

2次元プッシュダウン・オートマトン

Two-Dimensional Pushdown Automata

伊藤 暁^{*}, 井上 克司^{**}, 高浪 五男^{**}
Akira ITO^{*}, Katsushi INOUE^{**}, and Itsuo TAKANAMI^{**}

山口大学, 工業短期大学部^{*}, 工学部^{**}
^{*} Technical College, ^{**} Faculty of Engineering,
Yamaguchi University, Ube, 755 Japan

あらまし 1次元文字列の代わりに, 2次元方形テープを入力とするプッシュダウン・オートマトンの基本的な性質を調べる. 4方向2次元非決定性(決定性)プッシュダウン・オートマトンを"2-NPDA"("2-DPDA")と記す. 本稿では, まずそれらと他の良く知られた2次元オートマトンとの関係を調べる. 例えば, 2-NPDAは2次元交代有限オートマトンを, 2-DPDAは全称状態のみからなる2次元交代有限オートマトン並びに2次元決定性オンラインテッセレーションアクセプタを模倣できることが示される. また, 領域限定2次元チューリング機械との関係や閉包性についても言及する. 最後に, 2次元連結図形の認識問題に関して調べ, 2-NPDAは連結図形の集合を, 2-DPDAは単連結図形, すなわち穴のない連結図形の集合をそれぞれ受理できることが示される.

Abstract We investigate the fundamental properties of pushdown automata which are supplied with two-dimensional rectangular tapes instead of one-dimensional strings as their inputs. Let "2-NPDA" ("2-DPDA") denote a four-way two-dimensional nondeterministic (deterministic) pushdown automaton. This paper first investigates the relationships between two-dimensional pushdown automata and other known two-dimensional automata. For examples, it is shown that 2-NPDAs can simulate two-dimensional alternating finite automata, 2-DPDAs can simulate 2-dimensional alternating finite automata with only universal states, and 2-DPDAs can simulate deterministic on-line tessellation acceptors. We also investigate the relationships with space-bounded Turing machines and the closure properties of two-dimensional pushdown automata. Finally, we investigate the recognizabilities of connected pictures and show that a 2-NPDA can accept the set of all connected pictures and that a 2-DPDA can accept the set of all simply-connected pictures, i.e., connected pictures having no hole.

1. はじめに

2次元テープを入力とするオートマトンの研究では, これまでその対象として様々なオートマトンが導入され, その性質が調べられてきた. 当然ながらその中には, 2次元有限オートマトン, 2次元線形有界オートマトン, あるいは2次元無限定チューリング機械などが含まれている^(1,6). 言うまでもなく, これらは"言語とオートマトンの理論"というチョムスキーの階層 $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ に対応するオートマトンの2次元拡張版である. それならば, \mathcal{L}_2 に対応するプッシュダウン・オートマトンの2次元拡張版はどうであろうか? 不思議なことに, 2次元図形生成文法の研究では文

脈自由型の文法が比較的詳しく調べられているにもかかわらず⁽³⁻⁴⁾, 2次元プッシュダウン・オートマトンについては現在でもほとんど未開拓の状態である⁽¹⁻²⁾.

プッシュダウン・オートマトンの計算機科学における重要性あるいは特異性から考えると⁽⁵⁻¹³⁾, 2次元プッシュダウン・オートマトンはどのような性質を持っているのか, はたして十分な能力を有するのか, 大変興味をそそられるところであろう.

本稿の目的は, プッシュダウン・オートマトンの2次元パターン認識機械としての基本的な能力を探り, その概略を明らかにすることにある.

本稿の構成は次の通りである. まず2. で2次

元プッシュダウン・オートマトンを導入する。3. では、2次元プッシュダウン・オートマトンと他の知られている2次元オートマトンの受理能力の比較を行う。例えば、2次元非決定性プッシュダウン・オートマトン(2-NPDA)は2次元交代有限オートマトン(2-AFA)を模倣でき、2次元決定性プッシュダウン・オートマトン(2-DPDA)は全称状態のみからなる2-AFA並びに決定性オンラインテセレーションアクセプタ(2-dota)を模倣することが出来ることを示す。2-dotaの模倣には、オルタネーティングの概念が有効に利用される。また、領域限定2次元チューリング機械との関係や閉包性についても言及する。4. では、連結図形の認識問題について調べ、2-NPDA、2-DPDAはそれぞれ連結図形、単連結図形(すなわち穴のない連結図形)を受理できることを明らかにする。5. では、本稿で残された未解決問題、今後の課題について述べる。

2. 定義

【定義2.1】 Σ を記号の有限集合とする。 Σ 上の2次元テープ(あるいは方形テープ)とは、 Σ の要素からなる2次元方形配列である。 Σ 上のすべての2次元テープの集合を $\Sigma^{(2)}$ と表す。

テープ $x \in \Sigma^{(2)}$ に対して、 $Q_1(x)$ を x の行数、 $Q_2(x)$ を x の列数とする、もし $1 \leq i \leq Q_1(x)$ かつ $1 \leq j \leq Q_2(x)$ ならば、 $x(i,j)$ は座標 (i,j) に位置する記号を表す。更に、 $1 \leq i \leq i' \leq Q_1(x)$ かつ $1 \leq j \leq j' \leq Q_2(x)$ なる i, i', j, j' に対し、

$$x[(i,j), (i',j')]$$

を次の条件を満足する2次元テープ z として定義する:

- (i) $Q_1(z) = i' - i + 1$ かつ $Q_2(z) = j' - j + 1$,
- (ii) 各 k, r [$1 \leq k \leq Q_1(z), 1 \leq r \leq Q_2(z)$] に対し、
 $z(k,r) = x(k+i-1, r+j-1)$.

本稿では、次のように2次元プッシュダウンオートマトンを定義する。

【定義2.2】 2次元非決定性プッシュダウン・オートマトン(2-NPDA)は

$$M = (Q, q_0, F, \Sigma, \Gamma, z_0, \delta)$$

なる形式の対象である。ここに

- (1) Q は状態の有限集合、
- (2) q_0 は初期状態、
- (3) $F \subseteq Q$ は受理状態の集合、
- (4) Σ は入力アルファベット($\# \notin \Sigma$ は境界記号)、

- (5) Γ はプッシュダウン記憶アルファベット、
- (6) z_0 はプッシュダウン記憶テープの底記号、
- (7) $\delta : Q \cup (\Sigma \cup \{\#\}) \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \{\text{left, right, up, down, stationary}\} \times ((\Gamma - \{z_0\}) \cup \{\text{POP, IDLE}\}))$ は状態遷移関係である。

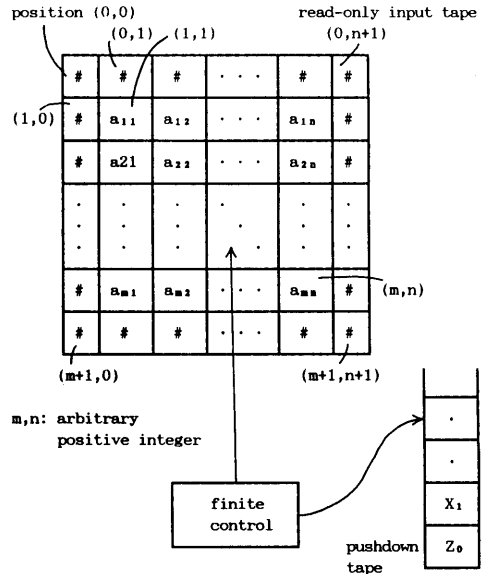


Fig.1 Two-dimensional pushdown automaton.

図1. 2次元プッシュダウン・オートマトン

ここで \mathcal{P} は巾集合操作を表す。 M は方形入力テープ、4方向入力ヘッド、有限状態制御部、1次元プッシュダウン記憶テープ、ならびにプッシュダウンヘッドからなる(図1参照)。入力テープは読取専用であり周囲を $\#$ で囲まれている。もしこの機械が状態 q で入力テープ上の記号 a を走査し、プッシュダウン記憶テープの最上部に記号 Z を保持しているとき、もし (q', d, Z') が $\delta(q, a, Z)$ に属しているならば、機械は状態 q' に入り、入力ヘッドを d (左右上下あるいは停留)方向に移動し、更にプッシュダウン記憶テープを次のように操作できる:(i)もし $Z' \in \Gamma - \{z_0\}$ ならば、 Z' をプッシュダウン記憶テープ上にプッシュする、(ii)もし $Z' = \text{POP}$ ならば、最上部の記号をポップする、あるいは(iii)もし $Z' = \text{IDLE}$ ならば、何もしない(空転)、即ちプッシュダウン記憶テープをなんら変更しない。 δ は、底記号 z_0 が決してポップあるいはプッシュされないように、あるいは入力

ヘッドが境界記号#で囲まれた領域を決して越えることがないように、設計されているものと仮定する。

【定義2.3】2-NPDA $M=(Q, q_0, F, \Sigma, \Gamma, z_0, \delta)$ の計算状況とは $(q, x, (i, j), \beta)$ なる形式のものをいう。ここに $q \in Q$ は現在の状態, $x \in \Sigma^{(2)}$ は入力である, (i, j) , 但し $0 \leq i \leq Q_1(x)+1$ かつ $0 \leq j \leq Q_2(x)+1$, は入力ヘッドの位置を示し, $\beta \in z_0 \Gamma^*$ はプッシュダウン記憶テープの内容を示す。

初期計算状況 $I_M(x)$ は

$$I_M(x) = (q_0, x, (1, 1), z_0).$$

で定義される。受理計算状況は q が F に含まれているような計算状況 $(q, x, (i, j), z_0)$ である。通常のように計算状況の遷移関係 \vdash 並びにその推移閉包 \vdash^* が定められる。

非決定性プッシュダウンオートマトンは各計算状況 I に対して $I \vdash^* J$ なる J が高々一つしか存在しないならば決定性と呼び、2-DPDA と記す。

【定義2.4】 M を2-NPDA とし、 x を M への入力とする。ある受理計算状況 I に対して、

$$I_M(x) \vdash^* I$$

ならば M は x を受理するという。

$$T(M) = \{x \in \Sigma^{(2)} \mid M \text{ は } x \text{ を受理する}\}$$

と定義する。更に、

$$\mathcal{L}[2\text{-NPDA}] = \{T(M) \mid M \text{ はある } 2\text{-NPDA}\}$$

$$\mathcal{L}[2\text{-DPDA}] = \{T(M) \mid M \text{ はある } 2\text{-DPDA}\}$$

と定義する。

ここで、本稿に登場する各種の2次元オートマトンとその記法を以下に列挙しておく。

2-ATM($f(m, n)$) ... 交代 $f(m, n)$ 領域限定チューリング機械⁽¹⁷⁾

2-NIM($f(m, n)$) ... 非決定性 $f(m, n)$ 領域限定チューリング機械⁽¹⁷⁾

2-DTM($f(m, n)$) ... 決定性 $f(m, n)$ 領域限定チューリング機械⁽¹⁷⁾

2-AFA ... 交代有限オートマトン⁽¹⁶⁾

2-UFA ... 全称状態のみからなる交代有限オートマトン⁽¹⁶⁾

2-NA ... 非決定性有限オートマトン⁽¹⁶⁾

2-DA ... 決定性有限オートマトン⁽¹⁶⁾

2-ota ... 非決定性オンラインテセレーションアクセプタ⁽¹⁹⁾

2-dota ... 決定性オンラインテセレーションアクセプタ⁽¹⁹⁾

1-DBCA ... 決定性1次元限定セル構造アクセプタ⁽²⁰⁾

2-DM₁ ... 決定性1マーカ有限オートマトン⁽¹⁶⁾

これらのオートマトンで受理されるテープ集合族を $\mathcal{L}[2\text{-ATM}(f(m, n))], \dots$ などと表す。

また、1次元言語族の記法も挙げておく⁽¹³⁾。

言語族 ... 対応する1次元オートマトン

AuxPDA[log n] ... 対数領域限定補助記憶付きプッシュダウン・オートマトン

P ... 決定性多項式時間限定チューリング機械

NP ... 非決定性多項式時間限定チューリング機械

【定理2.1】⁽¹³⁾ AuxPDA[log n] = P.

【定義2.5】⁽²¹⁾ 任意の2次元テープ $x \in \Sigma^{(2)}$ ($Q_1(x)=m$ かつ $Q_2(x)=n$ とする) に対して、 x の1次元的記述 $dscr_*(x)$ を次のように定める。

$$dscr_*(x) = w_1 \# w_2 \# \dots \# w_m$$

ここに $w_i = x[(i, 1), (i, n)]$ かつ $\# \notin \Sigma$ 。

$|dscr_*(x)| = mn + m - 1$ であることに注意されたい。更に、任意の方形テープ集合 T に対して、

$$dscr_*(T) = \{dscr_*(x) \mid x \in T\}$$

とする。

【定理2.2】⁽²¹⁾ 任意の方形テープ集合 T に対して、

$$T \in \mathcal{L}[2\text{-ATM}(\log mn)] \Leftrightarrow dscr_*(T) \in P.$$

3. 他のオートマトンとの関係

本章では、まず最初に領域限定2次元チューリング機械との比較を行う。次の定理は2次元プッシュダウン・オートマトンの受理能力のある意味で上界を与えていると考えられる。

【定理3.1】

$$(1) \mathcal{L}[2\text{-NPDA}] \subseteq \mathcal{L}[2\text{-ATM}(\log mn)]$$

$$(2) \mathcal{L}[2\text{-NPDA}] \subseteq \mathcal{L}[2\text{-DTM}(m^2 n^2)]$$

$$(3) \mathcal{L}[2\text{-DPDA}] \subseteq \mathcal{L}[2\text{-DTM}(mn)]$$

(証明) (1): もし方形テープ集合 T がある2-NPDA により受理されるならば、 T の1次元的記述は対数領域限定された補助記憶付1次元プッシュダウン・オートマトンにより受理される、すなわち

$$T \in \mathcal{L}[2\text{-NPDA}] \Rightarrow dscr_*(T) \in \text{AuxPDA}[\log n]$$

が成り立つことは容易に示すことができる。この

ことと、定理 2.1 及び定理 2.2 から、本定理の (1) が導かれる。

(2): 文献 (6), (7) と類似の方法による。2-NPDA $M = (Q, q_0, F, \Sigma, \Gamma, z_0, \delta)$ に $m \times n$ の入力 x が与えられたとしよう。一般性を失うことなく、 M が受理状態に入るのはプッシュダウン記憶テープの底記号 z_0 を読んである時のみであると仮定する。

M の x 上の表面様相とは $(q, (i, j), a)$ なる形式の対象である。ここに q は現在の状態、 (i, j) は入力ヘッドの位置、 a はプッシュダウン記憶の最上部の記号を示す。表面様相は M がその状況でプッシュ、ポップ、あるいは空転するのから従ってプッシュ表面様相、ポップ表面様相、空転表面様相と呼ぶ。 $\text{top}((q, (i, j), a)) = a$ と定義する。表面様相の通常の遷移関係はプッシュ、ポップ、空転表面様相に対応して三つの型をもつ。

(i) $u \stackrel{a}{\vdash}_{\text{push}} v$: もし v が u から M の x 上の 1 動作により導かれ、 u はプッシュ表面様相、かつ $\text{top}(v) = a$

(ii) $u \stackrel{a}{\vdash}_{\text{pop}} v$: もし v が u から M の x 上の 1 動作により導かれ、 u はポップ表面様相、かつ $\text{top}(u) = a$

(iii) $u \vdash v$: もし v が u から M の x 上の 1 動作により導かれ、かつ u は空転表面様相表面様相の遷移 $u \rightarrow v$ を、入力 x 上での M が表面様相 u から出発したとき、 u の最上部記号 a をポップすることなく、表面様相 v に到達できることを意味するように定義する。機械は u の元々の最上部記号を決してポップせず結局はおなじレベルに戻る限りにおいてプッシュダウン記憶をプッシュあるいはポップしてもよい。関係 \rightarrow は次の規則の下での閉包である：

- 1) $u \rightarrow u$
- 2) $u \rightarrow v$ かつ $v \rightarrow w$ ならば $u \rightarrow w$
- 3) $u \vdash v$ ならば $u \rightarrow v$
- 4) $u \stackrel{a}{\vdash}_{\text{push}} v, v \rightarrow w, \text{ かつ } w \stackrel{a}{\vdash}_{\text{pop}} y$ ならば $u \rightarrow y$

関係 \rightarrow を計算するためには、もはや新しい関係が得られなくなるまで規則 1)-4) を繰り返し適用すればよい。見つけうる関係の個数は $O(mn \cdot mn)$ で抑えられる。従って、 $(mn)^2$ の領域で十分である。 M が受理するかどうかは $u_0 \rightarrow u_f$ が成立するかどうかを見れば判断できる。ここに $u_0 = (q_0, (1, 1), z_0)$, $u_f \in \{(q, (i, j), z_0) \mid q \in F\}$ である。以上により、 M は $O(m^2 n^2)$ 領域限定決定性チューリング機械で模倣できることがわかった。

(3): 文献 (6) に述べられたことと同じ理由による： $m \times n$ の入力を与えられた 2-DPDA M を考えよう。

M は決定性であるから、もしプッシュダウン記憶テープに可能な表面様相の個数 $O(mn)$ を越えて記号が書き込まれたならば、 M はループに陥ることになり以後決して受理状態には入らないことがわかる。故に、 M とまったく同じ動作により M を模倣する決定性チューリング機械は $O(mn)$ より大きな領域を必要としない。□

次の定理は 2 次元プッシュダウン・オートマトンの受理能力の下界を与えていると考えられる。

【定理 3.2】

- (1) $\mathcal{L}[2\text{-AFA}] \subseteq \mathcal{L}[2\text{-NPDA}]$
- (2) $\mathcal{L}[2\text{-UFA}] \subseteq \mathcal{L}[2\text{-DPDA}]$
- (3) $\mathcal{L}[2\text{-dota}] \subseteq \mathcal{L}[2\text{-DPDA}]$
- (4) $\mathcal{L}[1\text{-DBCA}] \subseteq \mathcal{L}[2\text{-DPDA}]$

(証明) 4 つの場合とも交代有限オートマトンの受理計算木を深さ優先探索することで模倣できる。プッシュダウン記憶テープは探索過程を保持しておくのに使い、1 動作模倣することに旧状態とその状態からの動きを表す記号をプッシュする。

(1): 2-NPDA M' は 2-AFA M の入力 x 上の受理計算木を非決定的な深さ優先探索により模倣する。

M' が M の全稱計算状況 I に遭遇したときは、 I の下にある各部分木を調べることににより、 I のすべての後続者が受理計算に導かれることを確かめる。 M の存在計算状況に出会った場合は、 M の次のどの動きを模倣するかを非決定的に推測しこの選択が受理計算部分木に導かれることを確かめる。非受理計算状況に至ったならば、直ちに模倣を終了し拒否状態に入ればよい。

(2): (1) の方法をそのまま用いる。2-UFA には存在的分岐が存在しないので、プッシュダウン・オートマトン は決定性でよい。2-UFA が受理しないのは計算過程にループが存在することによる場合もありうるが、この時 2-DPDA もループに陥って決して受理しない。従って、両者の判定は結局一致することになる。

(3): 文献 (19) に $\mathcal{L}[2\text{-dota}] \subseteq \mathcal{L}[2\text{-AFA}]$ なる事実が示されている。すなわち、任意の 2-dota M_1 に対して $T(M_2) = T(M_1)$ なる 2-AFA M_2 が存在する。

ここでは (1) の場合と同様にして、この M_2 の受理計算木を深さ優先探索するような 2-DPDA M_3 を示すことにする。但し、今度は M' が決定性であるから、存在計算状況に遭遇したときにも直後の後続者をすべて検討しなければならない。すなわち、 M の非受理計算状況に到達したときは最も低い位置にある存在的な先祖のところまで遡って次の選択に挑戦する。ところで、文献 (19) の証明では 2-dota M_1 を模倣する 2-AFA M_2 は存在計算状況も

含めた広い意味でループ・フリーに設計されているので、2-DPDA M_3 も結局ループ・フリーになる。 $T(M_3)=T(M_2)$ は明らか。

(4): (3)の証明と同様に、1-DBCA はループ・フリーな2-AFA で模倣できることによる⁽¹⁹⁾。□

上記定理の(3)の関係 $\mathcal{L}[2\text{-dota}] \subseteq \mathcal{L}[2\text{-DPDA}]$ の非決定性版であると言える $\mathcal{L}[2\text{-ota}] \subseteq \mathcal{L}[2\text{-NPDA}]$ という関係は成り立つであろうか？ もし仮に成立するとしても、これを証明することは著しく困難であろうと予想される。なぜなら、次のことが言えるからである。

【定理 3.3】 $\mathcal{L}[2\text{-ota}] \subseteq \mathcal{L}[2\text{-NPDA}] \Rightarrow P=NP$.

(証明) “ある2-ota M が存在して $\{M\}$ に関するテープ受理問題がNP-完全である”ことが文献(22)に示されている。このことと定理 2.2 及び定理 3.1 の(1)から本定理は成り立つ。□

最後に閉包性にも触れておこう。

【定理 3.4】 (1) $\mathcal{L}[2\text{-NPDA}]$ は共通集合、和集合に関して閉じている。

(2) $\mathcal{L}[2\text{-DPDA}]$ は共通集合、和集合、補集合に関して閉じている。

(証明) (1): 共通集合に関して閉じていることは通常の二段階模倣の技法による。 $\mathcal{L}[2\text{-NPDA}]$ が和集合に関して閉じていることは、非決定性であるからほとんど明らか。

(2): $\mathcal{L}[2\text{-DPDA}]$ がブール代数をなすことは、2-DPDA を常に停止させることができることを示せばよい。方法は文献(9)のものと同じである。

M を2-DPDA とし、 M に入力 x が与えられたとする。 M の計算状況により定まる有限有向グラフ $G=(V,E)$ を考えよう。ここに、

$$V = \{I \mid I \text{ は } M \text{ の } x \text{ 上の計算状況}\}$$

$$E = \{(I, J) \mid I \xrightarrow{r} J\}.$$

M は決定性であるから、グラフ G の受理計算状況を含む成分は受理計算状況を根とするような木である。2-DPDA M' はこの木を深さ優先探索して初期計算状況がこの木にあるかどうか調べ、 M が受理するかどうか決める。木には有限個の頂点しか存在しないから、 M' は常に有限時間で停止する。□

4. 連結図形の認識

本章では、2-NPDA、2-DPDA がそれぞれ連結図

形、単連結図形を受理できることを示す。このため、2-UFA が単連結図形を受理できることを最初に示す。

【定義 4.1】 x を $\{0,1\}^{(2)}$ の要素としよう。以下の条件を満足する $N \times N$ (N は自然数) の最大部分集合 P を x の1-成分と呼ぶ。

(i) すべての $(i,j) \in P$ に対して、 $1 \leq i \leq \mathcal{Q}_1(x)$, $1 \leq j \leq \mathcal{Q}_2(x)$, かつ $x(i,j)=1$;

(ii) 任意の $(i,j), (h,k) \in P$ に対して、次のような P の要素からなる系列 $(i_0, j_0), (i_1, j_1), \dots, (i_m, j_m)$ が存在する

$(i_0, j_0) = (i, j)$, $(i_m, j_m) = (h, k)$, かつすべての m ($1 \leq m \leq n$) に対し、

$$|i_m - i_{m-1}| + |j_m - j_{m-1}| \leq 1 \quad \dots (A)$$

ちょうどひとつの1-成分が存在するようなテープ $x \in \{0,1\}^{(2)}$ を連結図形という。すべての連結図形の集合を T_c と記す。1-成分と同様に x の0-成分が定義できる。 x の境界 $\#$ に接しているような0-成分以外のすべての0-成分は(もしあれば) x の穴と呼ばれる。もし x がひとつも穴を持たないならば、それは単連結図形という。すべての単連結図形の集合を T_s と記す。

上の条件(A)を

$$|i_m - i_{m-1}| \leq 1 \ \& \ |j_m - j_{m-1}| \leq 1 \quad \dots (B)$$

と変更した場合特別に8連結図形といい、その集合を T_{cs} と記す。明らかに、 $T_c \subseteq T_{cs}$ 。

定義から $T_{sc} \subseteq T_c$ であるが、 T_{sc} と T_s の関係についてもう少し詳しく述べる。

【定義 4.2】⁽¹³⁾ 2次元テープに関する写像 $\tau: \Sigma^{(2)} \rightarrow \Delta^{(2)}$ が与えられると、 τ は次のようにテープ集合 T に関する写像に自然に拡張できる。

$$\tau(T) = \{\tau(x) \mid x \in T\}$$

更に、集合 $S \subseteq \Delta^{(2)}$ の τ による逆像を

$$\tau^{-1}(S) = \{x \in \Sigma^{(2)} \mid \tau(x) \in S\}$$

すなわち、 $x \in \tau^{-1}(S) \Leftrightarrow \tau(x) \in S$, と定義する。一般的に、 $\tau^{-1}\tau(T) \supseteq T$, $\tau\tau^{-1}(S) \subseteq S$ である。

【定義 4.3】 テープ $x \in \{0,1\}^{(2)}$ に対して、 x のビット反転 \hat{x} とは、アルファベット $\{0,1\}$ 上の写像 $\hat{\cdot}: \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$ [$\hat{0}=1$ かつ $\hat{1}=0$] を、2次元テープ $\{0,1\}^{(2)}$ 上の写像に拡張して得られる、領域保存準同型写像(プロジェクション)である。 $\hat{x} \in T \Leftrightarrow x \in \hat{T}$, 従って $\hat{\cdot}$ の逆像を与える写像は $\hat{\cdot}$ それ自身に等しい。

【定義 4.4】 $\{0,1\}$ 上のテープの枠付け ϕ とは、2次元テープ $x \in \{0,1\}^{(2)}$ ($\mathcal{Q}_1(x)=m$ & $\mathcal{Q}_2(x)=n$ とする) に対して、

- (i) $Q_1(z)=m+2$ & $Q_2(z)=n+2$
- (ii) $z[(2,2),(m+1,n+1)]=x$ かつ
- (iii) $z[(1,1),(1,n+2)], z[(1,1),(m+2,1), z[(m+2,1),(m+2,n+2)], z[(1,n+2),(m+2, n+2)] \in \{0\}$ ⁽²⁾

なる2次元テープ z を与える写像 $\phi: \{0,1\}^{(2)} \rightarrow \{0,1\}^{(2)}$ のことである。 ϕ は領域拡大的な写像であり、 $\phi(T_c) \subseteq T_c$ ではあるが、 $x \in T_c \Leftrightarrow \phi(x) \in T_c$ より、 $T_c = \phi^{-1}(T_c)$ 。

【定義4.5】 $\{0,1\}$ 上のテープの4連結化 χ とは、2次元テープ $x \in \{0,1\}^{(2)}$ に対して、

- (i) $Q_1(z)=3 \cdot Q_1(x)$ & $Q_2(z)=3 \cdot Q_2(x)$
- (ii) 各 (i,j) ($1 \leq i \leq Q_1(x), 1 \leq j \leq Q_2(x)$) に対し、
 $[z_{i,j}, \chi_{i,j}] \equiv z[(3i-2, 3j-2), (3i, 3j)]$ とおく
- (a) もし $x(i,j)=1$ ならば、
 $z_{i,j} \in \{1\}$ ⁽²⁾
- (b) もし $x(i,j)=0$ ならば、各 $h,k \in \{-1, 1\}$ に対し、
 $z_{i,j}(2+h, 2+k) = x(i+h, j) \wedge x(i, j+k)$
 かつ各 h,k ($|h| + |k| \leq 1$) に対し、
 $z_{i,j}(2+h, 2+k) = 0$

なる2次元テープ z を与える写像 $\chi: \{0,1\}^{(2)} \rightarrow \{0,1\}^{(2)}$ のことである。 χ は2値図形 x の持つトポロジーを保存する写像であり、 $x \in T_{c\chi} \Leftrightarrow \chi(x) \in T_c$ 、すなわち $T_{c\chi} = \chi^{-1}(T_c)$ 。

【定理4.1】

$$T_{sc} = T_c \cap \phi^{-1}(\widehat{\chi^{-1}(T_c)}).$$

(証明) 容易にわかるように

$$x \in T_{sc} \Leftrightarrow x \in T_c \ \& \ \widehat{\phi(x)} \in T_{c\chi}$$

である⁽¹⁶⁾。これにより直ちに定理が導かれる。□

【系4.1】 $\{0,1\}$ 上の2次元テープ集合族 \mathcal{L} が
 1) 共通集合演算、2) 枠付けの逆像 ϕ^{-1} 、並びに
 3) 4連結化の逆像 χ^{-1} の各操作に関して閉じているとする。すると、 $T_c \in \mathcal{L} \Rightarrow T_{sc} \in \mathcal{L}$ 。

なお、ビット反転 \wedge に関しては自明であるから上の系の条件からは省いている。

2-DA 以上の機能をもつ通常の2次元オートマトンであれば系4.1の条件を満足することは容易に知れるであろう。このことは、 T_{sc} は T_c よりも少なくとも困難ではない(同程度かより容易である)ことを意味している。

【例1】 $T_c \in \mathcal{L}[2-AFA]$ であるから⁽¹⁷⁾、 $T_{sc} \in \mathcal{L}[2-AFA]$ 。

【例2】 もし $T_c \in \mathcal{L}[2-NA]$ ならば、 $T_{sc} \in \mathcal{L}[2-NA]$ でもある。

2-NA が T_c を受理できるかどうかは Blum & Hewitt⁽¹⁴⁾ 以来、現在でも未解決な問題の一つである。それならば、 T_{sc} についてはどうだろうか？ 実は 2-NA が T_{sc} を受理できるかどうかさえも知られていない。

次の補題では、ちょうど2-NA と双対的な能力を持つと想像される、2-UFA によって T_{sc} が受理できることを示す。

【定義⁽¹⁵⁾】 2次元テープ $x \in \{0,1\}^{(2)}$ の末尾点とは、 $x(i_0, j_0)=1$ を満たし、かつ $x(i, j)=1$ である他のすべての (i, j) ($1 \leq i \leq Q_1(x), 1 \leq j \leq Q_2(x)$) に対して、

$$i_0 > i \text{ または } (i_0 = i \text{ かつ } j_0 > j)$$

言い替えれば、 $i \cdot Q_2(x) + j < i_0 \cdot Q_2(x) + j_0$ が成り立つような唯一の位置 (i_0, j_0) をいう。

【補題4.1】 2-UFA は単連結図形を受理できる。

(証明) 証明には、 $i)$ $\{0,1\}$ 上の2次元テープ x 内の、“0”あるいは“#”に接する“1”のコマ(0-1境界セルと呼ぶ)は必ず単純閉曲線を成し、 $ii)$ 最も外側の0-1境界線は末尾点を含み、 $iii)$ もし x が単連結図形ならば0-1境界線はただ一つしか存在しない、という事実を用いる。

入力 $x \in \{0,1\}^{(2)}$ 上で次のように振舞う 2-UFA M を考える。

- 1) 全称状態を用いて、すべての0-1境界セルに分散移動する。
- 2) 分岐した各機械は、末尾点がこの0-1境界にあるかどうか調べながら、標準的な0-1境界追跡アルゴリズム⁽¹⁶⁾を用いてこの0-1境界線を巡る。もし末尾点が見つかったならば受理状態に入る。そうでないなら、次の0-1境界セルに進む。

末尾点の確認は次のようにして為される：現地点をから右方向に出発して左右の境界記号#の間を上から下へジグザグにラスタ走査する。もし途中で‘1’が見つかったなら出発点は末尾点ではないことになるので、来た道を出発点まで引き返す。右下隅の境界記号#に達したならば出発点の位置は確かに末尾点である。

もし x が連結でない、あるいは穴を持つときにはループに陥る機械が必ず存在し M は受理しない。逆に x が T_{sc} に含まれるならば、分岐した全ての機械は必ず受理状態に入る。(0-1境界の内側の‘1’に対して常に0-1境界への道が存在することに注意。) □

【注】 $co-\mathcal{L}[2-UFA] = \mathcal{L}[2-NA]$ かどうか知られていないので、補題 4.1 から“2-NA は単連結でない図形を受理できる”という結論は導けない。もちろん、上記補題に記述した 2-UFA M のすべてのループを拒否状態（停止状態）に置き換えることができるだけで $co-T_{sc} \in \mathcal{L}[2-NA]$ が言えるが、現時点ではそれさえ成功していない。

【定理 4.2】

- (1) 2-NPDA は連結図形の集合を受理できる。
- (2) 2-DPDA は単連結図形の集合を受理できる。

(証明) (1)は $T_c \in \mathcal{L}[2-AFA]$ なる事実⁽¹⁷⁾と定理 3.2 の(1)より導かれる。(2)は定理 3.2 の(2)と補題 4.1 より得られる。□

5. むすび

本稿は、2次元プッシュダウン・オートマトンの基本的な性質を明らかにすることを目的としたが、その初期段階はほぼ達成されたと思われる。もちろん、本稿のすべての結果はその最適性が証明された訳ではないので、すぐさま改善され得る。得られた結果を眺めると、オルタネーションという概念、オートマトンの計算過程における“ループ”、などが一つの鍵になっていることがわかる。

なお、定理 4.2 の(2)は文献(1)において Shah が得た 2-DPDA に関する結果からは導けないことを指摘しておきたい：文献(1)の結果を用いれば、2-DPDA は与えられた 2次元テープのある一つの 1-成分が穴を含まないことを確認できると言える。しかしながら、 T_{sc} の要素かどうかを判定するためには更に他の 1-成分が存在しないことも確かめる必要があるのである。文献(1)は専ら迷路探索問題に関連していると見たほうがよい。(迷路とは、アルファベット $\{0,1\}$ 上の連結図形に書かれている片方の記号 '0' をすべて進入不可能な境界記号 '#' に置き換えたもの。迷路探索問題と連結図形認識問題の関連性はまだ必ずしも明らかにされていない。)

本稿で得られた結果に関連する未解決問題を二、三挙げておく。

- 1) $\mathcal{L}[2-NA] \subseteq \mathcal{L}[2-DPDA]?$
- 2) $\mathcal{L}[2-DM_1] \subseteq \mathcal{L}[2-NPDA]?$
- 3) $T_c \in \mathcal{L}[2-DPDA]?$

1)と2)に関しては定理 3.2 を、3)に関しては定理 4.1 を参照されたい。2)に関しては、 $T_c \in \mathcal{L}$

$[2-DM_1]$ なる事実⁽¹⁴⁾に注意されたい。その他に、“ $\mathcal{L}[2-NPDA] = \mathcal{L}[2-DPDA]?$ ”、“あるいは” $\mathcal{L}[2-NPDA] \subseteq \mathcal{L}[2-NIM(mn)]?$ ”なども未解決であるが、これらに対応する 1次元 2方向プッシュダウン・オートマトンの問題とほぼ等価な問題であろうと予想される。

本稿で考察したプッシュダウン・オートマトンはすべて入力ヘッドが左右上下 4 方向に動かすことができた。これに対して、入力ヘッドが左右並びに上には動かせるが下には動かせないという 3 方向プッシュダウン・オートマトンも考えられる。これは 1次元で言えば、2方向性と 1方向性のプッシュダウン・オートマトンにそれぞれ対応している。1次元 1方向プッシュダウン、あるいはそれと等価な文脈自由言語の重要性から想像すれば、3方向プッシュダウンの 2次元パターン上での能力を探ることも大変興味をそそられることである。しかしながらこのような期待に反して、3方向プッシュダウンの 2次元図形に対する処理能力はあまり高くないであろうと我々は予想している。例えば、

$$T = \{x \in \{0,1\}^{(2)} \mid \exists m \geq 1 [\varrho_1(x) = \varrho_2(x) = 2m \ \& \ x[(1,1), (m,1)] = x[(m+1,1), (2m,1)]] \}$$

という集合でさえ 3 方向プッシュダウンでは受理できそうもない。況や連結図形の集合を受理することは不可能と推測される。

以上のような、オートマトンの能力を制限していく方向とは逆に、能力を高めていくことも考えられる。一例は、非決定性プッシュダウンの一般化としての 2次元交代プッシュダウン・オートマトンである。特に、2-NPDA とほぼ双対的な能力を有すると予想される全称状態のみを持つ交代プッシュダウン・オートマトンの性質は興味深い。例えば、それによって T_c あるいは $co-T_c$ が受理できるか？ 2-NA は模倣できるか？ などの問題が挙げられる。

文 献

- [1] A. Shah, "Push-Down Automata on Arrays", *Inform.Sci.* 25, 175-193 (1981).
- [2] H. Umeo, *Formal Studies on Pattern Recognition by Two-Dimensional Tape Automata*, Doctorial Dissertation, Osaka University (1978).
- [3] Krithivasan and Siromoney, "Array automata and operations on array languages," *International Journal of Computer Mathematics*, Vol.4 pp.3-30 (1974).
- [4] G. Siromoney, R. Siromoney, and K.

- Krithivasan, "Picture languages with array rewriting rules," *Inform. and Control* 22, 447-470 (1973).
- [5] J.N.Gray, M.A.Harrison, and O.H.Ibarra, "Two-Way Pushdown Automata," *Inform. and Control* 11, pp.30-70 (1967).
- [6] A.V.Aho, J.E.Hopcroft, and J.D.Ullman, "Time and Tape Complexity of Pushdown Automaton Languages," *Inform. and Control* 13, 186-206 (1968).
- [7] R.E.Ladner, "Alternation Bounded Auxiliary Pushdown Automata," *Inform. and Control* 62, 93-108 (1984).
- [8] W.L.Russo, "Tree-Size Bounded Alternation", *JCSS* 21, 218-235 (1980).
- [9] O.H.Ibarra, M.A.Palis, and J.H.Chang, "On Efficient Recognition of Transductions and Relations," *Theoret.Comput.Sci.* 39, 89-106 (1985).
- [10] S.Ginsburg, "Deterministic Context Free Languages" *Inform and Control* 9, 620-648 (1966).
- [11] S.A.Cook, "Linear time simulation of deterministic two-way pushdown automaton," *Information Processing* 71, 75-80 (1972).
- [12] W.Ogden, R.J.Ross, and K.Winklmann, "An 'Interchange Lemma' for Context-free Languages", *SIAM J. Comput.* Vol.14, No.2, 410-415 (May, 1985).
- [13] J.E.Hopcroft and J.D.Ullman, *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*, Addison Wesley (1979).
- [14] M.Blum and C.Hewitt, "Automata on a two-dimensional tape," *Proc. 8th IEEE SWAT Conf.* 155-160 (1967).
- [15] M.Blum and D.Kozen, "On the power of the compass," *Proc. 19th FOCS Conf.*, 132-142 (1978).
- [16] A.Rozenfeld, *Picture Languages: a formal model of picture recognition*, Academic Press, (1979).
- [17] K.Inoue, I.Takanami, and H.Taniguchi, "Two-Dimensional Alternating Turing Machines," *Theoret.Comput.Sci.* 27 61-83 (1983).
- [18] A.Ito, K.Inoue, I.Takanami, and H.Taniguchi, "Two-Dimensional Alternating Turing Machines with Only Universal States," *Inform. and Control* 55, 193-221 (1983).
- [19] A.Ito, K.Inoue, I. and I.Takanami, "Deterministic Two-Dimensional On-Line Tessellation Acceptors are Equivalent to Two-Way Two-Dimensional Alternating Finite Automata through 180°-Rotation," to appear in *Theoret. Comput.Sci.*
- [20] 伊藤, 井上, 高浪; "1次元限定セル構造アクセプタと2次元オルタネーティング有限オートマトンの関係", 総合研究A『セル構造に基づく高度並列情報処理システムに関する総合的研究』第1回次報告書, 64-73 (昭63).
- [21] 伊藤, 井上, 高浪; "2次元オートマトンに関するテープ受理問題の複雑さ…その1", 情報基礎論ワークショップ(於広島), 68-71 (昭63).
- [22] 伊藤, 井上, 高浪; "2次元セル空間に関するテープ受理問題の複雑さ", 信学技報COMP88-49, No.301, 1-10 (昭63).