ソフトウェア基礎論 29−9
(1989. 5. 19)

確率付きネットワーク上の期待最大流について

On the Expected Maximum Flow in Probabilistic Networks

永持 仁　　千葉 貢　　楠 菊信

Hiroshi NAGAMOCHI, Kou CHIBA and Kikunobu KUSUNOKI

豊橋技術科学大学情報工学系，豊橋市

Dept. of Information & Computer Sciences,
Toyohashi University of Technology,
Toyohashi, 440 Japan.

あらまし　枝の故障を考慮した容量付きネットワークに対する信頼性は最大フローの期待値により評価することができる．期待最大流を計算する問題は一般にＮＰ－困難あることが知られ，期待最大流に対する１つの下限がこれまでに与えられている．この下限値は効率良く計算できるが，どのような場合にこの下限が正確に真の期待最大流に一致するかどうかは，２部グラフという特別な場合を除いて知られていない．本論文では，下限値が正確な期待最大流に等しくなるためのネットワークの必要十分条件を明らかにする．従って，この条件を満たすネットワークは期待最大流の効率良く計算できる１つのクラスである．

Abstract　The reliability of capacitated networks subject to random arc failures is estimated by the expected value of maximum flow. It is known that the problem of calculating the expected maximum flow is NP-hard, but a lower bound can be efficiently computed by the method of Carey and Hendricson. This bound sometimes gives the exact value, e.g., in the case of bipartite graphs. In this paper, we give a necessary and sufficient condition for the lower bound to give the exact value.

１．まえがき

通信網および水道網などの信頼性の評価基準として，連結確率あるいは最大流の期待値が知られている[1, 2, 8]．２節点間の連結確率を計算する問題はＮＰ-困難であるが[1]，グラフがSeries-Parallelあるいはこれを含むある種の平面グラフである場合には効率よく解けることが知られている[8]．２節点間の最大流の期待値を計算する問題も連結確率の計算問題を特別な場合として含み同様にＮＰ-困難である．これまで，期待最大流の効率良く計算できる場合としては，故障の生じる枝を２本以下に限ったとき[9]あるいはネットワークが２部グラフであるとき[2]以外ほとんど知られていない（この他カットの枚挙を用いた算法[3]も知られているがこれは多項式時間ではない）．また，期待最大流の上限あるいは下限を与える計算法がそれぞれ[7]，[2]により与えられている．これらの上下限値は多項式時間で得られるが，数値実験例においては，上限[7]よりも下限[2]が真の期待値に対して比較的良い近似値を与えることが報告されている[10]．しかし，この下限値が真の期待値に一致するための条件は２部ネットワーク[2]以外知られていない．

本論文では，下限値が真の期待最大流に一致するためのネットワークの必要十分条件を明らかにする．従って，この条件を満たすネットワークは期待最大流の効率良く求まるクラスの１つである．

２．諸定義

２端子単一品種流ネットワーク$N=(G,s,t,c)$を考えよう．ただし，

$G=(V,A)$：節点集合Vと有向枝集合Aを持つ有向グラフ．

$a(x,y)$：節点xから節点yへ向かう有向枝．

s：流出点（ソース）．

t：流入点（シンク）．$s \neq t$．

c：$A \to R^+$（非負実数の集合）は容量関数．

ネットワーク$N=(G=(V,A),s,t,c)$において，グラフGから枝の部分集合$U \subseteq A$を除去したグラフ$(V,A-U)$を簡単に$G-U$で表わし，ネットワーク$(G-U,s,t,c)$を$N-U$で表わす．

$G=(V,A)$の節点の部分集合$X \subseteq V$に対し，Xから出る枝の集合およびXに入る枝の集合を各々，

$$E^+(X \mid A) \triangleq \{a(x,y) \in A \mid x \in X,\ y \in V-X\}$$
$$E^-(X \mid A) \triangleq E^+(V-X \mid A)$$

と記す．特に，$E^+(\{v\} \mid A)$を$E^+(v \mid A)$で表わす．$E^-(v \mid A)$についても同様．

$N=(G=(V,A),s,t,c)$において，$s \in X$，$t \in V-X$を満たす節点の部分集合Xを<u>s-t分離集合</u>と呼び，このとき，$E^+(X \mid A)$を<u>s-tカット</u>と呼ぶ．s-tカット$E^+(X \mid A)$の<u>カット値</u>を

$$c(X \mid A) \triangleq \sum_{a \in E^+(X \mid A)} c(a)$$

で定義する．特に，$c(\{v\} \mid A)$を$c(v \mid A)$で表わす．

容量関数cによって決まる非零容量の枝集合を

$$A_c \triangleq \{a \in A \mid c(a) > 0\}$$

で表わす．ネットワーク$N=(G=(V,A),s,t,c)$

上の節点 x から節点 y への x-y パス（あるいは単にパス）π とは，次のような節点 v_i と非零容量枝 a（v_i, v_{i+1}）$\in Ac$ の交代系列のことである．

$$v_1(=x), a(v_1, v_2), v_2, a(v_2, v_3), \cdots, v_n(=y)$$

$v_1, v_2, \cdots, v_n$ の全ての節点が異なるとき，パスは初等的と言う．また，$v_1 = v_n$ のとき，この系列は閉路と言う．閉路を持たないネットワークを非閉路的と言う．パス（あるいは閉路）π 上の枝集合を $E(\pi)$ で表わす．パス（あるいは閉路）π の容量を

$$c(\pi) \triangleq \min\{c(a) \mid a \in E(\pi)\} > 0$$

により定義する． $N = (G = (V, A), s, t, c)$ において，パス（あるいは閉路）π 上の枝の容量を $0 < \alpha \leq c(\pi)$ だけ減らしたネットワーク（G, s, t, c'）ただし

$$c'(a) := \begin{cases} c(a) - \alpha & a \in E(\pi) \\ c(a) & a \in A - E(\pi) \end{cases}$$

を簡単に，$N - \alpha \cdot \pi$ と記す．

N 上の x－y パス（初等的でなくてもよい）の集合を $Q_N(x, y)$ で表わし，初等的な x－y パスの集合を $\overline{Q}_N(x, y)$ で表わす．ここで，$N = (G = (V, A), s, t, c)$ において，$f(a)$ を枝 $a \in A$ を通る流量としよう．このとき，次の(2.1),(2.2)を満たす流量関数 $f : A \to R^+$ を N の可能フローと言い，(2.1)における g の値を f の流量と呼び，$g(f)$ で表わす．

流量保存則： 全ての $v \in V$ に対し，

$$\sum_{a \in E^+(v \mid A)} f(a) - \sum_{a \in E^-(v \mid A)} f(a) = \begin{cases} g & v = s \\ 0 & v \in V - \{s, t\} \\ -g & v = t \end{cases} \qquad (2.1)$$

容量制約： 全ての $a \in A$ に対し，

$$f(a) \leq c(a) \qquad (2.2)$$

可能フロー $f : A \to R^+$ において，

$$f(a) > 0 \qquad a \in E(\kappa)$$

を満たす閉路 κ が存在しないとき f は非閉路的と言う．

$N = (G = (V, A), s, t, c)$ の可能フローはパスを用いると別の形で定式化できる． N において，$h(\pi)$ をパス $\pi \in Q_N(s, t)$ の流量とすると，次の(2.3)を満たす流量関数 $h : Q_N(s, t) \to R^+$ を N の可能パスフローと言い，(2.4)における g の値を h の流量と呼び $g(h)$ で表わす．

容量制約： 全ての $a \in A$ に対し，

$$h(a) \leq c(a) \qquad (2.3)$$

ただし，$\delta a\pi$ はパス π が枝 a を通る回数を表わすとし，

$$h(a) \triangleq \sum_{\pi \in Q_N(s,t)} \delta a\pi \, h(\pi)$$

と定義する．

$$\sum_{\pi \in Q_N(s,t)} h(\pi) = g \qquad (2.4)$$

可能パスフロー $h : Q_N(s, t) \to R^+$ が

$$h(\pi) = 0 \qquad \pi \in Q_N(s, t) - \overline{Q}_N(s, t)$$

を満たすとき初等的と言う．

明らかに，ある可能フロー f に対し，同じ流量 $g(f) = g(h)$ を持つ可能パスフロー h は常に存在し，逆もまた成立する．例えば，可能パスフロー $h : Q_N(s, t) \to R^+$ が与えられたとき， 各枝 $a \in A$ に対し

$$f(a) := h(a) \qquad (2.5)$$

によって決まる $f : A \to R^+$ は常に可能フローである．この逆は常に可能とは限らないが，与えられた可能フロー $f : A \to R^+$ に対し(2.5)式を満たす可能パスフロー $h : Q_N(s, t) \to R^+$ が得られるとき f は h に分解されると呼ぶ（分解は一般に一意的ではない）．次の結果は容易に得られる．

【補題2.1】 ネットワーク N の非閉路的可能フロー f はある可能パスフロー h に分解できる． □

任意のネットワーク $N = (G = (V, A), s, t, c)$ は可能（パス）フローを持つが，流量を最大にするものを N の最大（パス）フローと呼び，このときの流量を $g(N)$ で表わす．明らかに N の任意の s－t カット $E^+(X \mid A)$ に対し，$g(N) \leq c(X \mid A)$．$c(X \mid A)$ を最小にする s－t カット $E^+(X \mid A)$ を最小 s－t カットと呼び，このときの X を最小 s－t 分離集合と言う．

【最大流-最小カットの定理】[4] $N = (G = (V, A), s, t, c)$ の最小 s－t 分離集合を X^* に対し，

$$g(N) = c(X^* \mid A). \qquad (2.6) \square$$

3．確率付きネットワークにおける期待最大流

本節では，ネットワークの枝が故障するときの最大流量の期待値を考える．ただし，ネットワークの各枝の故障は独立に生じ，故障した枝は完全に途絶すると考える．枝 a が故障する確率を $0 < p(a) < 1$ で表わす（枝 a が正常である確率は $q(a) = 1 - p(a)$ で記す）．確率ベクトル $0 < p < 1$ が与えられたとき，確率付きネットワーク（$N = (G = (V, A), s, t, c), p$）における最大流の流量 $g(N)$ の期待値 $e[g(N), p]$（以下，期待最大流と呼ぶ）は次のように定義できる．

$$e[g(N), p] \triangleq \sum_{U \subseteq A} g(N - U)\,\rho(U) \qquad (3.1)$$

ここで，$\rho(U)$ は $U \subseteq A$ の全ての枝が故障しかつ $A - U$ の枝は全て正常である状態の生起確率を表わし，

$$\rho(U) = \prod_{a \in U} p(a) \cdot \prod_{a \in A-U} q(a) > 0$$

で与えられる．期待最大流の計算は，確率付き有向グラフ上での 2 節点間の連結確率の計算問題[1]を特別な場合として含み NP－困難である．期待最大流は容量の凸関数であることが知られている．

【補題3.1】[6,7] ネットワーク $N = (G, s, t, c)$，$N' = (G, s, t, c')$ 及び $N'' = (G, s, t, c'')$ が

$$c(a) = c'(a) + c''(a) \qquad a \in A$$

を満たすとき，任意の確率ベクトル $0 < p < 1$ に対し

$$e[g(N), p] \geq e[g(N'), p] + e[g(N''), p]. \qquad (3.2) \square$$

$N=(G=(V,A),s,t,c)$において，任意の非閉路的可能フロー$f:A\to R^+$に対して飽和されない枝$\bar{a}\in A$が存在するとき，Nは<u>冗長な容量</u>を持つと言う．

このとき，$\bar{a}\in A$は任意の非閉路的可能フローfに対し$f(\bar{a})\leq c(\bar{a})-\alpha$を満たす最大の$\alpha>0$を持つ（このとき等号を満たすfが存在する）．この$\alpha$を枝$\bar{a}$の<u>冗長な容量</u>と呼ぶ．

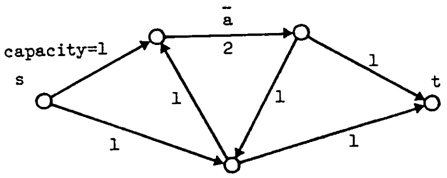


図1　冗長な容量を持つネットワークN1.

例えば，図1のネットワークN1において，枝$\bar{a}$を飽和する可能流は存在するが，冗長な容量を1だけ持つ．

【補題3.2】 ネットワーク$N=(G=(V,A),s,t,c)$の枝$\bar{a}\in A$が冗長な容量αを持つとき

$$N':=(G,s,t,c'),$$
$$c'(a):=\begin{cases} c(a)-\alpha & a=\bar{a} \\ c(a) & a\in A-\{\bar{a}\} \end{cases}$$

とすると，任意の確率ベクトル$0<p<1$に対し，

$$e[g(N),p]=e[g(N'),p].$$

（証明）任意の$U\subseteq A$に対し$g(N-U)=g(N'-U)$を示せば良い．$\bar{a}\in U$のとき$N-U=N'-U$．$\bar{a}\notin U$のときは，$N-U$の任意の非閉路的最大フローfは，Nにおいても可能フローでありαの定義より$f(\bar{a})\leq c(\bar{a})-\alpha$．従って，このときも$g(N-U)=g(N'-U)$．（証明終）

補題3.2によれば，Nにおいて枝$\bar{a}\in A$を通る初等的な$s-t$パスπが存在しないならば，$e[g(N),p]=e[g(N-\{\bar{a}\}),p]$．従って，$E^-(s\mid Ac)\neq\phi$あるいは$E^+(t\mid Ac)\neq\phi$であると，これらの枝を通る初等的なパスは存在しないので，冗長な容量を持たないNにおいては，

$$E^-(s\mid Ac)=E^+(t\mid Ac)=\phi. \quad (3.3)$$

【補題3.3】 ネットワーク$N=(G=(V,A),s,t,c)$において，冗長な容量を持つ枝集合を$\bar{A}(N)=\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_m\}$，$\bar{a}_i(i=1,2,\ldots,m)$の冗長な容量を$\alpha_i$で表したとき，$N'=(G,s,t,c')$を

$$c'(a_1):=\begin{cases} c(a)-\alpha_1 & a=\bar{a}_1 \\ c(a) & a\in A-\{\bar{a}_1\} \end{cases}$$

とすると，$\bar{A}(N')=\bar{A}(N)-\{\bar{a}_1\}$，かつ各$\bar{a}_i(i=2,3\ldots,m)$の冗長な容量は$\alpha_i$に等しい．

（証明）$\bar{A}(N')\subseteq\bar{A}(N)-\{\bar{a}_1\}$は明らか，また，各$\bar{a}_i(i=2,3,\ldots,m)$の冗長な容量が$\alpha_i$より小さくなることはない．$\bar{a}_i$の定義から各$i=2,3,\ldots,m$に対し

$$f_i(\bar{a}_i)=c(\bar{a}_i)-\alpha_i$$

を満たすNの非閉路的可能フロー$f_i:A\to R^+$が存在する．これらはα_1の定義から

$$f_i(\bar{a}_1)\leq c(\bar{a}_1)-\alpha_1,$$

を満たし，f_iはN'においても非閉路的可能フローである．（証明終）

補題3.3より，Nから冗長な容量を全て除いたネットワークは一意的であるのでこれをR(N)で表わす．このとき，補題3.2より，常に

$$e[g(N),p]=e[g(R(N)),p] \quad (3.4)$$

4．期待最大流に対する上下限

本節では，これまでに知られている期待最大流の上限値および下限値について述べよう．確率付きネットワーク$(N=(G=(V,A),s,t,c),p)$に対し，期待ネットワーク$e[N,p]$を

$$e[N,p]=(G,s,t,\bar{c}) \quad (4.1)$$
$$\bar{c}(a)=p(a)c(a) \quad a\in A$$

により定義したとき，$e[N,p]$の最大フローは期待最大流の上限を与えることが知られている[7]．

$$e[g(N),p]\leqq g(e[N,p]) \quad (4.2)$$

ところで，一般に不等式

$$g(e[R(N),p])\leqq g(e[N,p])$$

が成り立つことを考えると，(4.2)式によって期待最大流を近似する場合は，冗長な容量を除いておくことが望ましい．

次に期待最大流の下限を示す．ここで，もう一度(3.1)を吟味してみよう．(3.1)式は，正常時から故障時へ移行したとき再度，最大フローの流し直しを許している．これに対し，故障が生じた場合，正常時に選ばれたルートの中から途絶に生き残った$s-t$パスだけを使用する場合も考えられる．このようにルートの再選択が許されない場合には，正常時のルートとして選ばれた可能パスフロー$h:Q_N(s,t)\to R^+$のフロー量$g(h)$の期待値として

$$e[g(h),p]\triangleq\sum_{\pi\in Q_N(s,t)}\{h(\pi)\cdot\prod_{a\in E(\pi)}q(a)\} \quad (4.3)$$

をルートhの信頼性と考え，これをhの<u>流量期待値</u>と呼ぶ[2]．従って，流量期待値が期待最大流の下限を与えることはルートの再選択の有無を考えれば明らか．

【補題4.1】 [2] 確率付きネットワーク(N,p)において，Nの任意の可能パスフロー$h:Q_N(s,t)\to R^+$に対し

$$e[g(N),p]\geqq e[g(h),p]. \quad (4.4)\Box$$

(4.4)の等号を満たす可能パスフロー$h:Q_N(s,t)\to R^+$を(N,p)に対しクリティカルであると呼ぼう．明らかに，クリティカルなhは流量期待値を最大にする．以下では，確率付きネットワークがクリティカルなhを持つための必要十分条件について考える．

5．下限$e[g(h),p]$の性質

本節では，期待最大流の下限としての流量期待値の基本的な性質を調べる．

【補題5.1】 確率付きネットワーク$(N=(G=(V,$

A)，s，t，c)，p)（0<p<1）に対して，クリティカルな可能パスフロー$h : Q_N(s, t) \to R^+$は初等的である．

（証明）hが初等的ないとき，$h(\pi 1) > 0$なる初等的でないs-tパス$\pi 1$が存在する．このとき，$E(\overline{\pi}1) \subsetneq E(\pi 1)$を満たす初等的s-tパス$\overline{\pi}1 \in \overline{Q}_N(s, t)$が存在する．ここで，流量$\alpha = h(\pi 1)$の流れを$\overline{\pi}1$上に流し直し，これを

$$h'(\pi) := \begin{cases} h(\pi), & \pi \in Q_N(s,t) - \{\pi 1, \overline{\pi}1\} \\ 0, & \pi = \pi 1 \\ h(\overline{\pi}1) + \alpha, & \pi = \overline{\pi}1 \end{cases}$$

と定義するとh'もNの可能パスフローである．ところが，$E(\pi 1) - E(\overline{\pi}1) \neq \phi$に注意すると

$$\begin{aligned} & e[g(h'), p] - e[g(h), p] \\ & = \alpha \cdot \prod_{a \in E(\overline{\pi}_1)} q(a) - \alpha \cdot \prod_{a \in E(\pi_1)} q(a) \\ & = \alpha \cdot \prod_{a \in E(\overline{\pi}_1)} q(a) \left(1 - \prod_{a \in E(\pi_1) - E(\overline{\pi}_1)} q(a)\right) > 0 \end{aligned}$$

従って，hはクリティカルではない．（証明終）

以下では最大パスフローhは初等的なものに限って話を進め，これを$h : \overline{Q}_N(s, t) \to R^+$で表わす．さて，$e[g(h), p]$を(3.1)式と同様に各$U \subseteq A$に対する$\rho(U)$の重み付き和に書き直そう．

$$h(\pi) \prod_{a \in E(\pi)} q(a) = \sum_{U \subseteq A - E(\pi)} \{h(\pi) \prod_{a \in U} p(a) \prod_{a \in A-U} q(a)\}$$

に注意すると，

$$e[g(h), p] = \sum_{U \subseteq A} \{\beta_h(N-U)\, \rho(U)\}$$

ただし，

$$\beta_h(N-U) = \sum_{E(\pi) \subseteq A-U \text{なる} \pi \in Q_N(s,t)} h(\pi) \quad (5.1)$$

を得る．これを$e[g(h), p]$の<u>標準形式</u>と呼ぶ．

【補題5.2】 $e[g(N), p]$と$e[g(h), p]$の標準形式において各$U \subseteq A$に対する係数を比較したとき

(i)常に $g(N-U) \geqq \beta_h(N-U)$．

(ii)ある$U' \subseteq A$に対し

$$g(N-U') > \beta_h(N-U')$$

である場合には，任意の確率ベクトル$0<p<1$に対し

$$e[g(N), p] > e[g(h), p].$$

（証明）(i) 定義より明らか．(ii)については$\rho(A-U')>0$および(i)の結果より明らか．（証明終）

ネットワーク$N=(G=(V, A), s, t, c)$の可能パスフローが最大でない場合には，

$$\beta_h(N) = \sum_{E(\pi) \subseteq A \text{なる} \pi \in \overline{Q}_N(s,t)} h(\pi) = g(h)$$

に注意すると，$g(N) > g(h) = \beta_h(N)$が成り立ち補題5.2(ii)よりhはクリティカルになることはない．以下では，Nの最大パスフロー$h : \overline{Q}_N(s, t) \to R^+$を対象とする．

【補題5.3】 確率付きネットワーク$(N=(G=(V, A), s, t, c), p)$（$0<p<1$）に対し，Nの最大パスフロー$h : \overline{Q}_N(s, t) \to R^+$がクリティカルであるためには，Nの任意の初等パス$\pi \in \overline{Q}_N(s, t)$に対して

$$h(\pi) = c(\pi)$$

を満たすことが必要である．

（証明） Nのある最大パスフロー$h : \overline{Q}_N(s, t) \to R^+$に対して，$h(\pi') < c(\pi')$を満たす初等パス$\pi' \in \overline{Q}_N(s, t)$が存在すると仮定しよう．このとき$U = A - E(\pi')$とすると $g(N-U) = c(\pi')$．次に，$e[g(h), p]$の標準形式を考えると(5.1)より，

$$\beta_h(N-U) = \beta_h(E(\pi')) = \sum_{E(\pi) \subseteq E(\pi') \text{なる} \pi \in Q_N(s,t)} h(\pi) = h(\pi')$$

を得る．従って，$g(N-U) = c(\pi') > h(\pi') = \beta_h(N-U)$を満たす$U \subseteq A$が存在し，補題5.2(ii)よりhはクリティカルではない．（証明終）

6．バランスネットワーク

本節では，ネットワークのバランス性を導入し，(3.2)式において等号の成立するようなネットワークの分解について考える．ネットワーク$N=(G=(V, A), s, t, c)$の容量関数$c : A \to R^+$が全ての$v \in V - \{s, t\}$に対して，

$$\sum_{a \in E^+(v|A)} c(a) - \sum_{a \in E^-(v|A)} c(a) = 0 \quad (6.1)$$

を満たすときNは<u>バランス</u>していると言う．

例えば，図1のネットワークN1はバランスしている．

次の補題はバランス性の定義から容易に導ける．

【補題6.1】 $N=(G=(V, A), s, t, c)$をバランスネットワークとする．

(i) $g(N) > 0 \longleftrightarrow Q_N(s, t) \neq \phi$.

(ii) πを任意の初等s-tパスあるいはs,tを通らない閉路とすると，$N - \alpha \cdot \pi$ （$0 < \alpha \leqq c(\pi)$）はバランスネットワークであり，

$$g(N - \alpha \cdot \pi) = \begin{cases} g(N) - \alpha & (\pi \text{が初等s-tパスのとき}) \\ g(N) & (\pi \text{がs,tを通らない閉路のとき}). \end{cases}$$

(iii) Nが非閉路的であれば，Nの任意の最大フローf（パスフローh）は全ての枝の容量を消費する（従って，fは一意的であり，$N = R(N)$）．

(iv) Nにおいて，最大フロー$f : A \to R^+$が唯一であれば，Nは非閉路的．□

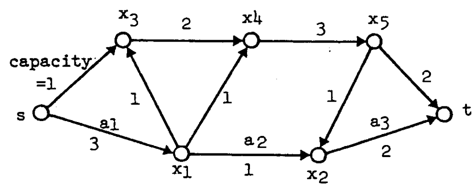


図2　合流点を持つネットワークN2.

【定義6.1】ネットワーク$N=(G=(V,A),s,t,c)$において，ある枝$\overline{a}\in Ac$に対し，$\overline{a}\in E(\overline{\pi})$を満たす$\overline{\pi}\in\overline{Q}_N(s,t)$が唯一であるとき，$\overline{a}$をNにおけるモノフィル(monofil)な枝と言い，この$\overline{\pi}$を$\overline{a}$のモノフィルパスと呼ぶ． □

図2の例では，a_2はモノフィルな枝でありそのモノフィルパス$\overline{\pi}$は$s\to x_1\to x_2\to t$である．

さて，明らかにモノフィルパスは初等的である．Nのモノフィルな枝$\overline{a}=a(\overline{u},\overline{v})$に対して，$s=\overline{u}$あるいは$|Q_N(s,\overline{u})|=1$．$s\neq\overline{u}$のとき，sから$\overline{u}$までの$\overline{\pi}$上の節点を順に図3のように，$w0(=s), w1, \cdots, wk(=\overline{u})$と記す．ここで，Nが非閉路バランスネットワークである場合には，

$$E^-(wi\mid Ac)=\{a(wi-1,wi)\}\quad 1\leq i\leq k \quad (6.2)$$

が成り立つことが容易に示せる（例えば$a(x,wi)\in E^-(wi\mid Ac)-\{a(wi-1,wi)\}$を仮定するとNのバランス性から図3のように$Q_N(s,x)\neq\phi$あるいは閉路$\kappa$の存在が示せ矛盾が導ける）．

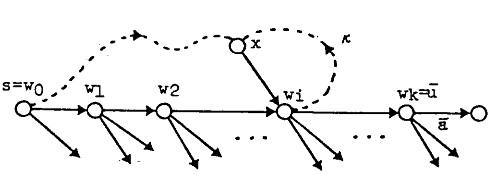


図3　モノフィルパス上の節点．

さらに，(6.1)，(6.2)より任意の$0\leq i<j\leq k$に対し

$$c(a(wi,wi+1))=c(\{wi+1,wi+2,...,wj\}\mid A) \quad (6.3)$$

$$c(a(wi,wi+1))\geq c(a(wj,wj+1)) \quad (6.4)$$

も容易に得られる．同様に，$\overline{v}\neq t$のとき，$\overline{v}$からtまでの$\overline{\pi}$上の節点を順に$wk+1(=\overline{v}), wk+2, \cdots, wr(=t)$と記すと次が成り立つ．

$$E^+(wi\mid Ac)=\{a(wi,wi+1)\}\quad k+1\leq i\leq r-1 \quad (6.5)$$

【定理6.1】非閉路的バランスネットワーク$N=(G=(V,A),s,t,c)$においてモノフィルな枝$\overline{a}$が存在するとき，$\overline{\pi}$を$\overline{a}$のモノフィルパスとすると，

(i) $\overline{\pi}$の容量$c(\overline{\pi})$は$c(\overline{a})$に等しい．

(ii) 任意の確率ベクトル$0<p<1$に対して

$$e[g(N),p]=e[g(N-\alpha\cdot\overline{\pi}),p]+\alpha\cdot\prod_{a\in E(\overline{\pi})}q(a)$$

（証明）付録参照．（証明終）．

図2のネットワークN_2はバランスしているので，モノフィルな枝a_2およびそのモノフィルパス$\overline{\pi}$に対し定理6.1を適用すると

$$e[g(N_2),p]=e[g(N_2-1\cdot\overline{\pi}),p]+q(a_1)q(a_2)q(a_3)$$

を得る．

7．クリティカルなhの存在する十分条件

本節では，クリティカルな最大フローを持つネットワークを定義する

【定義7.1】ネットワーク$N=(G=(V,A),s,t,c)$において，$|\overline{Q}_N(s,x)|\geq 2$，$|\overline{Q}_N(x,t)|\geq 2$を満たす節点$x\in V-\{s,t\}$をNの合流点と呼ぶ．□

例えば，図2において，x_3, x_4, x_5は合流点である．

【定理7.1】非閉路的バランスネットワーク$N=(G=(V,A),s,t,c)$において，以下の(i)～(iii)は同値である．

(i) Nの最大パスフロー$h: Q_N(s,t)\to R^+$は唯一である．

(ii) Nは合流点を含まない．

(iii) 次の算法が正しくStep1で停止する（つまり，Step2で常にあるモノフィルな枝$\overline{a}i$が見つかり，有限回の操作後$g(N(i))=0$となる）．

Step0: $N^{(0)}:=N, i:=0$.

Step1: $g(N(i))=0$なら停止．

Step2: $N^{(i)}$の1つのモノフィルな枝$\overline{a}i$に対し，$N^{(i+1)}:=N^{(i)}-\alpha i\cdot\overline{\pi}i$とする（ただし，$\overline{\pi}i$は$\overline{a}i$のモノフィルパス，$\alpha i$は$N^{(i)}$における$\overline{\pi}i$の容量）．$i:=i+1$としてStep1へ．

（証明）(i)⇒(ii)：Nの合流点uに対し相異なる初等的パス$\pi 1, \pi 2\in\overline{Q}_N(s,u)$，$\pi 3,\pi 4\in\overline{Q}_N(u,t)$が存在する（図4参照）．$\pi i(i=1,2)$と

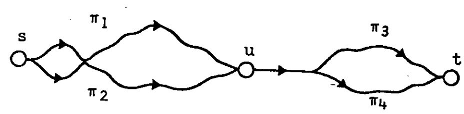


図4　合流点uを通るパス．

$\pi j(j=3,4)$からなるs-tパスをπijで表わす．ここで，αを$\min\{c(\pi 1),c(\pi 2),c(\pi 3),c(\pi 4)\}/2$と選ぶと，ネットワーク$N-\alpha\cdot\pi 1$において$\pi 24$の容量は$\alpha$以上であるので，さらに$N-\alpha\cdot\pi 13-\alpha\cdot\pi 24$が定義できる．補題6.1(ii)より$g(N-\alpha\cdot\pi 13-\alpha\cdot\pi 24)=g(N)-2\alpha$．パス$\pi 13$および$\pi 24$から成るネットワーク$\overline{N}=(G,s,t,\overline{c})$を

$$\overline{c}(a):=\begin{cases}2\alpha & a\in E(\pi 13)\cap E(\pi 24)\\ \alpha & a\in E(\pi 13)-E(\pi 24)\\ \alpha & a\in E(\pi 24)-E(\pi 13)\\ 0 & a\in A-E(\pi 13)\cup E(\pi 24)\end{cases}$$

により定義すると，$g(\overline{N})=2\alpha$であり，明らかに任意の$0\leq\varepsilon\leq\alpha$に対して

$$\overline{h}(\pi 13)=\overline{h}(\pi 24)=\alpha-\varepsilon,$$

$\overline{h}(\pi 14)=\overline{h}(\pi 23)=\varepsilon$
$\overline{h}(\pi)=0 \qquad \pi\neq\pi 13,\pi 24,\pi 14,\pi 23$

を満たす $\overline{h}:Q_{\overline{N}}(s,t)\to R^{+}$ は $\overline{N}$ の最大パスフローである．ところが，$N-\alpha\cdot\pi 13-\alpha\cdot\pi 24$ の任意の最大パスフロー h' に対し $h=\overline{h}+h'$ は N の最大パスフローであり h の一意性に反する．

(ii) ⇒ (iii)：まず，一般に合流点を含まない非閉路的バランスネットワーク $N(g(N)>0)$ は必ずモノフィルな枝を持つことを示そう．N のある $a(u0,v0)\in Ac$ に対し $|\overline{Q}_N(s,u0)|\geq 2$ と仮定しよう（$|\overline{Q}_N(v0,t)|\geq 2$ の場合も同様）．u0 は合流点ではないので $|\overline{Q}_N(u0,t)|=1$．ここで，$|E^-(u0|Ac)|=1$ であれば，$\{a(u1,u0)\}=E^-(u0|Ac)$ とおくと，$|\overline{Q}_N(s,u1)|\geq 2$ かつ $|\overline{Q}_N(u1,t)|=1$．以下同様に，$|E^-(ui|Ac)|=1\ (i=0,1,\cdots)$ である限り ui を定義していくと，$|\overline{Q}_N(s,u0)|\geq 2$ より，ある i=k に対し，$|E^-(uk|Ac)|\geq 2$ が成り立ち，$|\overline{Q}_N(ui,t)|=1\ (i=0,1,\cdots,k)$．次に $E^-(uk|Ac)$ から適当な枝を選び $a(uk+1,uk)$ と定義する．ここで，$a(uk+1,uk)$ がモノフィルな枝でなければ，$|\overline{Q}_N(s,uk+1)|\geq 2$ であり，以下同様に $ui(i=k+1,k+2,\cdots)$ が定義できる．この操作において N の非閉路性から同じ節点は２度と現われないので，N は必ずモノフィルな枝を持つ．次に算法の正当性を示す．補題6.1(ii)より各 $N^{(i)}(i=0,1,...)$ は非閉路的バランスネットワークであり $g(N^{(i+1)})=g(N^{(i)})-\alpha i$．従って，$g(N^{(i)})>0$ である限り $N^{(i)}$ はモノフィルな枝を持ち算法は Step1,2を繰り返すが，$N^{(i+1)}$ は $N^{(i)}$ に比べて容量０の枝が少なくとも１つ増加するので，高々 $|A|$ 回で $g(N^{(i)})=0$ となり停止する．

(iii) ⇒ (i)：(iii) の算法が正しく作動し $i=m$ のとき停止すると仮定する．補題6.1(iii)より N の任意の最大パスフロー h は $c(\overline{a}0)$ を飽和するが，この $\overline{a}0$ 上の流れは $\overline{\pi}0$ 以外のパスを通ることはないので $h(\overline{\pi}0)=c(\overline{a}0)$．以下同様に，$\overline{\pi}1,\overline{\pi}2,\cdots,\overline{\pi}m$ に対する一意性から N の最大パスフローは $h(\overline{\pi}i)=\alpha i\ (i=0,1,\cdots,m)$ 以外にない．（証明終）

【定義7.2】ネットワーク N が以下の条件(i)～(iii)を満たすとき<u>モノフィル</u>であると呼ぶ．
(i)　N はバランスしている．
(ii)　N は閉路を持たない．
(iii)　N は合流点を持たない．　□

補題6.1(iv)より (i) のもとで (ii) は，N の最大フロー f が一意的であることと同値である．また，定理7.1より (i) および (ii) のもとで (iii) は，N の最大パスフロー h が一意的であることと同値である．定理6.1を定理7.1 (iii) の各 $N^{(i)}$ に適用することにより次の結果が得られる．

【定理7.2】モノフィルネットワークにおいて，最大パスフロー h は，任意の確率ベクトル $0<p<1$ に対してクリティカルである．　□

例えば，図５の有向グラフ G1上のネットワーク $N=(G1,s,t,c)$ がバランスしていれば，N はモノフィルであるので定理7.1(iii)および定理7.2より，

$e[g(N),p]$
$=c(a_1)q(a_1)q(a_8)q(a_9)+c(a_2)q(a_6)q(a_2)q(a_8)q(a_9)$
$+c(a_3)q(a_6)q(a_3)q(a_9)+c(a_4)q(a_6)q(a_7)q(a_4)q(a_9)$
$+c(a_5)q(a_6)q(a_7)q(a_5)$ を得る．

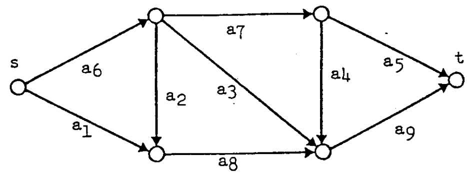


図５　有向グラフ G1.

８．クリティカルな最大フローの存在する必要条件

前節の定理7.2においては，同一の（唯一であるが）h が任意の確率ベクトル $0<p<1$ に対し常にクリティカルである点に注意しよう．これに対し，与えられた $0<p<1$ に依存してクリティカルな $h=h(p)$ を選ぶことを許しても，ネットワーク N がモノフィルな R (N) を持たない場合にはそのような h は存在しない．

【定理8.1】確率付きネットワーク $(N=(G=(V,A),s,t,c),p)\ (0<p<1)$ に対しクリティカルな最大パスフロー h が存在するための必要十分条件は，R(N) がモノフィルであることである．
（証明）十分性は(3.4)および定理7.2より明らか．必要性を示す．(3.4)より一般性を失わず R(N)=N と仮定する．

Case-1（N がバランスしていない場合）：(N, p) に対してクリティカルな N の最大パスフロー $h:\overline{Q}_N(s,t)\to R^{+}$ を仮定し，容量関数 c' を

$c'(a):=\ h(a)$

によって定義したネットワーク $N'=(G,s,t,c')$ を考えよう．N′ はバランスしているので $c(a^*)>c'(a^*)$ を満たす $a^*\in A$ が存在する．N=R(N) より $f(a^*)=c(a^*)$ を満たす N の非閉路的可能フロー $f:A\to R^{+}$ が存在する．補題2.1より f はある初等的な可能パスフロー $h':\overline{Q}_{N'}(s,t)\to R^{+}$ に分解できる．ここで，$h'':\overline{Q}_{N'}(s,t)\to R^{+}$ を

$h''(\pi):=h'(\pi) \qquad a^*\in E(\pi)$ なる π
$h''(\pi):=0 \qquad a^*\notin E(\pi)$ なる π

により定義すると，$g(h'')=c(a^*)=f(a^*)$．従って，$U_f=\{a\in A\mid f(a)=0\}$ と定めると，$\{a^*\}$ は $N-U_f$ における１つの最小 s-t カットであるので，$g(N-U_f)=c(a^*)=f(a^*)$．$\{a^*\}$ は $N'-U_f$ においても s-t カットであり，$c\geq c'$ から $g(N'-U_f)\leq c'(a^*)<c(a^*)=g(N-U_f)$．
ところが，$e[g(h),p]$ の標準形式において

$$\beta_h(N-U_f)=\sum_{E(\pi)=A-U_f\ \text{なる}\ \pi\in Q_N(s,t)} h(\pi)\leq g(N'-U_f)$$

を得，$\beta_h(N-U_f)<g(N-U_f)$．これは補題5.2(ii)より h がクリティカルであることに反する．

Case-2（N がバランスしているが閉路を持つとき）：
$h:Q_N(s,t)\to R^{+}$ を (N, p) のクリティカルな

最大フローであると仮定しよう．Nは閉路を持つが，$N_0=N$とし，ネットワークに閉路がなくなるまで閉路κ_iを選び，操作$N_i:=N_{i-1}-\alpha_i\cdot\kappa_i$を続ける（$\alpha_i$は$N_{i-1}$における$\kappa_i$の容量）．この操作は明らかに高々$i=m\leq|A|$で停止する．閉路$\kappa_i(i=1,2,\cdots,m)$は(3.3)よりs,tを通らないので，補題6.1(ii)より，$g(N_m)=g(N)$．N_mの容量関数をc'で記し，N_mの1つの最大フローを$h':\overline{Q}_N(s,t)\to R^+$で表わす．補題5.3よりhは全ての$\pi\in\overline{Q}_N(s,t)$に対し

$$h(\pi)=c(\pi)\geq c'(\pi)\geq h'(\pi)$$

を満たす．補題6.1(iii)よりh'は全ての枝を飽和することから，(3.3)より全ての$a\in E^+(s|A)$に対し

$$c(a)=c'(a)=h'(a).$$

従って，$h\geq h'$なる$|\overline{Q}_N(s,t)|$次元ベクトルhおよびh'は$h=h'$に限る．さて，閉路κ_1の容量$c(\kappa_1)$を与える枝を$a_1\in E(\kappa_1)$とすると，$N=R(N)$より$a_1\in E(\pi_1)$を満たす初等パス$\pi_1\in\overline{Q}_N(s,t)$が存在する．このとき，

$$h(\pi_1)=c(\pi_1)>0,\ 0=c'(\pi_1)\geq h'(\pi_1)$$

を得るがこれは$h=h'$に反する．

Case-3（Nがバランスかつ非閉路的であるが，合流点を持つとき）：定理7.1よりNは合流点uを持ち，相異なるパス$\pi 1,\pi 2\in\overline{Q}_N(s,u)$，$\pi 3,\pi 4\in\overline{Q}_N(u,t)$が存在する（図4参照）．$\pi i(i=1,2)$と$\pi j(j=3,4)$からなるパスを$\pi ij$と記す（非閉路性より$\pi ij(i=1,2,j=3,4)$は初等的）．さて，$\pi 1,\pi 2,\pi 3,\pi 4$の中でパス$\pi 1$の容量が最小であるとする（他の場合も同様）．このとき，Nの任意の最大パスフローhに対して，$h(\pi 13)+h(\pi 14)\leqq c(\pi 1)$．従って，$h(\pi 13)<c(\pi 13)\ (=c(\pi 1))$ あるいは $h(\pi 14)<c(\pi 14)\ (=c(\pi 1))$ は補題5.3の条件を満たさない．（証明終）

9．時間計算量

モノフィル性の判定およびR(N)の計算に必要な時間計算量について触れておく．定義7.1(i)(ii)の判定は$O(|A|)$時間で済み，また，ある節点xの$|Q_N(x,t)|$が1否かは2度の深さ優先探索で判定できることから（最初の探索でx-tパスπを見つけ，2度目はπ上にない枝を優先的に選ぶことで，別のx-tパスの存在を判定する），定義7.1(iii)の判定は高々$O(|V||A|)$時間で済む．よって，与えられたネットワークがモノフィルであるかどうかは$O(|V||A|)$時間で判定できる．次に，NからR(N)=$(G,s,t,\overline{c})$を得る手間を考える．Nが非閉路的である場合には，各$a(u,v)\in A$に対しネットワークNvuを

$$Nvu:=((V,A\cup\{a(t,s)\}-\{a(u,v)\}),v,u,c')$$

$$c'(a):=\begin{cases}c(a) & a\in A-\{a(u,v)\}\\ g(N) & a=a(t,s)\end{cases}$$

により定義すれば，明らかに，$\overline{c}(a(u,v))=g(Nvu)$が成り立つ．従って，補題3.3よりR(N)は高々$O(|A|T(|V|,|A|))$時間で得られる（ただし，$T(|V|,|A|)$はNの最大パスフローを求める手間を表わす）．ところが，Nに閉路が存在する場合，一般にR(N)を求める問題はNP－困難となる．有向単純グラフG=(V,A)上の2節点(s^1,t^1)，(s^2,t^2)対間の点素な2つの有向パスP1，P2の存在を判定する問題はNP－完全であることが知られている[5]．ここで，$a(t^1,s^2)\notin A$ならば$A'=A\cup\{a(t^1,s^2)\}$とし，そうでなければ$A'=A$とし，ネットワークNを

$$N:=((V,A'),s^1,t^2,c),\quad c(a):=1\quad a\in A'$$

により定義すれば，補題3.3よりR(N)を得るには必ず枝$a(t^1,s^2)$の容量の冗長性も判定される．この帰着において，枝$a(t^1,s^2)$が冗長な容量を持たないこととGに解P1，P2が存在することが同値であることは容易に確かめられよう．

10．むすび

これまで確率付きネットワークにおける信頼性の評価基準として期待最大流と流量期待値が知られていたが，本論文では，両者が一致するためのネットワークの必要十分条件を明らかにした．従って，この場合，期待最大流は流量期待値を計算することで効率良く求まる．また，9節でR(N)を求める問題のNP－困難性を示しているが，一般にNがモノフィルなR(N)を持つかどうかの判定が多項式時間でできることが最近明らかになった．

謝辞 適切な御助言を頂いた京都大学茨木俊秀教授に感謝致します．

文　献

[1] M.O.Ball: "Computational complexity of network reliability analysis: an overview", IEEE Trans. on Reliability, Vol.R-35, No.3, pp.230-239 (1986).

[2] M.Carey and C.Hendricson: "Bounds on expected performance of networks with links subject to failure", Networks, Vol.14, pp.439-456 (1984).

[3] J.R.Evans: "Maximum flow in probabilistic graphs - the discrete case", Networks, Vol.6, pp.161-183 (1976).

[4] L.R.Ford and D.R.Fulkson: Flows in Networks, Princeton Unversity, Princeton, NJ (1962).

[5] S.Fortune, J.Hopcroft and J.Wyllie: "The directed subgraph homeomorphism problem", Theoretical Computer Science, Vol.10, pp.111-121 (1980).

[6] 平山，上原："通信網におけるフローの期待値"，信学論(A)，J52-A,12,pp.471-477 (1969).

[7] K.Onaga: "Bounds on the average terminal capacity of probabilistic nets", IEEE Trans. Information Theory Vol.14,pp.766-768 (1968).

[8] T.Politof and A.Satyanayana: "Efficient algorithms for reliability anlysis of planar networks - a survey", IEEE Trans. on Reliability, Vol.R-35, pp.252-259(1986).

[9] J.E.Somers: "Maximum flow in networks with a small number of random arc capacities", Networks, Vol.12, pp.242-253 (1982).

[10] S.W.Wallance: "Investing in arcs in a network to maximize the expected max flow", Networks, Vol.17, pp.87-103 (1987).

付　録

定理6.1の証明　(i)　$c(\bar{a}) > c(\bar{\pi})$ と仮定するとモノフィル枝$\bar{a}$を通るsからtへのパスは$\bar{\pi}$以外に存在しないので，Nの任意の最大パスフロー$h: Q_N(s, t) \to R^+$は枝$\bar{a}$を飽和することはない．このとき，$\bar{a}$を含めて飽和されない枝の集合はバランス性から閉路を作るが，これはNの非閉路性に反する．

(ii) パス$\bar{\pi}$のみからなるネットワーク$N'' = (G, s, t, c'')$を

$$c''(a) := \begin{cases} \alpha & a \in E(\bar{\pi}) \\ 0 & a \in A - E(\bar{\pi}) \end{cases}$$

により定義すると，補題3.1よりN，N''および$N' = N - \alpha \cdot \bar{\pi}$は不等式(3.2)を満たし，

$$e[g(N''), p] = \alpha \cdot \prod_{a \in E(\bar{\pi})} q(a).$$

定理を示すために，以下，任意の$U \subseteq A$に対し

$$g(N-U) = g(N'-U) + g(N''-U)$$

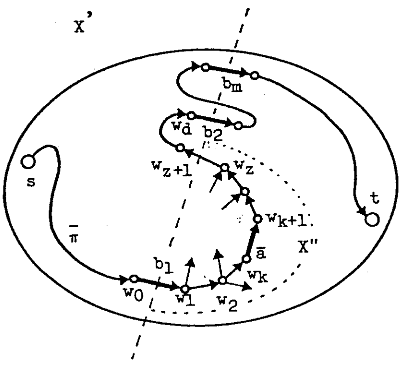
を示す．

Case-I ($U \cap E(\bar{\pi}) = \phi$のとき)：明らかに，$g(N''-U) = g(N'') = \alpha$．$g(N-U) > g(N'-U) + \alpha$を仮定して矛盾を導こう．$N'-U$の最小s-t分離集合$X'$に対し(2.1)より$c'(X'|A-U) = g(N'-U)$．$X'$の$N-U$におけるカット値は次のように書ける．

$$c(X'|A-U) = c'(X'|A-U) + m\alpha \quad \text{(A1)}$$

ただし，$m = |E^+(X'|A-U) \cap E(\bar{\pi})|\ (\geq 1)$．

ここでX'は，$N'-U$の最小s-t分離集合の中でmを最小するものを選んでおく．$m=1$のときは$c'(X'|A-U) + \alpha = c(X'|A-U) \geq g(N-U)$より，$g(N-U) = g(N'-U) + \alpha$を得るが，これは仮定に反するので$m \geq 2$．ここで，$E^+(X'|A-U) \cap E(\bar{\pi})$の枝を図A1のように$\bar{\pi}$上でsからtへ並んでいる順に$b_1, b_2, \cdots, b_m$と記す．



図A 1　定理6.1の証明(Case-I)．

また，$\bar{\pi}$上でb_1の始点u_1からb_2の始点u_2までの節点を順に$w_0 (= u_1), w_1, \cdots, w_d (= u_2)$と記すと，$\bar{\pi}$の初等性より$w_i \neq t\ (i = 0, 1, \cdots, d)$であり，

$$\{w_1, w_2, \cdots, w_z\} \subset V - X',$$
$$\{w_{z+1}, w_{z+2}, \cdots, w_d\} \subset X'$$

を満たすzが存在する．ここで，$X'' = X' \cup \{w_1, w_2, \cdots, w_z\}$はひとつのs-t分離集合である．以下，

$$c(X''|A-U) - c(X'|A-U) \leq -c(\bar{a}) \quad \text{(A2)}$$

の成立を示そう．まず，$\bar{a}$が$\bar{\pi}$上でsからw_1の間にあるとき(A2)の成立は性質(6.5)から明らか．$\bar{a}$が$\bar{\pi}$上でw_zからtの間にあるときにはX''の作り方から

$$\begin{aligned} & c(X''|A-U) - c(X'|A-U) \\ & \leq c(\{w_1, w_2, \ldots, w_z|A-U) \\ & \qquad - c(a(w_z, w_{z+1})) - c(a(w_0, w_1)) \\ & \leq -c(a(w_z, w_{z+1})) && ((6.3)\text{より}) \\ & \leq -c(\bar{a}). && ((6.4)\text{より}) \end{aligned}$$

同様に，$\bar{a} = a(w_k, w_{k+1})$を満たす$1 \leq k \leq z$が存在する場合も$X''$の作り方および(6.3)から

$$\begin{aligned} & c(X''|A-U) - c(X'|A-U) \\ & \leq c(\{w_1, w_2, \ldots, w_k|A-U) \\ & \qquad - c(a(w_k, w_{k+1})) - c(a(w_0, w_1)) \\ & \leq -c(a(w_k, w_{k+1})) = -c(\bar{a}) \end{aligned}$$

が示せ，不等式(A2)を得る．ところでX''の作り方より，

$$c(X''|A-U) = c'(X''|A-U) + (m-1)\alpha$$

と書けるので，(A1)および(A2)から

$$c'(X''|A-U) \leq c'(X'|A-U) + \alpha - c(\bar{a})$$

が成り立ち，$0 \leq \alpha \leq c(\bar{a})$より$E^+(X''|A-U)$は$N'-U$の最小s-tカットとなるが，これはmの最小性に反する．

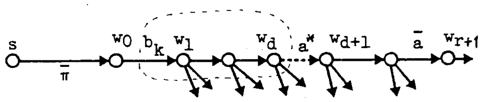
Case-II ($U \cap E(\bar{\pi}) \neq \phi$のとき)：$g(N''-U) = 0$であるので$g(N-U) = g(N'-U)$を示す．$N'-U$のひとつの最小カットを$E^+(X'|A-U)$とする．$E^+(X'|A-U) \cap E(\bar{\pi}) = \phi$のときは，$c(X'|A-U) = c'(X'|A-U)$であるので明らかに$g(N-U) = g(N'-U)$．$E^+(X'|A-U) \cap E(\bar{\pi}) \neq \phi$のとき，これらの枝を$b_1, b_2, \cdots, b_m$と記すと，

$$c(X'|A-U) = c'(X'|A-U) + m\alpha$$

と表わせる．$g(N-U) > g(N'-U)$を仮定して矛盾を導こう．$N-U$における任意の最大フロー$f: A \to R^+$を選ぶと，$g(N-U) > g(N'-U) = c'(X'|A-U)$より，最大フローfは$b_1, b_2, \cdots, b_m$の少なくとも1つの枝$b_k$に対して

$$f(b_k) > c'(b_k) \quad (>0)$$

を満たしているはずである．ここで，図A2のようにb_kは$\bar{\pi}$上でsから$\bar{a}$の終点$\bar{v}$までの間にあるとしよう（逆の場合も全く同様にできる）．$\bar{\pi}$上でsからb_kの始点u_kまでの間にUの枝が存在すると，$\bar{\pi}$の唯一性より$Q_{N-U}(s, u_k) = \phi$であり$f(b_k) > 0$に反する．従って，$a^* \in U \cap E(\bar{\pi})$なる枝は，$b_k$の終点$v_k$からtまでの間に存在する．$b_k = \bar{a}$のとき$b_k$上のfは$\bar{\pi}$の唯一性から$a^* \in U$を通過する必要があり$f(b_k) > 0$に反する．従って，$b_k \neq \bar{a}$．$b_k$の始点$u_k$から$\bar{a}$の終点$\bar{v}$までの$\bar{\pi}$上の節点を順に$w_0 (= u_k), w_1, \cdots, w_r (= \bar{v})$と記す．ここで，$a^* \in U \cap E(\bar{\pi})$は$\bar{\pi}$上で最も$b_k$に近い枝とする．



図Ａ２　定理6.1の証明(Case-II).

(a) a^*が $\bar{a}$ よりもb_kに近いとき（つまり，$a(w_d, w_{d+1}) = a^*$を満たす$1 \leqq d \leqq r-2$が存在するとき）．性質(6.3)より

$$
\begin{aligned}
c(b_k) &= c(a(w_0, w_1)) \\
&= c(\{w_1, w_2, ..., w_d\} \mid A) \\
&\geqq c(\{w_1, w_2, ..., w_d\} \mid A-U) + c(\bar{a}).
\end{aligned}
$$

ところで，b_kを通る流れは$a^* \in U$を通る前に$\bar{\pi}$以外のパスを通らなければならないので，カット値 $c(\{w_1, w_2, ..., w_d\} \mid A-U)$ は$f(b_k)$より小さくはない．よって，

$$
\begin{aligned}
c(b_k) \geqq c(\bar{a}) + f(b_k) &> c(\bar{a}) + c'(b_k) \\
&= c(\bar{a}) + c(b_k) - \alpha
\end{aligned}
$$

より$\alpha > c(\bar{a})$を得るが，これは$\alpha \leqq c(\bar{a})$に反する．

(b) $\bar{a} = a^*$あるいは$\bar{a}$がa^*よりもb_kに近いときも同様に，性質(6.3)より

$$c(b_k) \geqq c(\{w_1, w_2, ..., w_r\} \mid A-U) + c(\bar{a}).$$

$\bar{\pi}$の唯一性からb_kを通る流れは$\bar{a}$を通る前に$\bar{\pi}$以外のパスを通らなければならないので，カット値 $c(\{w_1, w_2, ..., w_r\} \mid A-U)$ は$f(b_k)$より小さくはない．よって，$c(b_k) \geqq c(\bar{a}) + f(b_k)$を得，$\alpha \leqq c(\bar{a})$に反することが示せる．　　　　（証明終）