情報処理最前線

金融リスク管理における
ITの最前線

二宮祥一　　田島　玲　　水田秀行
日本IBM

はじめに一理財工学，数理ファイナンス

昨今，続発する金融機関の巨額損失事件と金融犯罪事件，および金融ビッグバンなどに関する報道の中で，「金融ハイテク」という言葉がよく聞かれる．それらを報じる記事には，「NASAにおいて宇宙開発に携わってきた研究者たち」が「最新の，高等数学とコンピュータサイエンス」を駆使するといった表現が見られることが多い．このような報道などにより，内容はともかく，金融の世界に何やらすごいことが起こっているらしいという認識はかなり広く共有されるようになってきているようである．

この，「金融ハイテク」と呼ばれる技術は，Financial Engineering（この語に相当する日本語はまだ定着してないようであるが，東京工業大学の今野浩教授は，「理財工学」という訳語を用いている．本稿でも以後，この語を用いることにする）という名前で，現在世界中で研究がなされてる．まだ若い分野であるが，数学，物理学，統計学，経営工学，経済学，計算機科学，などの分野から研究者が続々と参入し非常な隆盛をみている．ところで，資産およびそれらの運用に関する研究というと一体今までの，経済学，経営工学と何が異なるのか，という疑問を抱く方が多いであろう．私見であるが，伝統的なそれらの学問とこの新しい理財工学を分かつものは，Mathematical Finance（こちらは，「数理ファイナンス」という訳語が定着しつつあるようである）という理論的枠組みであると思われる．数理ファイナンスの理論は，1970年代前半の，F. Black，M. Scholes，R.C. Mertonによるオプション☆の価格付に関する研究[BS] [M1] [M2]をもって嚆矢とする．彼らのアプローチが本質的に新しかった点は，資産の将来の価値を伊藤過程と呼ばれる確率過程で記述したことと，オプションの価値を，資産の将来 のある時点における価値とそのオプション契約によって決まるキャッシュフロー（現金の流れ）の現在における期待値として捉えたことにある．ここで，その期待値は伊藤積分と呼ばれる確率論の理論によって定義されるため，伊藤積分はこの理論のなかの必須の道具となっている．M. ScholesとR.C. Mertonはこの業績によって昨年のノーベル経済学賞を受賞した（彼らの中で最も貢献があったといわれているF. Blackは残念なことに数年前に死去しており，賞を受けることができなかった）．彼らが持ち込んだこの純粋数学の大道具－Martingale理論，確率積分，etc.－を用いて財の価値を記述するというのが数理ファイナンスである．そして，この理論を背景にして現実の資産，市場などの現象の分析，運用，管理の方法を考えるのが理財工学というわけである．この分野のよい教科書として文献［D］をあげておく．

理財工学において計算機科学は必須の要素であり重要な位置を占めている．数理ファイナンスの理論の産物が，現実の金融の世界で適用可能となったのは，近年の計算機のハードウェアおよびソフトウェアの発達によって数理ファイナンスの理論が要求する膨大な計算が可能になってきたことに大きく依存しているからである．

もとより，非常に多くの問題を含み，最近ではさまざまな他の専門領域にわたって広がりつつあるこの分野の全貌を網羅的に説明することは筆者らの能力の外にある．よって，ここではこの分野に属する問題のうち我々が関わったことがあり，また現在，金融機関や金融行政など

☆ 将来のある期間中にある資産をある価格で売買する権利の売買のこと．

にとって非常に大きな問題となっている市場リスク管理およびクレジットリスク管理の2つに絞って（とはいってもこの2つに限ってもその関連する領域は非常に広いため，さらにその一部分になるが）紹介することにする．理財工学および数理ファイナンスのなかの花形分野であり，理論的にも深遠で非常に興味深い金利理論およびその応用であるデリヴァティブの価格付理論については，ぜひ紹介したかったが掲載紙の性格と紙数の関係から今回はまったく触れないこととした．興味のある方は文献［D］［LL］などにあたられたい．

マーケットリスク，クレジットリスク

マーケットには日々変化する不確定なパラメータが多く存在する．金利，株価，為替レート，などである．これらはマーケットの参加者たちの行動によって定まるものである．資産の価値はこれらのパラメータによって定まる．言い方を変えると，資産の価値は常にこれらの不確定なパラメータの変化に伴って変化する．たとえば，将来におけるあらゆるキャッシュフローの価値は金利の変化に伴って変化する．1年後に発生する1億円の収入の現在における価値は，現在の1年物の金利が1.0%上昇すると100万円減ってしまうことになるという例を考えれば容易に理解できるであろう．このように，マーケットにあるパラメータの変化によって資産の現在における価値が変動する危険性のことをマーケットリスクという．

取引先が債務を履行しないこと（これをdefault「デフォルト」という）によって生じる損失の危険性のことをクレジットリスクと呼ぶ．たとえば，債券の発行者がデフォルトを起こした場合に債券の保有者が被るリスクはその元本と利子の合計になる．デフォルトによってもたらされる損失はこのような，取り引きの消滅によって直接もたらされるものだけではない．デフォルトの可能性が高くなれば（マーケットがデフォルトの可能性が高くなると判断すれば）債券価格の下落などが生じ資産の価値が減少することになる[K]．

マーケットリスク管理の指標

マーケットリスクの指標としてよく用いられるのは，VaR（Value at Risk）である．VaRは，保有する資産の時価価値が最悪どれだけ減少するかをみる指標である．たとえばBIS基準では，保有期間10営業日での99%点（percentile point）としてVaRを算出する．VaRはある程度将来の変動を想定した上で統計的に与えられるものであり，実際の運営の際には検定が必要となる．このような検定として，算出したVaRと実際の損益を比較し，超過分が統計的に許容されるかどうか確認するバックテストおよび最悪の事態を想定したストレステストが行われている．

VaR計測モデルとしては，分散・共分散法，モンテカルロ・シミュレーション法，ヒストリカル・シミュレーション法と呼ばれる3つが現在用いられている（モンテカルロ・シミュレーション法の本来の意味からすると，このVaR計測モデルに与えられている名前は用語として不適切なものであるが，ここでは現場での慣例に従うことにする）．

分散・共分散法では，資産ポートフォリオの価値変動がマーケットのリスク要因変数に対して線形であるという仮定と，このマーケットのリスク要因の変動が正規分布に従うという仮定の2つの強い仮定を前提にしている．これらの仮定から，資産ポートフォリオの価値そのものも正規分布に従うことになるために，過去に得られた相関係数を用いて個別の資産の分散を合成するだけでパーセント点が解析的に求まる．このように，計算が簡便であるというメリットはあるが，金融派生商品などのように非線型性を持ち上記の仮定に強く反するようなものが含まれている場合，正確さに問題が生じる．

分散・共分散法の仮定のうち，資産価値がマーケットのリスク要因に対して線形であるという仮定をなくし，さらにリスク要因の分布にも正規分布以外の対数正規分布などを許すことにして計算する方法がモンテカルロ・シミュレーション法と呼ばれる方法である．もはや資産価値の分布は実際にリスク要因の数の次元の空間各点で資産の価値の計算を行わなくては求めることができなくなる．この計算を避けるために，いわゆるモンテカルロ法を用いることになることからこのように呼ばれる．計算量が膨大になる

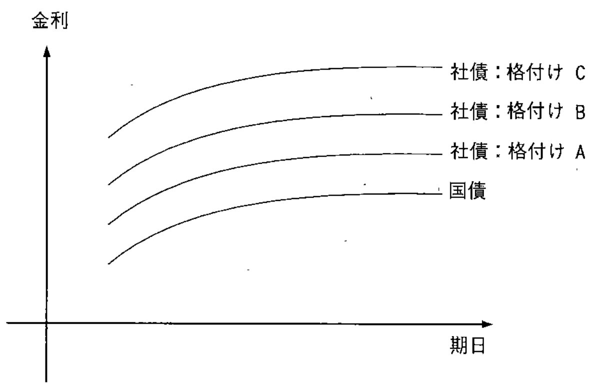

図-1　格付けによる金利のスプレッド

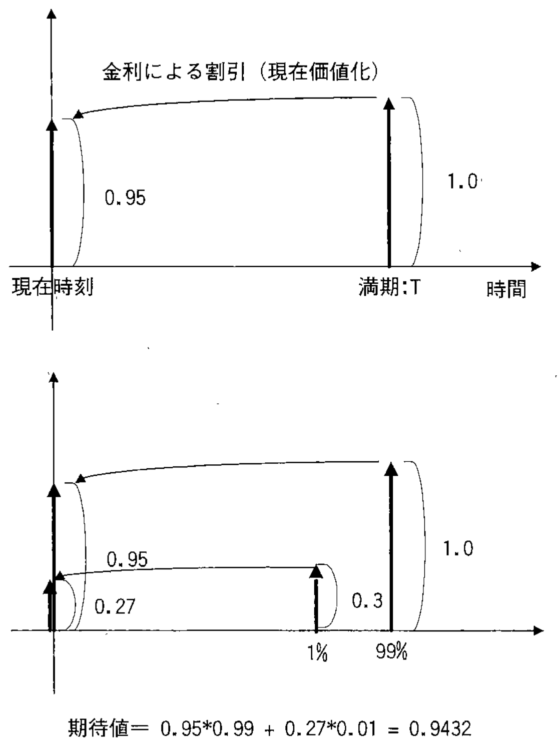

図-2　債務不履行の現在価値への影響

ため，すべての資産に対してこの方法を行うことはまだ一般的ではない．

ヒストリカル・シミュレーション法は，リスク要因の分布に一切のパラメトリックな仮定を置かず過去の統計から得られた分布そのものを用いるというものである．この方法は，マーケットの斉時性を仮定している点，パーセント点を求めるのに十分なデータを得ることがほとんど不可能な点など問題も多い．

クレジットリスクの分類

クレジットリスクは，大きく2つに分けることができる．1つはスプレッドリスクと呼ばれ，企業の格付け変更に伴うポートフォリオの価値変動に関するリスクである．**図-1**のように，社債から換算される金利カーブには，発行企業の格付け（＝信頼度）により利幅（スプレッド）があり，信用の低い企業ほどそれを反映して金利は高くなっていく（日本の市場ではこのようにはっきりとは観測されない）．ここで，すでにポートフォリオとして社債を保持しているとする．この社債の発行元企業の格付けが下がると，対応して社債から換算される金利は上昇する．社債の現在価値は，将来のキャッシュフローをこの金利で割り引いて計算されるため，結果として下落する．逆に，格付けが上がれば現在価値は上昇する．こうして，企業の信用度の変動がポートフォリオの価値の変動となって現れるのである．

もう1つはデフォルトリスクと呼ばれ，貸付先の債務不履行に伴うリスクである．**図-2**は金利を固定した単純な例であるが，図上のようにまったくデフォルトを考えなければ，満期の返済額の95%の現在価値があることになる．ところが，1%の確率で貸付先のデフォルトが起こり，額面の30%しか回収できないとすると，期待値として求まる現在価値は0.68%少なくなる．こうした現在価値の変動がリスクとして捉えられる．

リスク管理技術

マーケットリスクの場合

ここではまず金融派生商品の時価評価に必要な価格付け理論について概説した後，モンテカルロ法を用いたマーケットリスクの定量化について述べる．

市場において株価はある確率過程に従って変動しているとする．これに対する金融派生商品の価格は，無裁定性の概念から与えることができる．無裁定性とは，裁定機会（リスクなしに利益を得られる状態）が存在しないことを指す．実際，市場が十分機能しているとすると，裁定機会が存在した場合には投資家によってすばやく解消されると考えられる．

まずリスクのない基準資産を考える．たとえば，国債などである．この基準資産による収益が，リスクなしに得られる最大収益となる．どのように投資しようと，リスクなしに（確率1で）これ以上の収益をあげることはできないとする．将来得られるキャッシュフローはすべてこの基準資産によって割り引いて考えなければいけない．さて，オプションなどの派生商品の価格は一般にある将来の時点において基礎となる金融商品の価格に基づいて与えられる．たとえばヨーロピアンコールオプション☆2の場合，権利行使時点での株価をS，権利行使価格をKとすると，S＜Kならこの権利を行使しないので，権利行使時点での価値はmax (S–K，0) となる．このオプションの現在価値は，株価の確率変動と，金利による割引を考慮する必要がある．普通に考えられている確率過程では無裁定性を仮定すると，基準資産で割り引いた価格プロセスがマルチンゲールとなるリスク中立確率測度が存在し☆3，そのもとでの期待値から金融派生商品の現在価値が与えられる．

同様に割引債について無裁定性を考えることにより，金利の期間構造が与えられる．金利の期間構造モデルとしてHeath，Jarrow and MortonらによるHJMのフォワードレートモデルが有名である．このように金融商品の価格は無裁定性より与えることができる．BlackとScholesは金利が一定で株価が対数正規プロセスに従う場合のヨーロピアンコールの価格を与える公式を導いたが，複雑なオプションでは一般に解析的に求めることは困難である．

そこで，さまざまな金融商品からなる資産の時価やリスク指標の計算には，計算機を用いた大規模なシミュレーションが必要となってくる．ここではモンテカルロ法を考える．金利や株価プロセスをある時間幅によって離散化し，多次元乱数によって将来価格をシミュレートする．多数回のシミュレート結果を算術平均することによって期待値が求まる．派生商品価格をリスク中立確率測度のもとでの期待値として求めるためには，たとえば株価プロセスにおいてドリフト項の係数を基準資産から与えられる金利に置き換えて計算すればよいことが知られている．このようにモンテカルロ法を用いて，複雑な金融商品の現在価格が計算できる．

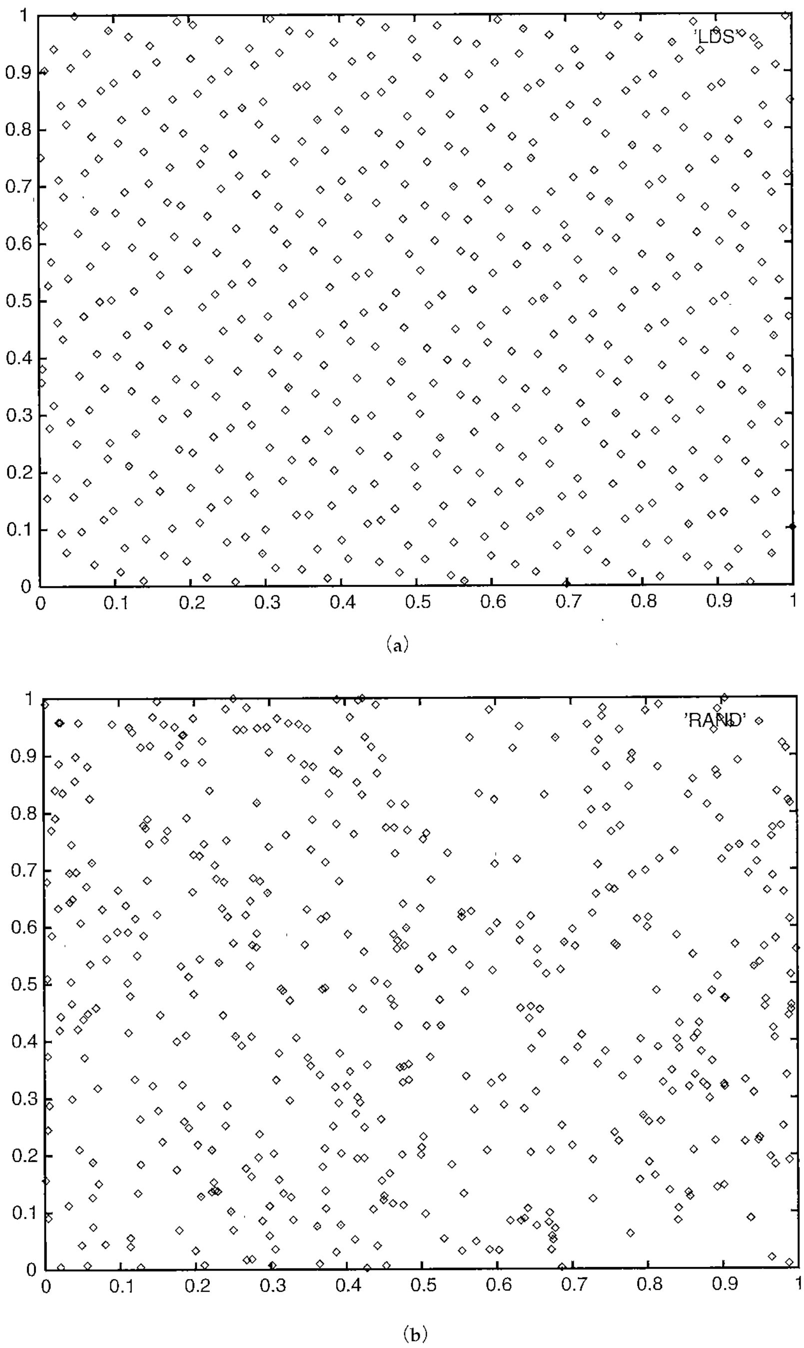

図-3　LDS (a) および疑似乱数 (b) の2次元における分布

モンテカルロ法では，誤差がシミュレーション回数の平方根に逆比例して減少することが知られている．これはある時間で得られた精度を一桁上げようとすると，100倍の計算時間が必要になるということである．大規模な資産に対して，モンテカルロ法では必要な精度を得るのに

☆2 この例の場合，将来のある一時点において，ある株式を価格Kで買う権利のこと．

☆3 数理ファイナンスで最も基本的な概念[D] [LL]．

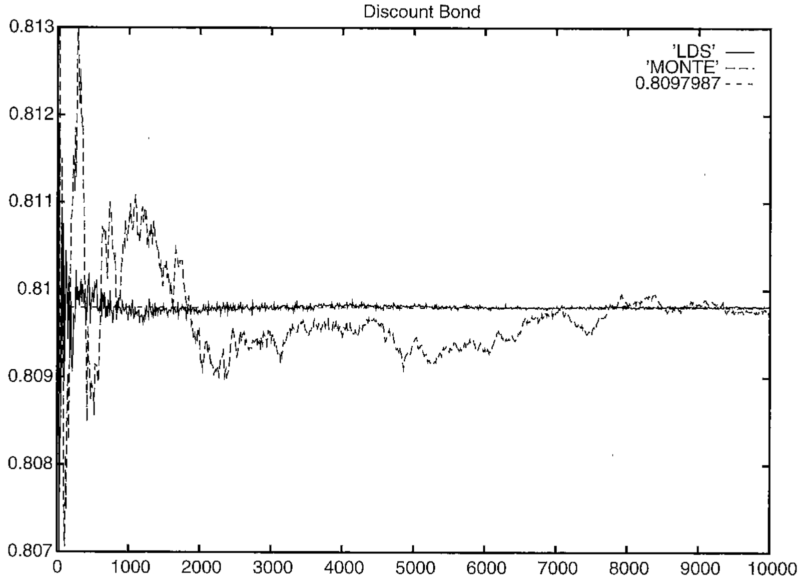

図-4　1万サンプルのLDSおよび疑似乱数（MONTE）による割引債の価格計算

要する時間が膨大なものとなり，もっと高速な手法が求められる．

最近知られるようになってきたのが，Low-discrepancy sequence（LDS）を用いた数値積分法である [NT]．LDSは確定的な数列であり，これによって得られる点の分布において，点の数を変動させても理想的な一様分布からの隔たり（Discrepancy）が十分小さいように作られたものである．2次元において疑似乱数とLDSを用いた分布を**図-3**に示す．

Koksma-Hlawkaの定理によって，LDSを数値積分に用いた場合の最大誤差もDiscrepancyを用いて与えられている．金融派生商品の現在価値を与える確率積分を求める際，疑似乱数ではなく確定的なLDSを用いれば積分誤差はサンプル数に逆比例する．これにより1000倍もの高速化が可能となる．割引債の現在価値を疑似乱数とLDSを用いて計算した例を**図-4**に示す．

金融資産の期待値はこのように与えられるが，実際の価格は確率的に変動するため，その変動から生じるマーケットリスクも考慮しなければいけない．そこで，次にマーケットリスク指標としてVaRの計算を行う．VaRにおいても期待値の場合と同様，多数回のシミュレーションを行った後，結果を値によってソートし，要求する信頼区間において生じうる最低値を求めればよい．この場合に発生する損失が自己資本からみて許容されるようにポートフォリオの構成を計画するのである．さらにバックテストとして，実際に生じた損失が予想を上回った頻度を求め，統計的な検定を行う．

■クレジットリスクの場合

ここでは，クレジットリスクを定量化するための主だった手法を紹介する．以下の（a）はスプレッドリスクに，（b），（c）はデフォルトリスクに対応したものである．

（a）格付け遷移行列

格付け会社は，ある格付けの企業が1年後にどの格付けに移ったかをm行m+1列（m: 格付け数，列＝遷移先の+1は倒産状態）の遷移行列として公表している．これに基づき，n年後の社債ポートフォリオの価値の確率分布を計算できる．複数の企業の格付け変動間の相関をどう処理するか，といった手法の詳細については文献［CM］を参照されたい．この手法の問題点は，（遷移行列の前提である）マルコフ性の仮定は妥当かどうか，という点にある．また，日本の市場では格付けからスプレッドが一意に求まらない，という現状もある．

（b）オプション価格付け理論

会社のトータルの価値を金額で表すことは困難である．一方で，市場が株価という形で会社の価値を正しく評価している，という見方も可能である．そこで，「株を持つ＝その会社を自由にできる」，すなわち，「株価＝会社の価値に対するオプションの価格」とみなしてオプション理論を適用することで，会社の価値の変動をモデル化できる [KMV]．この確率モデルを用い，「負債の返済期限に会社の価値が負債額を下回っている確率＝デフォルト確率」とすることで，デフォルトリスクの定量化が可能となる．この手法では，非上場企業にそのまま適用できない，日本のように情報の開示が進んでおらず株価が必ずしも企業の価値を反映していない場合に意味をなさない，といった問題点がある．

（c）財務諸表

上記の2手法が格付け会社あるいは市場による企業の総合評価に基づいているのに対し，帳簿上の数字のみを扱うというアプローチもある．このアプローチの歴史は長く，アルトマン教授が1968年に発表したZ-score [A] は，財務諸表の

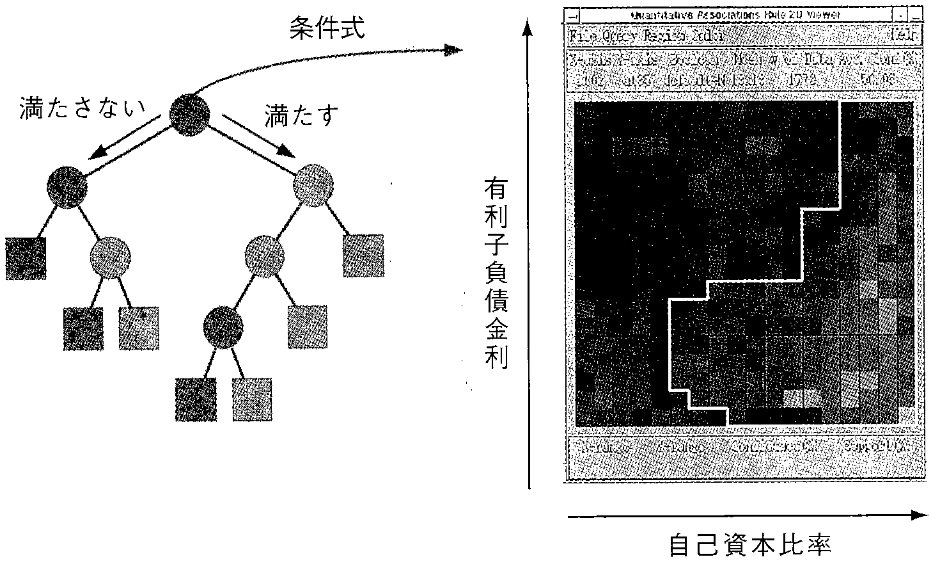

図-5　SONARの生成した決定木と判別ルール

数字の線形和で企業の経営状態を判断するというものであった．一般に，企業を，財務諸表の数字を要素とする高次元のベクトルに対応させるため，過去の企業の財務データと倒産／非倒産のトレース結果を学習データとして用いることで，統計，ニューラルネットワーク，データマイニングといったさまざまな手法が適用できる．

たとえば，Z-scoreの係数は財務上の知識から決定されていたが，代わりに，倒産／非倒産に0/1を割り当てて一般化線形回帰を行うと，倒産／非倒産をできるだけきれいに分けるような係数，すなわち，高次元空間上のベクトルが求まる．このベクトル上での倒産／非倒産の分布と，評価対象の企業の位置から，この企業の倒産確率という形でリスクの定量化が可能となる．

倒産の恐れの高い企業と安全な企業の判別という目的には，決定木も有効である．**図-5**は日本アイ・ビー・エム（株）東京基礎研究所で開発したシステムSONARの生成した決定木と，そのルートノードでの（つまり最も有効な）判別ルールを示している[FM]．判別ルールは枠で囲まれた領域に入るかどうかで安全な企業と危険な企業の分別を図っている．このルールの場合，「自己資本比率の高い企業は安全だが，低い企業については，負債の金利の高い企業ほど危険である」と解釈され，単なる判別以上の情報を得ることができる．

財務諸表の数字のみを使うというアプローチは，株式会社ならば評価可能であるという利点とともに，一面のみしか捉えておらず，経営方針，体制といった側面を無視せざるを得ないという問題点も持っている．筆者らの行った実験では，1年先の判別よりも2年先の判別の方が正解率が高い，という結果が出ており，この手法の，粉飾などの恣意的な操作に対する弱さを示していると思われる．

参考文献

[A] Altman, E.I.: Financial Ratios, Discriminant Analysis and the Prediction of Corporate Bankrupcy, Journal of Finance (Sep. 1968).

[BS] Black, F. and Scholes, M.: The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy, 81, pp.635-654 (1973).

[CM] http://www.jpmorgan.com/RiskManagement/CreditMetrics/CreditMetrics.htm

[D] Duffie, D.: Dynamic Asset Pricing Theory, Princeton (1996).

[FM] 福田剛志, 森本康彦, 森下真一, 徳山　豪: データマイニングの最新動向, 情報処理, Vol.37 (1996).

[K] 木島正明他: 金融リスクの計量化（上・下）, 金融財政事情研究会 (1998).

[KMV] http://www.kmv.com

[LL] Lamberton, D. and Lapeyre, B.: Introduction to Stochastic Calcules Applied to Finance, Chapman and Hall (1996).

[M1] Merton, R.C.: Theory of Rational Option Pricing, Bell J. of Econ. and Management Sci., 4, pp.141-183 (1973).

[M2] Merton, R.C.: Option Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuouts, J. of Financial Economics, 3, pp.125-144 (1976).

[NT] Ninomiya, S. and Tezuka, S.: Toward Real-time Pricing of Complex Financial Derivatives, Applied Mathematical Finance 3, pp.1-20 (1996).

（平成10年5月12日受付）