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{M_0P}{Y^j}+\dfrac{N_0}{Y^k}+O(\alpha)$，

となる。 3番目の方程式は$\alpha=0$のとき，M_0とN_0が0になりうるという条件で前の2つの方程式を含む。 これは次の連立方程式と同値である。

$$\frac{dX}{dY}=uY^{j-1},\quad \frac{dY}{du}=-\frac{Y}{u(j-1/n+M_0u+N_0u^2)}$$

$j>1$と仮定すると$j\neq 1/n$，またM_0とN_0は同時に0とはならないから，

$$N_0u^2+M_0u+j-\frac{1}{n}=0$$

は0でない根を少くとも1つ持つ，これを$u=u_1$（定数）とする。 $u=u_1$はこの連立方程式の2番目を満たす。 才1の方程式は $dY/dX=u_1^{-1}Y^{1-j}$ となり，その解 $Y=(jX/u_1+C)^{\frac{1}{j}}$ は$j>1$より動く分岐点を持つ。

このようにして必要条件 $j=k=1$ を得る。 $n=1$ と仮定すると方程式は
$$\frac{d^2Y}{dX^2}=\frac{M_0P+N_0}{Y} \quad \text{となりこれは} \quad \frac{dY}{dX}=\frac{1}{u},\ \frac{du}{dX}=-\frac{u(M_0+N_0u)}{Y}$$
と同値である。 u を αu で，X を αX で置き換えると
$$\frac{dY}{dX}=\frac{1}{u},\quad \frac{du}{dX}=-\frac{\alpha u(M_0+\alpha N_0 u)}{Y},$$
となる。 この方程式の解を α の巾級数として求めると $Y=Y_0+\frac{X-X_0}{u_0}+O(\alpha)$，

$M_0\neq 0$ ならば $u=u_0-\alpha M_0u_0^2\log(Y_0+\frac{X-X_0}{u_0})+O(\alpha^2)$，

$M_0=0$ ならば $u=u_0-\alpha N_0u_0^3\log(Y_0+\frac{X-X_0}{u_0})+O(\alpha^3)$

となる。 これは動く危険点を持つゆえに $n\neq 1$，$j=k=1$ が必要条件となる。 すなわち方程式（D）において $M(x,y)$ と $N(x,y)$ の極は1位であって，それは $L(x,y)$ の極に含まれなければならない。 $L(x,y)$ は型 I ～ VI だから，
$$L(x,y)=\frac{\lambda(x,y)}{D(x,y)},\quad M(x,y)=\frac{\mu(x,y)}{D(x,y)},\quad N(x,y)=\frac{\nu(x,y)}{D(x,y)}$$
と書ける。 ここに $D(x,y)$，$\lambda(x,y)$，$\mu(x,y)$，$\nu(x,y)$ の y に関する次数をそれぞれ δ，λ，μ，ν とすると $\delta\leq 4$，$\lambda\leq\delta-1$ はすぐにいえる。

方程式（D）において $y=Y^{-1}$ とおくと
$$\frac{d^2Y}{dx^2}=\left\{2Y-L(x,\tfrac{1}{Y})\right\}\frac{1}{Y^2}\left(\frac{dY}{dx}\right)^2+M(x,\tfrac{1}{Y})\frac{dY}{dx}-Y^2N(x,\tfrac{1}{Y})$$
となる。 型 I ～ VI における $L(x,y)$ の a_i が全て有限ならば $\{2Y-L(x,Y^{-1})\}Y^{-2}$ は $Y=0$ において有限か 0 である。 これは型 I ～ VI に対して確かめればよい。 これから $Y=0$ は $M(x,Y^{-1})$ の極でもないし，$Y^2N(x,Y^{-1})$ の極でもない。 すなわち $\delta-\mu\geq 0$，$2+\delta-\nu\geq 0$，つまり $\mu\leq\delta$，$\nu\leq\delta+2$。 一方 $L(x,y)$ が恒等的に 0 であるか，型 I ～ IV における a_1，a_2，a_3，a_4 のどれかが ∞ であるならば $Y=0$ は $\{2Y-L(x,Y^{-1})\}Y^{-2}$ の1位の極である。 この場合 $Y=0$ は $M(x,Y^{-1})$ または $N(x,Y^{-1})$ の1位の極であるか極でない。 すなわち，$\delta-\mu\geq -1$，$2+\delta-\nu\geq -1$，つまり $\mu\leq\delta+1$，$\nu\leq\delta+3$。

$L(x,y)$ が極を（1）1つ a_1 （2）2つ a_1，a_2 （3）3つ a_1，a_2，a_3 または4つ a_1，a_2，a_3，a_4 持つとき，それぞれ次の変換を（D）にほどこす。

（1） $Y=\frac{1}{y-a_1}$ （2） $Y=\frac{y-a_2}{y-a_1}$ （3） $Y=\frac{a_1-a_3}{a_2-a_3}\cdot\frac{y-a_2}{y-a_1}$

方程式は次の形となる，また必要条件の諸性質はこの変換で不変である。
$$\frac{d^2Y}{dx^2}=A(x,Y)\left(\frac{dY}{dx}\right)^2+B(x,Y)\frac{dY}{dx}+C(x,Y)$$
，ここで $A(x,Y)$ は次の8つの形のどれかをとる。

i. 0，　ii. $\frac{1}{Y}$，　iii. $\frac{m-1}{mY}$，m は >1 なる整数，iv. $\frac{1}{2Y}+\frac{1}{Y-1}$，

v. $\frac{2}{3}\left\{\frac{1}{Y}+\frac{1}{Y-1}\right\}$，　vi. $\frac{3}{4}\left\{\frac{1}{Y}+\frac{1}{Y-1}\right\}$，　vii. $\frac{2}{3Y}+\frac{1}{2(Y-1)}$，

viii. $\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{Y}+\frac{1}{Y-1}+\frac{1}{Y-\eta}\right\}$，　$\eta=\frac{a_1-a_3}{a_2-a_3}\cdot\frac{a_2-a_4}{a_2-a_3}$．

iii は型 I から；ii, iv, viii は型 III から；v は型 IV から；vi は型 V から，vii は型 VI から生ずる。

場合 i. (D) において $L(x,y)\equiv 0$, $\delta=0$ より $\mu\leq 1$, $\nu\leq 3$. 方程式は

$$(G)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\{A(x)y+B(x)\}\frac{dy}{dx}+\{C(x)y^3+D(x)y^2+E(x)y+F(x)\}$$

となる. $y=\alpha^{-1}Y$, $x=x_0+\alpha X$ とおくと (G) は

$$\frac{d^2Y}{dX^2}=A(x_0)Y\frac{dY}{dX}+C(x_0)Y^3+O(\alpha)$$

となり, $\alpha=0$ のときこれは次の方程式と同値である.

$$\frac{dY}{dX}=\frac{Y^2}{u},\quad \frac{du}{dX}=(2-a_0u-c_0u^2)Y\ ,\ a_0=A(x_0),\ c_0=C(x_0)$$

$c_0=0$ のとき方程式は第1積分 $dY/dX=\frac{1}{2}a_0Y^2+\gamma$ を持ち, 解は1価である。$c_0\neq 0$ のとき y を $y\{-C(x)\}^{-1/2}$ でおきかえると $C(x)$ は -1 で置き換わる. したがって一般性を失うことなく $c_0=-1$ と仮定できる. 連立方程式は

$$\frac{dY}{dX}=\frac{Y^2}{u},\quad \frac{du}{dX}=(u-h)(u-k)Y,\ (h+k=a_0,\ hk=2)$$

となる。 $h=k$ と仮定し, $u=h+\alpha v$ なる変換を施すと方程式と, その解は

$$\frac{dY}{dX}=\frac{Y^2}{h+\alpha v},\quad \frac{dv}{dX}=\alpha v^2Y$$

$$Y=-\frac{h}{X-C_1}+O(\alpha),\quad v=C_2-\alpha C_2^2h\log(X-C_1)+O(\alpha)$$

, ここに C_1 と C_2 は積分定数, となり解は動く危険点を持つから $h\neq k$. この時

$$\frac{dY}{dX}=\frac{Y^2}{h+\alpha v},\quad \frac{dv}{dX}=(h-k+\alpha v)vY$$

の解 $\quad Y=-\dfrac{h}{X-C_1}+O(\alpha),\quad v=C_2(X-C_1)^{2-h^2}+O(\alpha)$

は, $2-h^2$ が0でない整数でなければ動く分岐点を持つ. $2=h^2$ は $h=k$ だから この場合は除く必要がある. したがって $h^2=2-m$, 同様に $k^2=2-m'$. したがって $(2-m)(2-m')=h^2k^2=4$ となり, 次の3つのみが可能である。

1°	$2-m=1$,	$2-m'=4$	1′	$h=\pm 1$, $k=\pm 2$,	$a_0=\pm 3$
2°	$2-m=-1$,	$2-m'=-4$	2′	$h=\pm i$, $k=\mp 2i$,	$a_0=\mp i$
3°	$2-m=-2$,	$2-m'=-2$	3′	$h=\pm\sqrt{-2}$, $k=\mp\sqrt{-2}$,	$a_0=0$

1′ で $y=-y_1$ とすると $A(x)$ は $-A(x)$ となるから, 場合 $a_0=+3$ は場合 $a_0=-3$ と異ならない. 2′ で $y=\pm iy_1$ とすると $C(x)$ は $-C(x)$ となるから, 場合 $c_0=-1$ は $c_0=+1$ となり, $A(x)$ は $iA(x)$ となるから, 場合 $a_0=i$ は $a_0=-1$ となる.

x_0 は任意の点であったから $a_0=A(x_0)=-3$ という関係式は $A(x)=-3$ と同値である. すなわち $A(x)$ は定数である. 以上で下記 (c), (d) が出る.

$A=0$, $C\neq 0$ のとき Y を $Y\sqrt{2/C}$ で置き換えると, C は -2 で置き換えられる (e). $A\neq 0$, $C=0$ のとき Y を $-2Y/A$ でおきかえると A は -2 で置き換えられる。

以上をまとめると場合 i. において $y=\lambda(x)Y$ なる変換により A と C は

(a) $A=0$, $C=0$ (b) $A=-2$, $C=0$ (c) $A=-3$, $C=-1$

(d) $A=-1$, $C=1$ (e) $A=0$, $C=2$

の形となる. 変換 $y=\lambda(x)Y$, $X=\phi(x)$ により (G) は次の形となる.

$$\frac{d^2Y}{dX^2}=\frac{dY}{dX}\frac{1}{\phi'}\left\{A\lambda Y+A\mu+B-\frac{2\lambda'}{\lambda}-\frac{\phi''}{\phi'}\right\}+\frac{C\lambda^2Y^3}{\phi'^2}+\{A\lambda'+3C\lambda\mu+D\lambda\}\frac{Y^2}{\phi'^2}$$

$$+\left\{A\frac{\lambda'\mu}{\lambda}+\frac{B\lambda'}{\lambda}+A\mu'+3C\mu^2+2D\mu+E-\frac{\lambda''}{\lambda}\right\}\frac{Y}{\phi^2}+\left\{A\mu\mu'+B\mu'+C\mu^3+D\mu^2+E\mu+F-\mu''\right\}\frac{1}{\lambda\phi'^2}.$$

場合 i(a). $A=C=0$ のとき λ, μ, ν は次を満たすように選ぶ

$$\frac{2\lambda'}{\lambda}+\frac{\phi''}{\phi}=B,\quad D\lambda=6\phi'^2,\quad 2D\mu=\frac{\lambda''}{\lambda}-\frac{B\lambda'}{\lambda}-E$$

$D=0$ のとき方程式は I. $d^2Y/dX^2=0$, $D\neq 0$ のとき $\frac{d^2Y}{dX^2}=6Y^2+S(X)$ となる。 a を任意定数として $Y=\alpha^{-2}V$, $X=a+\alpha u$ なる変換を施すと

$$\frac{d^2V}{du^2}=6V^2+\alpha^4S(a)+\alpha^5uS'(a)+\frac{1}{2}\alpha^6u^2S''(a)+O(\alpha^7)$$

となる。 この方程式の解は α の巾級数の形で

$$V=v+\alpha^4v_0+\alpha^5v_1+\alpha^6v_2+\cdots,\quad v''=6v^2,\quad v_r''-12vv_r=\frac{u^r}{r!}S^{(r)}(a)\ (r=0,1,2,3)$$

と得られる. $v''=6v^2$ の第1積分は $v'^2=4v^3-h$。 $y'^2=4y^3-g_2y-g_3$ の一般解が $y=\wp(x-k,g_2,g_3)$ であるから $v=\wp(u-k,0,h)$, ここに h と k は積分定数である。

さて同次微分方程式 $v_r''-12\wp(u-k,0,h)v_r=0$ の一般解は C_1, C_2 を積分定数として $v_r=C_1\{u\wp'+2\wp\}+C_2\wp'$ の形である。 非同次微分方程式

$$v_r''-12\wp(u-k,0,h)v_r=\frac{u^r}{r!}S^{(r)}(a)\quad(r=0,1,2,3)$$

は定数変化法により積分することが出来る。 一般解は

$$v_r=U_1(u)\{u\wp'+2\wp\}+U_2(u)\wp'$$

ここに $U_1'(u)=\frac{1}{24}\frac{S^{(r)}(a)}{r!}u^r\wp'(u-k)$, $U_2'(u)=\frac{1}{24}\frac{S^{(r)}(a)}{r!}u^r\{u\wp'(u-k)+2\wp(u-k)\}$

さて $\wp(u-k)=\frac{1}{(u-k)^2}+O((u-k)^2)$, $\wp'(u-k)=\frac{-2}{(u-k)^3}+O((u-k))$

より $u\wp'(u-k)+2\wp(u-k)=\frac{-2k}{(u-k)^3}+O((u-k))$.

したがって, $U_1(u)$ と $U_2(u)$ を積分して求めると $r=2$ のとき $\log(u-k)$ なる項が現われる. 動く危険点を持たないためには $S^{(2)}(a)=0$ が必要である. a は任意であったから $S^{(2)}(X)=0$ でなければならない。 ゆえに場合 i(a) では

$$\frac{d^2y}{dx^2}=6y^2+px+q$$

の形をしていることが必要条件である. 簡単な変数変換により次の

II. $\frac{d^2y}{dx^2}=6y^2$ $(p=q=0)$ III. $\frac{d^2y}{dx^2}=6y^2+\frac{1}{2}$ $(p=0,q\neq 0)$

IV. $\frac{d^2y}{dx^2}=6y^2+x$ $(p\neq 0)$

のどれかに帰着させることができる. IIの一般解は $y=\wp(x-k,0,h)$ であり, IIIの一般解は $y=\wp(x-k,1,h)$ である. IIとIIIは動く極は持つが, 動く危険点は持たない. IV.は初等函数（代数的あるいは超越的）によっては積分されない. また動く極は持つが動く危険点は持たない. ゆえに新しい超越函数を定義する方程式である。

4. パンルベの方程式が動く危険点を持たないことの証明.

まず方程式 (i) が動く分岐点を持たないことを証明しよう。 この証明の方針そのものは, 他の方程式 (ii) ～ (vi) にも適用できるはずである.

$$\text{(i)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 6y^2 + x$$

方程式 (i) は任意の点 $x = x_0$ において動く極は持つが, 動く分岐点は持たない, すなわち $y = a_{-\alpha}(x-x_0)^{-\alpha} + \cdots + a_0 + a_1(x-x_0)^1 + \cdots$ なる解を持つとして, 未定係数法で求めると,

$$y = \frac{1}{(x-x_0)^2} - \frac{1}{10}x_0(x-x_0)^2 - \frac{1}{6}(x-x_0)^3 + h(x-x_0)^4 + \frac{1}{300}x_0^2(x-x_0)^6 + \cdots$$

となる。 この級数はまた次の形に書くことができる.

$$y = \frac{1}{(x-x_0)^2} - \frac{1}{10}x(x-x_0)^2 - \frac{1}{15}(x-x_0)^3 + h(x-x_0)^4 + \frac{1}{300}x_0^2(x-x_0)^6 + \cdots$$

前の式とこれを微分した次の式とから $x-x_0$ を消去して

$$y' = -\frac{1}{(x-x_0)^3} - \frac{1}{5}x(x-x_0) - \frac{3}{10}(x-x_0)^2 + 4h(x-x_0)^3 + \frac{1}{50}x_0^2(x-x_0)^5 + \cdots$$

さらに $y = v^{-2}$ とおくと

$$y' = -2\epsilon v^{-3} - \frac{1}{2}\epsilon x v - \frac{1}{2}v^2 + 7\epsilon h v^3 + \cdots$$

となる, ここに $\epsilon = \pm 1$ 。 方程式 (i) に次の変換を施すと

$$y = v^{-2}, \qquad y' = -2v^{-3} - \frac{1}{2}xv - \frac{1}{2}v^2 + uv^3$$

となり, 方程式は次の連立方程式となる。

$$\text{(ia)} \quad \begin{cases} \dfrac{dv}{dx} = 1 + \dfrac{1}{4}xv^4 + \dfrac{1}{4}v^5 - \dfrac{1}{2}uv^6 \\[2mm] \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{8}x^2v + \dfrac{3}{8}xv^2 + \left(\dfrac{1}{4} - xu\right)v^3 - \dfrac{5}{4}uv^4 + \dfrac{3}{2}u^2v^5 \end{cases}$$

この連立方程式は $x = x_0$ のとき $u = u_0$, $v = 0$ なる初期条件をみたす, x_0 のまわりの解析的な解を唯一つもつ。 対応する解 $y(x)$ は x_0 を極とし, 定数 h は $u_0/7$ である。

このように方程式 (i) は任意の点 x_0 を動く極とする。 解はどこの点 x_1 においても分岐点を持つことはない。

参 考 文 献

[1] E.L. Ince, *Ordinary differential equations*, 317－355, Longman-Green, 1927;

[2] P. Painlevé, *Mémoire sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur, dont l'intégrale générale est uniforme*, Bull. Soc. Math. France, 28 (1900), 201－261, Acta Math., 25 (1902), 1－86;

[3] B. Gambier, *Sur les equations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est a points critiques fixes*, Acta Math., 33 (1910), 1－55.