

# 多軸多段歯車変速機構の最適設計問題

沢田浩之

## 新世代コンピュータ技術開発機構

あらまし 歯車変速機構は旋盤など工作機械の主軸の変速機構として多く用いられているが、その設計問題を1種の制約充足最適化問題としてとらえて定式化を行ない、そして、その並列処理について考察した。先に報告した2軸の場合と同様、制約条件は同時噛み合いの禁止条件並びに歯車同士の衝突禁止条件であり、機構はその全体幅が最小のときに最適であると定義される。一般に多軸多段歯車変速機構は2軸および3軸からなる部分機構によって構成されると考えることができ、全体の設計問題を部分機構の設計と部分機構の統合の2段階に分けて、後者を並列に処理することで全体の処理時間を短縮することができる。

## The Optimal Design Problem for a Multiple Axes Gearbox

Hiroyuki SAWADA

### Institute for New Generation Computer Technology

Abstract A gearbox is used for a transmission of the main spindle of machine tools as a lathe. We regard its design problem as a kind of optimization problem under constraints, formulate the design process and study its parallel processing. As in the case of two axes gearbox, constraints are : no simultaneous meshing of different gear pairs, and no interference between gears. The structure of the gearbox is then optimized by minimizing of its overall width. A multiple axes gearbox is constructed with partial structures of two or three axes, so this problem divides into two problems : design of partial structures and construction of whole structures. We deal with the latter in parallel.

## 1. はじめに

歯車変速機構は旋盤など工作機械の主軸の変速機構として多く用いられているが、その設計問題を制約充足および並列処理問題の例題として取り上げる。

著者は、一般に多軸多段歯車変速機構が2軸および3軸の変速機構の組み合わせによって構成されるという点に着目し、先に作成した2軸多段変速機構の設計アルゴリズム<sup>[1]</sup>をもとにこの設計問題の定式化を行った。さらに、部分構造を統合して全体の機構を作り上げる過程を並列化することにより処理の高速化を図った。

本報の構成だが、まず次章で歯車変速機構の説明をした後に問題の設定を行う。次に第3章で全体構造が部分構造の組み合わせから成ることを示し、第4章で部分構造の設計方法、第5章では構造全体の設計方法について述べる。そして第6章において実際のプログラムの実行結果をもとに並列処理の方法について考察する。

## 2. 問題の設定

### 2.1 歯車変速機構

歯車変速機構の例を図1に示す。この例では第1軸および第3軸が固定軸であり、第2軸がすべり軸である。噛み合う歯車の組はそれぞれアルファベットの大文字と小文字の組で表されている。

すべり歯車が左右に移動することによって歯車の噛み合いが生じる。すべり歯車はaとbお

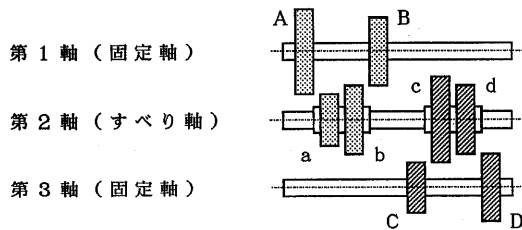


図1. 歯車変速機構

よびcとdの歯車が一体となった構造を成しており<sup>(\*)1</sup>、これらの組はすべり軸上を互いに独立に動くことができる。図1の例では第1軸と第2軸との間で2段、第2軸と第3軸との間で2段の変速が生じるので合わせて $2 \times 2 = 4$ 段の変速機構となる。

### 2.2 問題の定義<sup>[1]</sup>

多軸多段歯車変速機構の最適設計問題を次のように定義する。

「機構の全体幅を最小にするような歯車の並びの順序関係と歯車間の距離を決定する」

ここで、最初に与えられる情報は軸数、軸間距離<sup>(\*)2</sup>、各軸間において得られる変速段数および部分速度比、そして固定軸とすべり軸の配置である。

また、問題を簡単にするために以下のような仮定を置く。

- 歯車の幅は全て等しく単位幅である。
- 構造の左右を逆転して互いに一致するような鏡像関係にある2つの構造は同一の構造を表す。
- 固定軸とすべり軸は交互に配置する<sup>(\*)3</sup>。

## 3. 全体構造の分割

2.1で述べたように一体構造を成すすべり歯車は互いに独立に動くことができる。すなわち、それぞれの可動範囲は互いに干渉しない。したがってすべり軸をすべり歯車の可動範囲によって区分けすることで構造全体をいくつかの部分構造に分割することができる。

図2に全体構造を3つの部分構造に分割した例を示す。この構造は5軸の変速機構で第1軸が固定軸である。変速段数は第1軸-第2軸で3段、第2軸-第3軸で2段、第3軸-第4軸で2段、第4軸-第5軸で3段の合わせて36段である。

図中の点線は構造の分割方法を示している。上から順番に、固定軸-すべり軸の2軸機構、すべり軸-固定軸-すべり軸の3軸機構、すべり軸-固定軸の2軸機構に分割されている。

(\*)1 すべり歯車は3速までは一体構造、4速以上では分割した構造がよいとされる<sup>[3]</sup>。

(\*)2 正確には軸間距離に相当する量(たとえば歯数の和)である。

(\*)3 すべり軸を多くした方が全体幅を小さくすることができるが、保守・管理の点から可動部分はなるべく減らすことが望ましい。

この例から分かるように、多軸多段の変速機構は2軸および3軸の変速機構の組み合わせとして考えることができる。

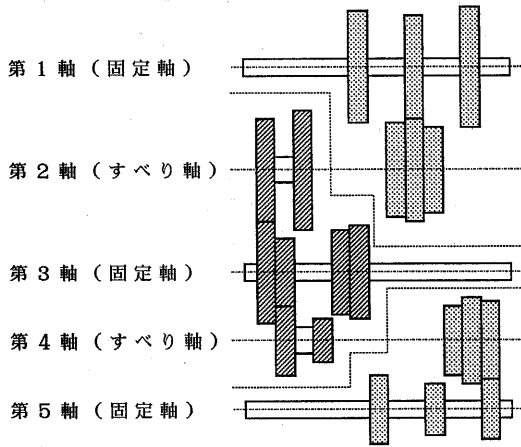


図2. 部分構造への分割

#### 4. 部分構造の設計方法 - 3軸変速機構 -

##### 4.1 問題解決の戦略

3軸多段歯車変速機構の設計にあたり、まずこの問題を2つの部分問題に分割することを考える。1つは歯車の相対的な位置関係(位相的構造)を決定することであり、もう1つは歯車の幾何的な位置座標(幾何的構造)を決定することである<sup>[2]</sup>。

なお、ここで対象とする機構はすべり軸-固定軸-すべり軸の3軸変速機構であり、また、2軸変速機構についてはすでに報告済み<sup>[1]</sup>であるのでここでは繰り返さない。

##### 4.2 位相的構造

位相的構造は固定軸上の歯車のならび方を記述することで表現できる。ベクタ  $\{a_i\}$  を用いて記述し、その要素の絶対値は固定歯車の径に対応させ、また、要素が負の場合その歯車は第1軸のすべり歯車と噛み合い、正の場合は第3軸のすべり歯車と噛み合うものとする。

例えば図3(a)のような位相的構造は、

$$\{a_i\} = \{-3, 2, -5, 1, 4\}$$

と表される。

また、図3(b)のような拘束駆動<sup>(\*)</sup>の場合には、共通歯車を2要素のリスト<sup>[4]</sup>で表現して、

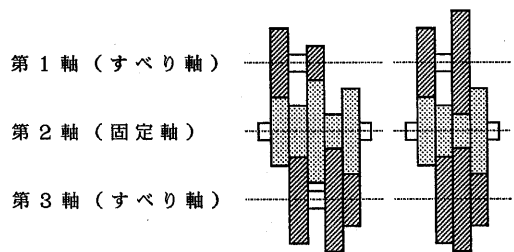
$$\{a_i\} = \{-3, 2, [-1, 1], 4\}$$

と記述する。

さて、ベクタ  $\{a_i\}$  のサイズについてであるが、変速段数を第1軸-第2軸間で  $N^-$  段、第2軸-第3軸間で  $N^+$  段とすればベクタサイズは  $(N^- + N^+)$  となる。また、全体の変速段数  $N$  は

$$N = N^- \times N^+$$

で与えられる。



(a) (b)

無拘束駆動 拘束駆動

図3. 位相的構造

##### 4.3 幾何的構造

###### 4.3.1 幾何的構造の表現方法

幾何的構造は各軸の歯車の位置座標により表され、第1軸、第2軸、第3軸についてそれぞれ要素サイズ  $(N^- + N^+)$  のベクタ  $\{s^-_i\}$ 、 $\{f_i\}$ 、 $\{s^+_i\}$  で記述される。

ベクタの各要素は歯車の位置座標を示し、また、要素の位置は互いに噛み合う歯車対に対応している。

例えば、図4のような構造は次のように記述される。

$$\{a_i\} = \{-3, 2, -5, 1, 4\}$$

$$\{f_i\} = \{0, 3, 6, 7, 12\}$$

$$\{s^-_i\} = \{0, \_, 4, \_, \_ \}$$

$$\{s^+_i\} = \{ \_, 1, \_, 7, 8 \}$$

ここでさらにすべり量  $\{d^-_i\}$ 、 $\{d^+_i\}$  を考える。これは歯車対を噛み合わせるために必

(\*) 歯車を共通にして駆動する方法を拘束駆動といい、その共通歯車の数により単一拘束駆動、二重拘束駆動などという<sup>[3]</sup>。

要なすべり歯車の移動量であり、

$$d_i^{\pm} \equiv f_i - s_i^{\pm} \quad (\text{複号同順}) \quad (1)$$

と定義され、図4の場合には

$$\{d_i^{-}\} = \{0, \_, 2, \_, \_ \}$$

$$\{d_i^{+}\} = \{ \_, 2, \_, 0, 4 \}$$

と表される。

すべり量の最小値は0として一般性を失わない<sup>[1]</sup>。

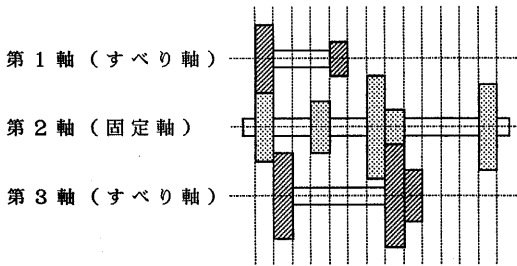


図4. 幾何的構造

#### 4.3.2 制約条件

##### 4.3.2.1 同時噛み合いの禁止条件<sup>[1]</sup>

互いに異なる歯車対は同時に噛み合っている状態から、すべり歯車をすべらせて他の1対の歯車を噛み合わせるときには、この歯車同士が接触する前にもとの歯車同士は完全に離れていなければならない。したがって、図5に示すような状態が生じることは許されない。

このことから必要十分条件として

$i \neq j$  のとき

$$d_i^{\pm} \leq d_j^{\pm} - 2 \quad \text{または} \quad d_j^{\pm} + 2 \leq d_i^{\pm}$$

(複号同順)

が導かれる。また、これによりこの設計においては  $d_i^{\pm}$  の母集合は0から  $2(N^{\pm} - 1)$  までの偶数と考えることができる(\*)。

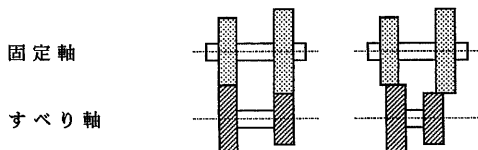


図5. 同時噛み合いの例

##### 4.3.2.2 歯車同士の衝突禁止条件<sup>[1]</sup>

固定歯車とすべり歯車は互いに干渉しあってはならない。すなわち図6に示すような、あるすべり歯車の可動範囲の中に衝突する可能性のある固定歯車が存在するようなことはあってはならない。

さて、その衝突の可能性であるが、第  $i$  番すべり歯車と第  $j$  番固定歯車は

$$|a_j| > |a_i|$$

のときに衝突の可能性がある。

また、すべり歯車の可動範囲は歯車の幅が単位幅であることを考慮すると

$$[s_i^{\pm}, s_i^{\pm} + 2N^{\pm} - 1]$$

(複号同順)

で与えられる。

ゆえに衝突の禁止条件は次のようになる。

$|a_j| > |a_i|$  のとき

$$s_i^{\pm} + 2N^{\pm} - 1 \leq f_j \quad \text{または} \quad f_j \leq s_i^{\pm} + 1$$

さらに、(1) から  $s_i^{\pm}$  を消去して整理するとこれは以下のように書き直される。

$j > i$  に対して

$|a_j| > |a_i|$  のとき

$$\begin{cases} f_j - f_i \geq 2N^- - d_i^- - 1 & (a_i < 0) \\ f_j - f_i \geq 2N^+ - d_i^+ - 1 & (a_i > 0) \end{cases}$$

$|a_j| < |a_i|$  のとき

$$\begin{cases} f_j - f_i \geq d_j^- + 1 & (a_j < 0) \\ f_j - f_i \geq d_j^+ + 1 & (a_j > 0) \end{cases} \quad (2)$$

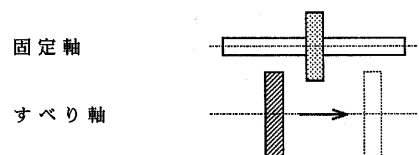


図6. 歯車同士の衝突

#### 4.4 3軸変速機構の全体幅 $W$

全体幅  $W$  は第1軸および第3軸のすべり歯車の可動範囲によって決定する<sup>[1]</sup>。これより次の関係式が得られる。

$$W = \max (s_{U\pm}^{\pm} + 2N^{\pm} - 1)$$

$$- \min (s_{L\pm}^{\pm})$$

(\*) この条件は必要条件ではない。

$$= \max (f_{U\pm} - d_{U\pm}^+ + 2N^{\pm} - 1) - \min (f_{L\pm} - d_{L\pm}^+) \quad (3)$$

ただし、

$L^- : a_i < 0$  となるような最小の  $i$

$L^+ : a_i > 0$  となるような最小の  $i$

$U^- : a_i < 0$  となるような最大の  $i$

$U^+ : a_i > 0$  となるような最大の  $i$

である。

#### 4.5 設計の手順

以上の議論をもとにここで3軸機構の設計手順について述べる。

[1] 与えられた  $\{a_i\}$  の要素集合から位相的構造  $\{a_i\}$  を生成する。これは要素の順列を作り出すことで行われる。なお鏡像を排除する場合には

$$|a_0| < |a_{N-1}|$$

という条件を付加すればよい。

[2] 各  $\{a_i\}$  に対して  $\{d^-\}_i$ 、 $\{d^+\}_i$  を割り当てる。

[3]  $\{f_i\}$  を決定する。このとき各  $f_i$  としては(2)を満足する最小値を選ぶようにする。拘束駆動の場合には共通歯車は  $a_i$  が正の場合と負の場合の両方に当てはまると考える。また、このとき

$$f_0 = 0$$

として一般性を失わない。

[4] 全体幅  $W$  を計算する。

[5] 全体幅  $W$  が最小となるような  $\{a_i\}$ 、 $\{d^-\}_i$ 、 $\{d^+\}_i$  の組を求める。

#### 4.6 設計例

$\{a_i\}$  の要素集合が

$\{1, 2, -3, 4, -5\}$

であるような3軸6段変速機構についての設計例を図7に示す。全体幅は10である。

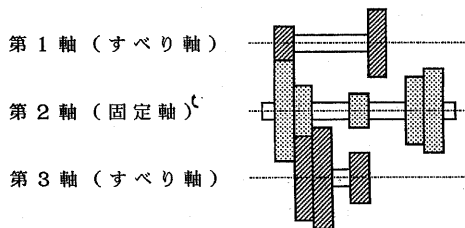


図7. 3軸変速機構の設計例

## 5. 構造全体の設計方法

### 5.1 設計の手順

構造全体の設計は以下の手順で行われる。

[1] 与えられた情報から各軸における歯車径を求める。このとき、固定軸上に互いに径の等しい歯車があれば、それを共通歯車として拘束駆動にする。

[2] 部分機構を生成する。ただし、このとき4.5で述べた手順の内[4]、[5]は行わない。

[3] 部分機構を組み合わせて、全体構造として評価を行う。

ここで問題となるのは[3]の部分機構の統合である。

部分機構の統合は、第3章からも分かるように、各々の部分機構のすべり軸を共通にすることによって行われる。このとき、制約となるのはそれぞれの部分機構間の歯車同士の干渉の禁止である。今、組み合わされる2つの部分機構を

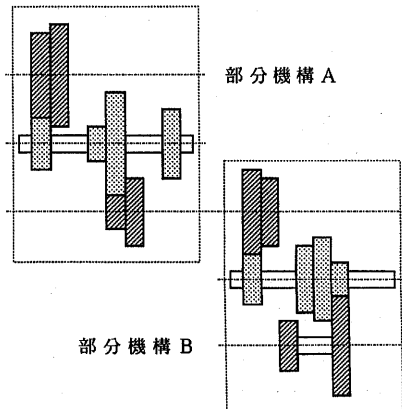
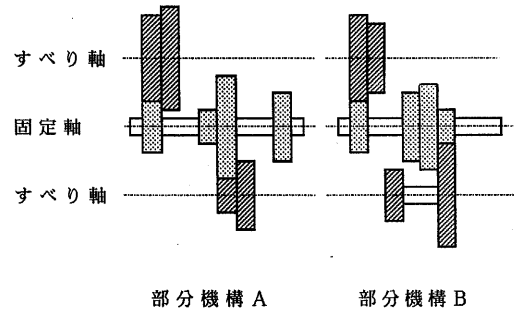


図8. 部分機構の統合

それぞれA、Bとすると考慮しなければならぬ歯車同士の組は次の3つである。

- Aの固定歯車とBのすべり歯車
- Aのすべり歯車とBのすべり歯車
- Aのすべり歯車とBの固定歯車

次節より、図8に示した例を用いて、それぞれの制約条件についての説明を行う。

### 5.2 Aの固定歯車とBのすべり歯車

Aの固定歯車とBのすべり歯車が互いに干渉しないためには干渉の可能性がある固定歯車がすべり歯車の可動範囲の中に存在しなければよい。干渉の可能性は軸間距離と歯車径によって判定できる。

さて、A、Bそれぞれの第0番固定歯車の位置座標を $f_A$ 、 $f_B$ とすると今決定しなければならない変数はそれらの差、

$$D = f_B - f_A$$

のみである。すなわち、干渉が生じないようにDの値を決定すればよいことになる。

図8の例の場合、Bの第0番すべり歯車はAの第0番(\*)、第2番、第3番と干渉の可能性がある。このすべり歯車の可動範囲は

$$[f_B, f_B + 3]$$

であるから、求めるDの範囲は

$$D \leq -3, D = 1, 8 \leq D$$

である。同様にして、Bの第1番すべり歯車の干渉の禁止条件から、

$$D \leq 0, 7 \leq D$$

が得られ、先の結果と合わせて

$$D \leq -3, 8 \leq D$$

が得られる。

### 5.3 Aのすべり歯車とBのすべり歯車

すべり歯車の可動範囲は互いに干渉しない。

したがって図8の例の場合、

$$A \text{の可動範囲: } [f_A + 4, f_A + 8]$$

$$B \text{の可動範囲: } [f_B, f_B + 4]$$

であるから、

$$D \leq 0, 8 \leq D$$

が得られる。

### 5.4 Aのすべり歯車とBの固定歯車

5.2と同様にする。図8の例の場合、Aの第2番すべり歯車は干渉の可能性なし、第3番すべり歯車はBの第1番(\*\*)、第2番すべり歯

車と干渉の可能性があって、その可動範囲は

$$[f_A + 5, f_A + 8]$$

であるから

$$D \leq 0, 5 \leq D$$

が得られる。

### 5.5 部分機構の統合

5.2から5.4の結果によりDの値の範囲を求め、その等号をとってDの値を決定する。

図8の例の場合Dの値は-3と8であるが、より最適な構造を与えるのは-3の場合である。それを図9に示す。全体幅はすべり歯車の可動範囲によって求められ、この場合は11である。

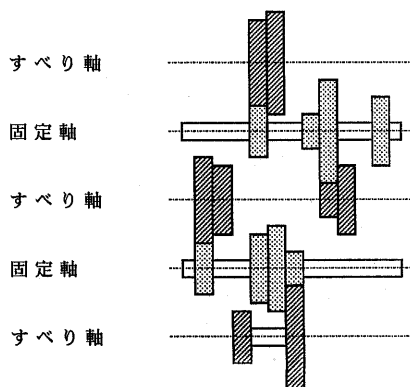


図9. 統合された機構

## 6. 並列処理

### 6.1 負荷分散過程

5.1で述べた手順の内、並列処理による処理の高速化が期待できるのは[2]の部分機構の生成および[3]の部分機構の統合である。

ここで[2]と[3]の負荷の大きさを比較すると、[3]では[2]で生成された部分機構の全組み合わせについて探索を行うことになり、また、1つ1つの組み合わせについてもその組み合わせ方を決定する作業の負荷が大きいと考えられるので、全体として[3]の負荷の方がはるかに大きくなると考えられる。そこで主として[3]の負荷分散を考えたプログラムを作成することにする。

### 6.2 並列処理プログラム

設計の手順は5.1で述べた通りであるが、

(\*) これはちょうど噛み合う歯車である。

部分機構への分割および部分機構の生成は逐次的に行う。機構全体がM個に分割されるとすると、1番目から(M-1)番目までに生成された部分構造は各部ごとにまとめて記憶される。最後のM番目の部分構造の1つ1つについてそれまでに記憶しておいた部分構造を合わせて1セットとして、それぞれについて最適な全体構造を求めさせて、最後にそれらの中から最も全体幅の小さいものを選び出す。これがプログラム作成に当たっての基本的な考え方である。なお最初の1番目の部分構造の生成において鏡像を排除すれば全体の鏡像を排除できる。それには位相的構造の生成の際に $|a_0| < |a_{N-1}|$ という条件を付ければよい。

上記の考え方にに基づき、4種類のプログラムを作成した。それぞれについて簡単に特徴を述べる。

• プログラム1 :

M番目の部分構造が1つ出来上がるごとにそれとそれまでに記憶されたデータをまとめて割り当てられたプロセッサにサイクリックに投げる。

• プログラム2 :

M番目の部分構造のデータではなく、位相的構造のデータを投げる。したがってM番目の部分構造は各プロセッサで作られることになる。割り付けはサイクリックである。

• プログラム3 :

M番目の位相的構造のデータ数を予め数えておいてプロセッサ1台あたりに割り当てるべきデータ数を計算し、その数だけまとめて投げる。したがってゴールを投げる作業は1台について1度で済む。

• プログラム4 :

プログラム2とほとんど同じだが、ゴールを投げるときに優先度を付ける。

なお、各プロセッサでは計算は全て逐次的に行われる。

6.3 実験結果

6.3.1 プログラム同士の比較

5軸の変速機構の設計問題を用いて、実験を行った。軸間距離はすべて1.0、公比 $10^{1/40}$ の等比級数的速度列で、変速段数は3段-2段-2段-3段の36段であり、各段における最小の速度比は1.0である。設計例および実験結果を

それぞれ図10、表1に示す。

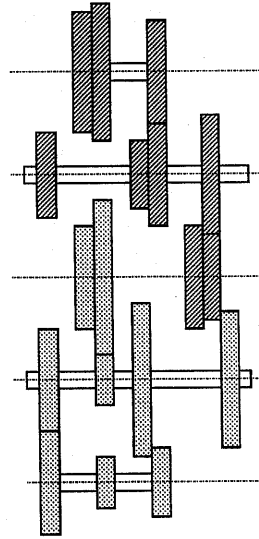


図10. 3-2-2-3段変速機構

台数	1	2	4	8	12	16
実行時間 (秒)						
プログラム1	1325.1	835.7	512.0	357.5	310.1	284.4
プログラム2	1295.0	660.8	377.4	281.6	137.0	125.5
プログラム3	1293.3	667.1	342.2	195.8	136.8	138.6
プログラム4	1291.1	672.4	360.8	198.6	143.2	147.6
台数効果						
プログラム1	1	1.6	2.6	3.7	4.3	4.7
プログラム2	1	1.9	3.4	4.6	9.5	10.3
プログラム3	1	1.9	3.8	6.6	9.5	9.3
プログラム4	1	1.9	3.6	6.5	9.0	8.7
台数効果率 (%)						
プログラム1	100	79.3	64.7	46.3	35.6	29.1
プログラム2	100	98.0	85.8	57.5	78.8	64.5
プログラム3	100	96.9	94.5	82.6	78.8	58.3
プログラム4	100	96.0	89.5	81.3	75.1	54.7

表1. プログラム同士の比較

これより、プログラム3が最も優れているものと考えられる。そこで今度はプログラム3について設計仕様による台数効果の比較を行う。

### 6.3.2 設計仕様による台数効果の比較

設計仕様として以下の4つを考える。いずれも軸間距離はすべて1.0、公比 $10^{1/40}$ の等比級数的速度列である。

a : 2段 - 2段 - 2段 - 2段

b : 3段 - 2段 - 2段 - 2段

c : 2段 - 2段 - 2段 - 3段

d : 3段 - 2段 - 2段 - 3段

なお探索空間は、a、b、c、dそれぞれについて576、7800、7510、99343である。結果をグラフとして図11に示す。

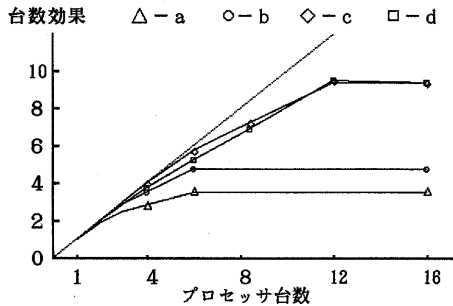


図11. 設計仕様による台数効果の比較

### 6.4 考察

プログラム1とそれ以外のものとの間には歴然とした差が見られる。このことにより、負荷分散はより上流の過程で行われることが望ましいということが確かめられた。

また、設計仕様、すなわち問題の性質による台数効果の違いについてであるが、問題規模の大きいdと問題規模としては十分の一以下のcについて同程度の台数効果が得られている。これは台数効果が問題の分割数に大きく依存しているためだと考えられる。つまり、cとdの場合には第4軸の固定歯車の数はいずれも4であり、位相的構造は24通りである。これに対してaとbでは第4軸の固定歯車の数は3で位相的構造は6通りである。したがってbでは問題規模はcよりも多少大きいですが、台数効果はそれほどでもない。なお、プロセッサ台数が位相的構

造数の約数でない場合には台数効果はそれほど期待できない。

### 7. 結論および問題点

多軸多段歯車変速機構の設計方法を示し、その並列処理について検討を行った。

この変速機構は2軸もしくは3軸からなる部分構造に分割され、まず、個々の部分構造の設計を行い、その統合過程を並列化することにより処理の高速化を図ることができた。この問題の場合、規模が同じ程度の問題に分散されるので負荷分散の方法としては単純なサイクリックで十分であった。

なお、本文では触れなかったが、4つのプログラムのうちプログラム2については処理時間がそのたびごとに大きくバラつくという現象がみられたが、この原因は未だに不明である。

### 8. 謝辞

本研究にあたり多くの助言をいただいたICOT第4研究室の川岸太郎氏、第7研究室の市吉伸行氏に感謝いたします。

### [参考文献]

1. 沢田浩之：2軸多段歯車変速機構の最適設計アルゴリズム，信学技報COMP90-40，pp.87-95，1990。
2. 堀内英一：歯車変速機構の構造設計問題 - 設計問題に対する制約問題解決に基づくアプローチ：拡張版 -，1990。
3. 岡本定次：増補版 工作機械の構成，内田老鶴圃，1977。
4. 新世代コンピュータ技術開発機構：KL1プログラミング，1989。