記号処理 49－2
（1989. 1. 9）

パンルベのα法の数式処理による検証

渡辺 隼郎
津田塾大学 数学科

2階非線形常微分方程式の中で動く特異点を持たない方程式を決定するには、パンルベのα法を用いて多量の計算を要する。20世紀の初めに数人の数学者が行なった計算が正しいか否かの検証を数式処理で行ない計算の一部分が正しいことを確かめた。その際の経験について発表する。

A verification for Painlevé's α-method by computer algebra

Shunro Watanabe
Department of Mathematics, Tsuda College
2-1-1 Tsuda Machi, Kodaira, Tokyo 187, Japan

It requires tremendous amount of computations to search all of the 2nd order non linear ordinary differential equations which have no movable singular points. In early years of this century, a few mathematicians performed these computations using Painlevé's α-method. We tried to verify these computations using computer algebra, and found that a few part of these computations are correct.

1) 問題

2階非線形常微分方程式

$$P' = F(z, w, p), \quad P = \frac{dw}{dz}, \ P' = \frac{dP}{dz}$$

が動く特異点を持たないためには

(A) $P' = L(z,w)P^2 + M(z,w)P + N(z,w)$

の形でなければならないことが分っている。ここでLは次の形の一つでなければならない。

I-1 $L = \dfrac{2}{w-a_1}$

I-3 $L = \dfrac{m+1}{m(w-a_1)} + \dfrac{m-1}{m(w-a_2)}, \ m>1$

II-2 $L = \dfrac{1}{w-a_1} + \dfrac{1}{w-a_2}$

II-4 $L = \dfrac{1/2}{w-a_1} + \dfrac{1/2}{w-a_2} + \dfrac{1}{w-a_3}$

III-8 $L = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{w-a_1} + \cdots + \dfrac{1}{w-a_4}\right]$

IV-5 $L = \dfrac{2}{3}\left[\dfrac{1}{w-a_1} + \dfrac{1}{w-a_2} + \dfrac{1}{w-a_3}\right]$

V-6 $L = \dfrac{3/4}{w-a_1} + \dfrac{3/4}{w-a_2} + \dfrac{1/2}{w-a_3}$

VI-7 $L = \dfrac{5/6}{w-a_1} + \dfrac{2/3}{w-a_2} + \dfrac{1/2}{w-a_3}$

さて方程式(A)に対しして変換:

T-1 Lの極が1つなら $v = \dfrac{1}{w-a_1}$,

T-2 Lの極が2つなら $v = \dfrac{w-a_2}{w-a_1}$,

Lの極が3つか4つなら

T-3 $v = \dfrac{a_1-a_3}{a_2-a_3} \cdot \dfrac{w-a_2}{w-a_1}$,

ただしVのときは

T-4 $v = \dfrac{a_2-a_3}{a_2-a_1} \cdot \dfrac{w-a_1}{w-a_3}$

を行なった方程式を

(B) $q' = A(z,v)q^2 + B(z,v)q + C(z,v)$,

ここに $q = \dfrac{dv}{dz}$, $q' = \dfrac{dq}{dz}$

としたときI-1～III-8のA(z,v)は

(1) 0

(2) $\dfrac{1}{v}$

(3) $\dfrac{m-1}{m} \cdot \dfrac{1}{v}$

(4) $\dfrac{1}{2v} + \dfrac{1}{v-1}$

(5) $\dfrac{2}{3}\left[\dfrac{1}{v} + \dfrac{1}{v-1}\right]$

(6) $\dfrac{3}{4}\left[\dfrac{1}{v} + \dfrac{1}{v-1}\right]$

(7) $\dfrac{2}{3v} + \dfrac{1}{2(v-1)}$

(8) $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{v} + \dfrac{1}{v-1} + \dfrac{1}{v-g}\right]$

ここで $g = a \cdot b$

$$a = \frac{a_1-a_3}{a_2-a_3}, \quad b = \frac{a_2-a_4}{a_1-a_4}$$

にそれぞれ移る。これを検証したい。

2) 計算の準備

T-1 $w = \dfrac{1}{v} + a_1$, $P = s \cdot q$, $s = -\dfrac{1}{v^2}$

$P' = s\left[q' - \dfrac{2q^2}{v}\right]$, $v_w = v$

$w - a_1 = \dfrac{1}{v}$

T-2 $w = \dfrac{a_1 v - a_2}{v-1}$, $w - a_1 = \dfrac{a_1 - a_2}{v-1}$,

$w - a_2 = \dfrac{(a_1-a_2)v}{v-1}$, $P = s \cdot q$

$s = \dfrac{-(a_1-a_2)}{(v-1)^2}$, $P' = s\left[q' - \dfrac{2q^2}{v-1}\right]$

$v_w = v - 1$,

T-3 $w = \dfrac{a_1 v - a_2 a}{v-a}$, $a = \dfrac{a_1-a_3}{a_2-a_3}$

$P = s \cdot q$, $s = \dfrac{-a(a_1-a_2)}{(v-a)^2}$,

$P' = s\left[q' - \dfrac{2q^2}{v-a}\right]$, $v_w = v - a$,

$$w - a_1 = (a_1 - a_2)\frac{a}{v-a}$$

$$w - a_2 = (a_1 - a_2)\frac{v}{v-a}$$

$$w - a_3 = (a_1 - a_3)\frac{v-1}{v-a}$$

$$w - a_4 = (a_1 - a_4)\frac{v-a\cdot b}{v-a}$$

T-4 $\quad w = \dfrac{a_3 v - a_1 a}{v-a},\quad a = \dfrac{a_3 - a_2}{a_1 - a_2}$

$$P = S\cdot q,\quad S = -\frac{(a_3 - a_1)a}{(v-a)^2},$$

$$P' = S\left[q' - \frac{2q^2}{v-a}\right],\quad v_w = v - a,$$

$$w - a_1 = (a_3 - a_1)\frac{v}{v-a}$$

$$w - a_2 = -(a_2 - a_3)\frac{v-1}{v-a}$$

$$w - a_3 = (a_3 - a_1)\frac{a}{v-a}$$

以上T1〜T4のどの場合でも、

$$P = S\cdot q,\quad P' = S\cdot\left[q' - \frac{2q^2}{v_w}\right]$$

である。これを方程式(A)に代入してSで割ると

$$q' = \left[L\cdot S + \frac{2}{v_w}\right]q^2 + M\cdot q + \frac{N}{S}$$

したがって $L(z,w)$ の w に w をT1〜T4により v で表わした式を代入したものを $l(z,v)$ とすると

$$A(z,v) = l(z,v)\cdot S + \frac{2}{v_w}$$

3) $v_w\cdot A = v_w\cdot l\cdot S + 2$ の計算

I-1 $\quad v\cdot 2\cdot v\cdot\left[-\dfrac{1}{v^2}\right] + 2 = 0$

II-2 $\quad (v-1)\left[\dfrac{v-1}{a_1-a_2} + \dfrac{v-1}{a_1-a_2}\dfrac{1}{v}\right]\left[-\dfrac{(a_1-a_2)}{(v-1)^2}\right]$

$$+2 = -\left[1+\frac{1}{v}\right] + 2 = 1 - \frac{1}{v} = \frac{v-1}{v}$$

$$= \frac{v_w}{v}$$

I-3 $\quad (v-1)\left[\dfrac{m+1}{m}\dfrac{v-1}{a_1-a_2} + \dfrac{m-1}{m}\dfrac{v-1}{(a_1-a_2)v}\right]$

$$\cdot\left[-\frac{(a_1-a_2)}{(v-1)^2}\right] + 2$$

$$= -\left[\frac{m+1}{m} + \frac{m-1}{mv} - 2\right] = \frac{m-1}{m}\left[1 - \frac{1}{v}\right]$$

$$= \frac{m-1}{m}\frac{v_w}{v}$$

II-4 $\quad (v-a)\left[\dfrac{(1/2)(v-a)}{(a_1-a_2)a} + \dfrac{(1/2)(v-a)}{(a_1-a_2)v}\right.$

$$\left. + \frac{v-a}{(a_1-a_3)(v-1)}\right]\cdot\left[-\frac{a(a_1-a_2)}{(v-a)^2}\right] + 2$$

$$= -\frac{1}{2}\left[1 + \frac{a}{v} + \frac{a_1-a_2}{a_1-a_3}\frac{2a}{v-1}\right] + 2$$

$$= \frac{1}{2}\left[3 - \frac{a}{v} - \frac{2(a-1)}{v-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{v-a}{v} + \frac{2(v-a)}{v-1}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2v} + \frac{1}{v-1}\right](v-a)$$

IV-5 $\quad \dfrac{2}{3}(v-a)\left[\dfrac{v-a}{(a_1-a_2)a} + \dfrac{v-a}{(a_1-a_2)v}\right.$

$$\left. + \frac{v-a}{(a_1-a_3)(v-1)}\right]\left[-\frac{a(a_1-a_2)}{(v-a)^2}\right] + 2$$

$$= \frac{2}{3}\left[-1 - \frac{a}{v} - \frac{a_1-a_2}{a_1-a_3}\frac{a}{v-1}\right] + 2$$

$$= \frac{2}{3}\left[2 - \frac{a}{v} - \frac{a-1}{v-1}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{v-a}{v} + \frac{v-a}{v-1}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{v} + \frac{1}{v-1}\right](v-a)$$

V-6 $\quad \dfrac{1}{4}(v-a)\left[\dfrac{3(v-a)}{(a_3-a_1)v} + \dfrac{3(v-a)}{(a_3-a_2)}\dfrac{1}{(v-1)}\right.$

$$\left. + \frac{2(v-a)}{(a_3-a_1)a}\right]\left[-\frac{(a_3-a_1)a}{(v-a)^2}\right] + 2$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{3a}{v} - \frac{3(a_3-a_1)a}{(a_3-a_2)(v-1)} - 2\right] + 2$$

$$= \frac{3}{4}\left[2 - \frac{a}{v} - \frac{a}{v-1}\right]$$

$$= \frac{3}{4}\left[\frac{1}{v} + \frac{1}{v-1}\right](v-a)$$

VI-7 $\quad \dfrac{v-a}{6}\left[\dfrac{5(v-a)}{(a_1-a_2)a}+\dfrac{4(v-a)}{(a_1-a_2)v}+\dfrac{3(v-a)}{(a_1-a_3)(v-1)}\right]\left[-\dfrac{a(a_1-a_2)}{(v-a)^2}\right]+2$

$$=\frac{1}{6}\left[-5-\frac{4a}{v}-\frac{3(a_1-a_2)}{(a_1-a_3)}\frac{a}{v-1}\right]+2$$

$$=\frac{1}{6}\left[7-\frac{4a}{v}-\frac{3(a-1)}{v-1}\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{4}{v}+\frac{3}{v-1}\right](v-a)$$

III-8 $\quad \dfrac{(v-a)}{2}\left[\dfrac{v-a}{(a_1-a_2)a}+\dfrac{v-a}{(a_1-a_2)v}+\dfrac{v-a}{(a_1-a_3)(v-1)}+\dfrac{v-a}{(a_1-a_4)(v-a\cdot b)}\right]\cdot\left[-\dfrac{a(a_1-a_2)}{(v-a)^2}\right]+2$

$$=\frac{1}{2}\left[-1-\frac{a}{v}-\frac{(a_1-a_2)a}{(a_1-a_3)(v-1)}-\frac{(a_1-a_2)a}{(a_1-a_4)(v-a\cdot b)}\right]+2$$

$$=\frac{1}{2}\left[3-\frac{a}{v}-\frac{a-1}{v-1}-\frac{a\cdot b\cdot g}{v-a\cdot b}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{v}+\frac{1}{v-1}+\frac{1}{v-a\cdot b}\right](v-a)$$

ここで $b(g+1)=1$ を用いた。

4)
最後の2式を数式処理で引くと

$$-\frac{1}{2}\,\frac{abg+ab-a}{v-ab}$$

この分子は

$$a(bg+b-1)$$

この b と g に

$$b=\frac{a_2-a_4}{a_1-a_4},\quad g=\frac{a_1-a_2}{a_2-a_4}$$

を代入すると0を得る。
しかし

$$\frac{1}{2}\frac{1}{(v-a)}\left[3-\frac{a}{v}-\frac{a-1}{v-1}-\frac{a\cdot b\cdot g}{v-a\cdot b}\right]$$

に a, b, g の値を代入すると中間式は非常に大きくなる。
ところが

$$\frac{1}{2}\frac{1}{v-a}\left[\frac{v-a}{v}+\frac{v-a}{v-1}+\frac{v-(ab+abg)}{v-ab}\right]$$

と変形すると手計算で容易に結果に導くことができる。

参考文献

Ince : Ordinary Differential Equations, Chapter 14