ソフトウェア基礎論　38－6
プログラミング言語　28－6
（1991．3．8）

近似正規形に基づく項書換え系の unfold/fold 変換

田中義憲　　直井徹　　稲垣康善

名古屋大学工学部

近似正規形の概念に基づいて定式化される無限書換えの極限を利用して、項書換え系プログラムの等価性を定め、その上で unfold/fold 変換について議論する。すなわち、「展開／畳み込み」、「具体化」、「法則の適用」、「削除」といった各変換操作を定式化し、それらの組み合わせとして行なわれる変換の正当性についてその十分条件を与える。また、外山は、同様な結果を項書換え系の到達可能性を前提条件として導いたが、本論文では、項書換え系の階層性を定式化して利用することにより、この前提条件を弱めて議論する。

Unfold/fold Transformations of Term Rewriting Systems Based on Approximate Normal Forms

Yoshinori TANAKA　　Tohru NAOI　　Yasuyoshi INAGAKI

Faculty of Engineering, Nagoya University

In this paper, we give sufficient conditions which ensure the correctness of transformations, unfolding, folding, instantiation, laws, and elimination, applied to term rewriting systems, where the equivarence of programs is formulated through the limit of infinite rewriting based on approximate normal forms. A part of our results parallels to ones by Toyama, which has been obtained using the notion of reachability of finite rewriting.

1 はじめに

計算機を援用したソフトウェア開発を高い形式性の裏付けの下に行なうことは計算機科学の重要な目標であり、その基礎となる手法としてプログラム変換は、最も有力なものの一つと考えられる。

本研究では、Burstall-Darlington[2] によって提案された関数型プログラムの unfold/fold 変換を項書換え系に適用する場合について議論する。

本論文の結果に関連する成果としては、再帰プログラム図式を対象にした Kott[6] によるもの、また、項書換え系を対象とし有限な書換えによる到達可能性の観点から変換を扱った Toyama[3]、二木 [5] の結果、さらに、無限書換えの極限の観点に基づく著者らの以前の結果 [9] が挙げられる。

本論文は、[9] と同様に極限の観点を採用するが、さらに議論を精密にして、[9] で扱った「展開／畳み込み」操作の他に「具体化」、「削除」、「法則の適用」操作についても論じてゆく。特に、「法則の適用」については、「法則」を「プログラムとは独立に与えられた組み込み関数の性質」として扱う Kott の立場、また「到達可能性に裏付けされた帰納的定理」として扱う Toyama、二木の立場に対し、本論文では、「極限概念を用いた連続的定理」として扱う。さらに、項書換え系の階層性の概念を用いて、「削除」以外の変換操作によって得られた新しい書換え規則を追加するときの正当性を議論する。

2 準備

2.1 項書換え系

項書換え系に関する基本的な概念および表記法については、文献 [1] などを参照されたい。

F を関数記号の集合とし、X を変数記号の集合とする。これらの記号を用いて作られる項の全体を $T(F,\ X)$ で表す。とくに、$T(F,\ \phi)$ の要素を基底項という。

項書換え系は左辺，右辺と呼ばれる項の対の集合で，各々の項の対は書換え規則と呼ばれる。項書換え系 R のある規則の左辺が、項 t 全体にマッチするとき、t を (R の) リデックスといい、その全てからなる集合を Red_R で表す。

項書換え系 R による書換え関係と、その反射推移閉包および反射推移対称閉包をそれぞれ $\rightarrow_R$、$\xrightarrow{*}_R$、$\xleftrightarrow{*}_R$ で表す。

R の任意の 2 つの書換え規則に対して，一方の左辺が他方の左辺の変数以外の部分項と単一化可能でないとき、R は無曖昧であるという。ただし，自分自身との自明な単一化を除く。また、R の書換え規則の左辺に同一の変数が 2 回以上出現しないとき、R は線形であるという。

集合 F が D と C とに分割され、さらに、R の各規則の左辺 $f(t_1,\ \ldots,\ t_n)$ について $f \in D$、$t_1,\ \ldots,\ t_n \in T(C,\ X)$ となるとき、R を構成子をもつ系という。このとき、D の要素を被定義関数記号といい、また、$T(C,\ X)$ の要素を構成子項という。

値域が $T(C,\ X)$ の部分集合である代入を基底代入という。同様に値域が $T(C,\ \phi)$ の部分集合である代入を構成子基底代入という。構成子基底代入の全てからなる集合を Σ と表す。さらに、Σ の各要素の定義域を S に制限して考えるとき、$\Sigma|_S$ と表す。

被定義関数記号 $f : \alpha_1 \ldots \alpha_n \rightarrow \beta$ に関して項書換え系 R が完全であるとは、全ての構成子基底項 $t_1,\ \ldots,\ t_n$ に対し、$f(t_1,\ \ldots,\ t_n)$ がリデックスになることである。また、項書換え系 R が全ての被定義関数記号に関して完全であるとき、単に完全であるという。

$Func(R)$ は項書換え系 R に現れる関数記号の集合、$func(t)$ は項 t に現れる関数記号の集合、$Right(R)$ は項書換え系 R の右辺の集合、$Occ_{DefFunc}(R,\ t)$ は項 t に現れる R の被定義関数記号の出現の集合をそれぞれ表す。

以後の議論では、構成子をもつ系になっている無曖昧線形かつ完全な項書換え系を対象とする。

2.2 書換えの極限

項 t が部分項としてリデックスをもち、それに対して書換えを進めることでやがて t 全体がリデックスとなり得るとき、t を (R の) リデックスの候補といい、その全てからなる集合を $Cand_R$ で表す ([7,8] 参照)。$Cand_R$ は、次のように定義される。

(1) $t \in Red_R \Longrightarrow t \in Cand_R$

(2) $t, s \in Cand_R, p \in occ(t) \Longrightarrow t[p \leftarrow s] \in Cand_R$

ここで、項の間の順序関係 $\sqsubseteq$ を次のように定義する。すなわち、項 t の適当な部分を特別な定数記号 Ω (「未定義」を表す) で置き換えて項 s が得られるとき、$s \sqsubseteq t$。

そして、Red_R の Scott 位相における閉包 Red_R^- を次のように定義する。$Red'_R = \{\, s \mid \exists S \in Red_R\ s \sqsubseteq S \,\}$ とすると、$Red_R^- = \{\, \sqcup\Delta \mid \Delta は Red'_R の有向部分集合 \,\}$。ここで、$\sqcup$ は最小上界を表す。また同様

に定義された、$Cand_R$ の Scott 位相における閉包を $Cand_R^-$ で表す。

さらに、項 t が部分項として $Cand_R^-$ の要素をもつとき、それらのうちで最も外側のものを、Ω で置き換えて得られる項を t の直接近似正規形といい、$\omega_R(t)$ で表す。また、$\omega_R(t) = t$ を満たす項 t を近似正規形といい、そしてその全てからなる集合を ANF_R とする。

【定義 2.1】R に関する項 t の表示 $V_R(t)$ を次のように定める。

$$V_R(t) = \sqcup\{\ \omega_R(s) \mid t \xrightarrow{*}_R s\ \}$$

□

$V_R(t)$ は、R を用いたときの項 t による評価結果を表している。評価が停止するときにはそのときに得られる項 (t の正規形) を与え、また、停止しないときは無限の評価過程の極限として得られる無限木 (無限項) を与える。V_R を用いて関数記号の解釈を定める立場を代数的意味論 [7,8] という。

3 項書換え系の階層化

本節では、項書換え系の階層化について議論する。ここで示す結果は、4.4節での等価変換定理の証明に用いられる。

【定義 3.1】項書換え系 R の部分集合 R_1、R_2 と基底項 $t \in T(Func(R) \cup \Omega,\ \phi)$ に対して、

(1) $DefFunc(R_1) \cap Func(R_2) = \phi$

(2) $\forall t' \in Right(R_1) \forall p_1, p_2 \in Occ_{DefFunc}(R_1,\ t')\ \ p_1 | p_2$

(3) $\forall t' \in Right(R_1) \forall p \in Occ_{DefFunc}(R_1,\ t'),$ $\forall q \in Occ_{DefFunc}(R_2,\ t')\ \ p \not\leq q$

(4) $\forall p_1, p_2 \in Occ_{DefFunc}(R_1,\ t)\ \ p_1 | p_2$

(5) $\forall p \in Occ_{DefFunc}(R_1,\ t), \forall q \in Occ_{DefFunc}(R_2,\ t)\ \ p \not\leq q$

が成り立つとき、項書換え系 R_1、R_2 と項 t が (R_1 を R_2 の上位階層として) 階層化条件を満たすという。□

【定理 3.1】(階層化定理) 項書換え系 R の部分集合 R_1、R_2 と基底項 $t \in T(Func(R) \cup \Omega,\ \phi)$ が階層化条件を満たすならば、$V_R(t) = V_{R_2}(V_{R_1}(t))$ である。

【証明】付録参照。□

階層化条件が満たされるとき、この定理により、R 全体による書換えは、R_1 と R_2 を別個に用いた書換えへと階層化される。

【例 3.1】

$$\begin{aligned} R = \{\ & mult(0,\ x) = 0,\\ & mult(s(x),\ y) = add(y,\ mult(x,\ y)),\\ & add(0,\ x) = x,\\ & add(s(x),\ y) = s(add(x,\ y))\ \} \end{aligned}$$

と項 $mult(s(s(0)),\ s(0))$ が与えられたとき、

$$\begin{aligned} R_1 = \{\ & mult(0,\ x) = 0,\\ & mult(s(x),\ y) = add(y,\ mult(x,\ y))\ \}\\ R_2 = \{\ & add(0,\ x) = x,\\ & add(s(x),\ y) = s(add(x,\ y))\ \} \end{aligned}$$

とすれば、階層化条件を満たし、

$$\begin{aligned} & V_{R_2}(V_{R_1}(mult(s(s(0)),\ s(0))))\\ & \quad = V_{R_2}(add(s(0), add(s(0), 0)))\\ & \quad = s(s(0))\\ & V_R(mult(s(s(0)), s(0)))\\ & \quad = s(s(0)) \end{aligned}$$

であるので、階層化計算が成功している。

また、項 $mult(add(s(s(0)),\ s(0)),\ s(0))$ のときには、階層化条件の条件 (5) が満たされず、実際に、

$$\begin{aligned} & V_{R_2}(V_{R_1}(mult(add(s(s(0)),\ s(0)),\ s(0))))\\ & \quad = V_{R_1}(mult(add(s(s(0)),\ s(0)),\ s(0)))\\ & \quad = mult(s(s(s(0))),\ s(0))\\ & V_R(mult(add(s(s(0)),\ s(0)),\ s(0)))\\ & \quad = s(s(s(0))) \end{aligned}$$

である。□

4 等価変換

4.1 意味論とプログラムの等価性

【定義 4.1】項書換え系 R と項 t からなる二項組 $< R,\ t >$ をプログラムという。□

【定義 4.2】変数の集合 $S \supseteq var(t)$ があたえられたとき、

$\Delta^S(< R,\ t >) = \{\ < \sigma,\ V_R(\sigma(t)) > \ \mid \sigma \in \Sigma|_S\ \}$

をプログラム $< R,\ t >$ の (入力変数集合 S に対する) 意味という。また、プログラム $< R,\ t >$ と $< R',\ t' >$ が入力変数集合 S の下で等価であるとは、

$$\Delta^S(< R,\ t >) = \Delta^S(< R',\ t' >)$$

が成り立つことと定義し、$< R, t > =_{\Delta^S} < R', t' >$ と表す。□

この定義では、プログラムの入出力関係をプログラムの意味と捉えることになる。

【例 4.1】$R = \{\ add(s(x),\ y) = s(add(x,\ y)),$ $add(0,\ y) = y\ \}$、$t = add(x,\ s(y))$ と $R' = \{\ add($

$x,\ s(y)) = s(add(x,\ y),\ add(x,\ 0) = x\ \}$、$t' = s(add(x, y))$ があったとき、$S = \{ x, y \}$ すると、$< R,\ t > =_{\Delta^S} < R',\ t' >$ である。□

特に R を固定して t と t' の等価性を論じるときのために、次の関係を定義しておく。

$$t =_{\Delta^S_R} t' \iff < R,\ t > =_{\Delta_R} < R,\ t' >$$

【 例 4.2 】 $R = \{\ add(s(x),\ y) = s(add(x,\ y),\ add(0,\ y) = y\}$、$t = add(x,\ s(y))$、$t' = s(add(x,\ y))$ すると、$t \simeq_{\Delta^S_R} t'$ である。□

以下、$=_{\Delta^S}$ の性質について述べる。

【 命題 4.1 】 $\exists S \supseteq var(t) \cup var(t')\quad < R, t > =_{\Delta^S} < R',\ t' >$ ならば、$\forall S' \supseteq var(t) \cup var(t')\quad < R,\ t > =_{\Delta^{S'}} < R',\ t' >$ である。

【 証明 】自明。□

すなわち、与えられた入力変数集合に対してプログラムの意味が互いに等価であるとき、入力変数集合をそれ以上に拡張しても等価性は変わらない。逆に、与えられた入力変数集合に対して意味が互いに等価であるとき、入力変数集合の縮小の度合について等価性を保ち得る下限が存在する。

以後、単に $< R,\ t > =_{\Delta^S} < R',\ t' >$ や $t \simeq_{\Delta^S_R} t'$ と書いたとき、$S \supseteq var(t) \cup var(t')$ であるものとする。

【 命題 4.2 】 $< R,\ t > =_{\Delta^S} < R',\ t' >$ かつ $S' \supseteq var(\sigma(t)) \cup var(\sigma(t'))$ ならば、$\forall\sigma\quad < R,\ \sigma(t) > =_{\Delta^{S'}} < R',\ \sigma(t') >$ である。

【証明】まず、$\forall\sigma\,\forall\sigma' \in \Sigma|_{S'}\ \exists\sigma'' \in \Sigma|_S\ \ \sigma'(\sigma(t)) = \sigma''(t)\ \&\ \sigma'(\sigma(t')) = \sigma''(t')$ が成り立つ。このとき、それぞれの式の両辺に V_R、$V_{R'}$ を適用すると、$V_R(\sigma'(\sigma(t))) = V_R(\sigma''(t))\ \&\ V_{R'}(\sigma'(\sigma(t'))) = V_{R'}(\sigma''(t'))$ となる。また、仮定より、$V_R(\sigma''(t)) = V_{R'}(\sigma''(t'))$ であるので、$\forall\sigma\,\forall\sigma' \in \Sigma|_{S'}\ \ V_R(\sigma'(\sigma(t))) = V_{R'}(\sigma'(\sigma(t')))$ が成り立つ。□

一般に $=_{\Delta^S}$ そのものは代入に関して保存されるとは限らないが、上の命題によって代入後も適当な入力変数集合のもとで等価性の成立が保証される。また、$\simeq_{\Delta^S_R}$ についても、明らかに上の二命題と同様な性質が成り立つ。

次に、$\overset{*}{\underset{R}{\leftrightarrow}}$ と $\simeq_{\Delta^S_R}$ の間の関係について考える。

【 補題 4.1 】 $t \simeq_{\Delta^S_R} t'$ かつ $t' \simeq_{\Delta^{S'}_R} t''$ であるならば、$t \simeq_{\Delta^{S \cup S'}_R} t' \simeq_{\Delta^{S \cup S'}_R} t''$ かつ $t \simeq_{\Delta^{S \cup S'}_R} t''$ かつ $t \simeq_{\Delta^{var(t) \cup var(t'')}_R} t''$ である。

【 証明 】定義 4.7 と定理 4.1 より導かれる。□

$\simeq_{\Delta_R}$ は適当な入力変数集合の下で推移性を示す。

【 補題 4.2 】 $t \underset{R}{\leftrightarrow} t'$ ならば $t \simeq_{\Delta^S_R} t'$ である。

【 証明 】 $t \underset{R}{\leftrightarrow} t'$ ならば $V_R(t) = V_R(t')$ であることから導かれる。□

【 定理 4.1 】 $t \overset{*}{\underset{R}{\leftrightarrow}} t'$ ならば $t \simeq_{\Delta^S_R} t'$ である。

【 証明 】補題 4.1 と補題 4.2 より導かれる。□

一般に定理 4.1 の逆は成り立たない。

4.2 「具体化」の定式化

unfold/fold 変換は、「展開／畳み込み」、「具体化」や「法則の適用」といった操作の系列として定式化される。まず、具体化から定式化していく。

集合 $P \subseteq T(C,\ X)$ が

(1) $\forall t \in T(C(\alpha),\ X)\exists p \in P\exists\sigma\quad t = \sigma(p)$

(2) $\forall p_1, p_2 \in P\quad p_1\ and\ p_2\ are\ unifiable$

を満たすとき、P を素片集合といい、P の要素を素片という。ここで条件 (1) より、任意の素片が線形項であることに注意されたい。

P_1、…、P_n をそれぞれ素片集合とするとき、

$$P = P_1 \times \cdots \times P_n$$

を素片積集合といい、その要素 $p = < p_1,\ \ldots,\ p_n >$ を素片積という。ただし、

$$\forall p \in P \forall i, j\quad var(p_i) \cap var(p_j) = \phi$$

であるとする。

【 定義 4.3 】項 t の変数 x_1、…、x_n に妥当な素片積 $p = < p_1,\ \ldots,\ p_m >$ を代入することを項 t の変数 x_1、…、x_n を素片積 p で具体化するといい、

$$E_p(t) = t[p_1/x_1,\ \ldots,\ p_m/x_n]$$

と定義する。□

具体化は、変換の対象とする項が正規形であるときに、とくに有効な手段である。

【 例 4.3 】例えば、

$$\begin{aligned} R = \{\ & intlist(0) = nil, \\ & intlist(s(x)) = cons(s(x), intlist(x)), \\ & sum(nil) = 0, \\ & sum(cons(x,\ y)) = add(x,\ sum(y))\ \} \end{aligned}$$

という項書換え系のもとで、正規形 $sum(intlist(x))$ に対して、$sum(intlist(0))$、$sum(intlist(s(x)))$ というように具体化すると書換えが可能になる。このとき、素片積集合は $\{\ 0,\ s(x)\ \}$ である。□

次の定理は、具体化操作を行なう場合にその正当性を保証するための十分条件を示す。

【 定理 4.2 】項 t に対して、妥当な素片積集合を P とし、任意の $p \in P$ に対して $S_p \supseteq var(E_p(t)) \cup$

$var(E_p(t'))$ とするとき、$\forall p \in P \ \ < R,\ E_p(t) > =_{\Delta^{S_p}} < R',\ E_p(t') >$ と $< R,\ t > =_{\Delta^S} < R',\ t' >$ は互いに必要十分である。

【 証明 】第 *1* の条件は、

$$\forall p \in P \forall \sigma' \in \Sigma|_{S_p}\ \ V_R(\sigma'(E_p(t))) = V_R(\sigma'(E_p(t')))$$

と書ける。ここで、$\sigma = \sigma' \circ E_p$、$S \supseteq var(t) \cup var(t')$ とおけば、

$$\{\ \sigma \mid \exists p \in P\ \sigma = \sigma' \circ E_p,\ \sigma' \in \Sigma|_{S_p}\ \} = \Sigma|_S$$

であるので、

$$\forall \sigma \in \Sigma|_S\ \ V_R(\sigma(t)) = V_{R'}(\sigma(t'))$$

すなわち、第 *2* の条件が成り立つ。また、逆は定理4.2より明らか。 □

4.3 「法則の適用」の定式化

【 定義 4.4 】 $t,\ t' \in T(Func(R), X)$ であるとき、2 項組 $< t,\ t' >$ を R に関する法則という。これが $t \simeq_{\Delta^S_R} t'$ を満たすとき、R に関する正当な法則という。 □

以後、法則と言えば正当なものを指すこととする。

【 定義 4.5 】項書換え系 R に関する法則の集合を L_R と表し、これに属する法則の適用（書換え規則と同様な書換え）によって項 t が t' になったことを $t \underset{L_R}{\rightarrow} t'$ と表す。また、$(\underset{R}{\leftrightarrow} \cup \underset{L_R}{\leftrightarrow})^*$ を $\overset{*}{\underset{R,\,L_R}{\leftrightarrow}}$ と表す。 □

変換過程において法則を適用したとき、当然のことながら意味が保存されてなくてはならない。

【 補題 4.3 】 $t \underset{L_R}{\leftrightarrow} t'$ ならば $t \simeq_{\Delta^S_R} t'$ である。

【 証明 】適用した法則を $t_0 = t'_0$、項 t、t' をそれぞれ、$t = s[\theta(t_0)]$、$t' = s[\theta(t'_0)]$ とおくと、

$$\begin{aligned} \forall \sigma\ \ V_R(\sigma(t)) &= V_R(\sigma(s[\theta(t_0)])) \\ &= V_R(V_R(\sigma(s))[V_R(\sigma(\theta(t_0)))]) \end{aligned}$$

であり、また、

$$\begin{aligned} \forall \sigma\ \ V_R(\sigma(t')) &= V_R(\sigma(s[\theta(t'_0)])) \\ &= V_R(V_R(\sigma(s))[V_R(\sigma(\theta(t'_0)))]) \end{aligned}$$

である。ここで、$S = var(t) \cup var(t')$ おくと定義4.1 より $t_0 \simeq_{\Delta^S_R} t'_0$ であることから、

$$\forall \sigma \in \Sigma|_S\ \ V_R(\sigma(\theta(t_0))) = V_R(\sigma(\theta(t'_0)))$$

が成り立つので、

$$\forall \sigma \in \Sigma|_S\ \ V_R(\sigma(t)) = V_R(\sigma(t'))$$

となる。ゆえに、$t \simeq_{\Delta^S_R} t'$ が成り立つ。 □

【 定理 4.3 】 $t \overset{*}{\underset{R,\,L_R}{\leftrightarrow}} t'$ ならば $t \simeq_{\Delta^S_R} t'$ である。

【 証明 】補題4.1、補題4.2、補題4.3、そして定義4.2 より導かれる。 □

4.4 等価変換定理

【 定義 4.6 】項書換え系 R と項 t に対し、具体化変数を x、素片積集合を P、R に関する法則の集合を L_R としたとき、P の任意の要素 p に対して項 s_p が存在して、

(1) $\omega_R(E_p(t)) = \Omega$

(2) $\omega_R(s_p) \neq \Omega$

(3) $E_p(t) \overset{*}{\underset{R,\,L_R}{\leftrightarrow}} s_p$

であり、さらにこれらの両辺の $\sigma(t)$ の形になっている部分項を新しい関数記号を f、t に現れる変数の並びを $\vec{x}$ として $\sigma(f(\vec{x}))$ で置き換えたものを $E_p(f(\vec{x}))$、s'_p として、

$$R' = \{\ E_p(f(\vec{x})) \rightarrow s'_p \mid p \in P\ \}$$

とおいたとき、

(4) R' は停止性を満たす

(5) $\forall t' \in Right(R') \forall p_1, p_2 \in Occ_{DefFunc}(R', t')\ \ p_1 | p_2$

(6) $\forall t' \in Right(R') \forall p \in Occ_{DefFunc}(R', t')$, $\forall q \in Occ_{DefFunc} R,\ t')\ \ p \not\leq q$

が成り立つならば、項書換え系 R、項 t、素片積集合 P に対して、上位項書換え系 R' が得られたという。 □

ここで、R' は線形かつ無曖昧であり、さらに完全な構成子をもつ系になっていることに注意する。

【 定理 4.4 】項書換え系 R、項 t、素片積集合 P に対して、上位項書換え系 R' が得られたとき、

$$< R,\ t > =_\Delta < R + R',\ f(\vec{x}) >$$

である。

【 証明 】 $R'' = \{\ E_p(t) \rightarrow s_p \mid p \in P\ \}$、$S \supseteq var(E_p(f(\vec{x})))$、$\sigma \in \Sigma|_S$ とおくと、条件 (1)、(2) より、$V_{R'}(\sigma(E_p(f(\vec{x})))) = V_{R''}(\sigma(E_p(t)))$ であり、さらに、条件 (3) より R' が停止性を満たすことから、$NF_{R'}(\sigma(E_p(f(\vec{x})))) = NF_{R''}(\sigma(E_p(t)))$ であることが容易に導ける。つまり、

$$\sigma(E_p(t)) \overset{*}{\underset{R,\,L_R}{\leftrightarrow}} NF_{R'}(\sigma(E_p(f(\vec{x}))))$$

である。よって、定理 4.3より、

$$V_R(\sigma(E_p(t))) = V_R(NF_{R'}(\sigma(E_p(f(\vec{x})))))$$

である。ここで、条件 (4)、条件 (5) より R'、R、$\sigma(f(\vec{x}))$ は階層化条件を満たすので、定理 3.1より、

$$V_R(NF_{R'}(\sigma(E_p(f(\vec{x}))))) = V_{R+R'}(\sigma(E_p(f(\vec{x}))))$$

である。つまり、

$$V_{R+R'}(\sigma(E_p(f(\vec{x})))) = V_R(\sigma(E_p(t)))$$

である。これが、任意の $p \in P$ について成り立つことから、定理 4.2より、本定理が得られる。 □

【 例 4.4 】 $R = \{\ intlist(0) = nil,$
$intlist(s(x)) = cons(s(x), intlist(x)),$
$sum(nil) = 0,$
$sum(cons(x,\ y)) = add(x,\ sum(y)),$
$add(s(x),\ y) = add(x,\ s(y)),$
$add(0,\ y) = y\ \}$
この項書換え系と項 $sum(intlist(x))$ の対に対して、$P = \{\ 0,\ s(x)\ \}$、$L_R = \{\ add(s(x),\ y) = s(add(x,\ s(y)))\ \}$ とすると、

$$\begin{aligned} R'' = \{\ & sum(intlist(0)) = 0, \\ & sum(intlist(s(x))) \\ & \quad = s(add(x,\ sum(intlist(x))))\ \} \end{aligned}$$

が得られる。ここで、$sum(intlist(x))$ を新しい関数記号 $intsum(x)$ に置き換えて、

$$\begin{aligned} R' = \{\ & intsum(0) = 0, \\ & intsum(s(x)) = s(add(x,\ intsum(x)))\ \} \end{aligned}$$

を得る。このとき、定理 4.4より、

$$\begin{aligned} R' = \{\ & intlist(0) = nil, \\ & intlist(s(x)) = cons(s(x), intlist(x)), \\ & sum(nil) = 0, \\ & sum(cons(x,\ y)) = add(x,\ sum(y)), \\ & add(s(x),\ y) = add(x,\ s(y)), \\ & add(0,\ y) = y \\ & intsum(0) = 0, \\ & intsum(s(x)) = add(s(x),\ intsum(x))\ \} \end{aligned}$$

を得る。 □

4.5 「削除」の定式化

前節までは、各変換規則の適用によって得た新たな規則を追加することに関する議論であった。本節では、プログラムの等価性を保存しながら書換え規則を削除することを考える。

【 定義 4.7 】 項書換え系 R と関数記号 f が与えられたとき、

$$dd_R(f) = DefFunc(R) \cap (Func(Right(R/f)) - \{f\})$$

のように定義される集合 $dd_R(f)$ を関数記号 f の直接依存といい、

$$\begin{aligned} d_R(f) &= \phi \text{ if } dd_R(f) = \phi \\ &= dd_R(f) \cup \textstyle\bigcup_{g \in dd_R(f)} d_R(g) \text{ otherwise} \end{aligned}$$

のように定義される集合 $d_R(f)$ を関数記号 f の依存という。また、項 t の依存を $D_R(t) = DefFunc(R) \cap func(t) \cup \bigcup_{f \in DefFunc(R) \cap func(t)} d_R(f)$ と定義する。ここで、R/f は項書換え系 R の部分集合で関数記号 f を左辺の根にもつすべての書換え規則の集合である。 □

【 定理 4.5 】 $< R,\ t > =_\Delta < \bigcup_{f \in D_R(t)} R/f,\ t >$ であり、$\bigcup_{f \in D_R(t)} R/f$ は基底項 $\sigma(t)$ を書換えるために十分な書換え規則をもち、かつ、完全なもののうちでは最小である。

【略証】 σ を構成子基底代入とするとき、$D_R(t)$ は、項 $\sigma(t)$ を書換えていく際に発生し得る被定義関数記号の集合である。よって、項 $\sigma(t)$ を書換えるためには、$D_R(t)$ に含まれているすべての関数記号に関して完全な書換え規則が必要であり、逆にそれだけあれば十分であるということになる。 □ □

$\bigcup_{f \in D_R(t)} R/f$ を求めるアルゴリズムは定義 4.7より容易に導かれる。

【 例 4.5 】 項書換え系

$$\begin{aligned} R = \{\ & add(0,\ X) \to X, \\ & add(s(X),\ Y) \to s(add(X,\ Y)), \\ & fib(0) \to s(0), \\ & fib(s(0)) \to s(0), \\ & fib(s(s(X))) \to add(fib(s(X)),\ fib(X)), \\ & if(true,\ x,\ y) \to x, \\ & if(false,\ x,\ y) \to y\ \} \end{aligned}$$

と項 $t = fib(x)$ から、$D_R(t) = \{\ add,\ fib\ \}$ となるので、

$$\begin{aligned} \textstyle\bigcup_{f \in D_R(t)} R/f = \{\ & add(0,\ X) \to X, \\ & add(s(X),\ Y) \to s(add(X,\ Y)), \\ & fib(0) \to s(0), \\ & fib(s(0)) \to s(0), \\ & fib(s(s(X))) \to add(fib(s(X)),\ fib(X))\ \} \end{aligned}$$

が得られる。この例では、関数記号 if に関する書換え規則が不要であり削除された。 □

5 まとめ

近似正規形の概念に基づいて定式化される無限書換えの極限を利用し、項書換え系プログラム等価性

を定め、さらに、unfold/fold 変換の「展開／畳み込み」、「具体化」、「法則の適用」、「削除」といった操作を定式化し、それらの組合せとして行なわれる変換の正当性についての十分条件を項書換え系の階層化という概念を用いて与えた。

6 今後の課題

等価変換定理では、新しく得られた上位の項書換え系が停止性を満たすことを条件にしていたが、これを満たさない場合にも拡張を試みる。

また、「定義」など今回扱わなかった操作に対応することも今後の課題である。

謝辞

御討論頂いた坂部俊樹助教授、平田富夫助教授、外山勝彦中京大講師、杉野花津江助手、酒井正彦助手、結縁祥治助手をはじめとする研究室の皆様に感謝致します。尚、本研究は一部文部省科研費 (奨励 (A)0275 0260) の補助を受けた。

参考文献

[1] Huet,G.:“Confluent Reductions:Abstract properties and applications to term rewriting systems”, JACM,Vol.27, No.4(1980), 797-821.

[2] Burstall, R., Darlington, j.:A transformation system for developping recursive programs. J. Assoc. Comput Mach. 24, 1, 46-67(1977).

[3] Toyama, Y.:“How to Prove Equivalence of Term Rewriting Systems without Induction”, 8th Int.Conf.on Automated Deduction(1986).

[4] 外山:“項書き換えシステムの可換性について”, 信学論 J66-D, 12, pp.1370- 1375(1988).

[5] 二木:“等式プログラムの等価変換”, プログラム変換（共立出版）, 17−37.

[6] Kott, L:“Unfold/fold Program Transfomation”, in:“Algebraic methods in semantics”, Eds. M.Nivat and J.C.Raymonds, Cambridge Univ. Press(1985), 411-434

[7] 直井、稲垣:“代数的意味論に基づく項書換えシステムの等価変換について”, 昭和 61 年度電気関係学会東海支部連合大会, 1440.

[8] 直井、稲垣:“項書換え系の意味論と自由連続代数”, 電子情報通信学会論文誌, J71−D 巻, 6 号, 942−949, 昭和 63 年 6 月.

[9] 田中、直井、稲垣:“代数的意味論に基づく項書換え系の等価変換手続き”, 日本ソフトウェア科学会第 6 回大会, 213−216, 平成元年 3 月.

付録〜 階層化定理の導出

この節では、定理 3.1の証明を厳密に行なう。そこで、$V_R(t) \preceq V_{R_2}(V_{R_1}(t))$ をまず証明して、つぎに $V_R(t) \succeq V_{R_2}(V_{R_1}(t))$ を証明することにする。

1 階層化条件の保存

階層化条件の (4)、(5) は、次の補題により書換え時に保存される。このことから、階層化条件全部が書換え時に保存されるということになる。

【 補題 1.1 】項書換え系 R の部分集合 R_1、R_2 と基底項 $t \in T(Func(R) \cup \Omega,\ \phi)$ に対して、項書換え系 R_1、R_2 と項 t が階層化条件を満たすならば、$t \underset{R}{\overset{*}{\rightarrow}} s$ となる任意の項 s について、$\forall p \in Occ_{DefFunc}(R_1,\ s)$, $\forall q \in Occ_{DefFunc}(R_2,\ s)$ $p \not\leq q$ かつ $\forall p_1, p_2 \in Occ_{DefFunc}(R_1,\ s)$ $p_1 | p_2$ が成り立つ。

【 証明 】書換え回数に関する帰納法による。□

【 補題 1.2 】 項書換え R の部分集合 R_1、R_2 と基底項 $s \in T(Func(R) \cup \Omega,\ \phi)$ が階層化条件を満たすとき、項 m_1、m_2 が存在して、$s \underset{R_2}{\ominus\!\!\!\rightarrow} m_1 \underset{R_1}{\ominus\!\!\!\rightarrow} m_2$ が成り立つならば、項 n、t が存在して、$s \underset{R_1}{\overset{\epsilon}{\ominus\!\!\!\rightarrow}} n \underset{R_2}{\overset{\epsilon}{\ominus\!\!\!\rightarrow}} t$ かつ $m_2 \underset{R_1}{\overset{\epsilon}{\ominus\!\!\!\rightarrow}} t$ が成り立つ。ここで $\ominus\!\!\!\rightarrow$ は 1 ステップの、また、$\overset{\epsilon}{\ominus\!\!\!\rightarrow}$ は 0 ないし 1 ステップの素な並列書換えを表す。

【 証明 】 s から m_1 に到る際に書換えたリデックスの出現の集合を O_1、m_1 から m_2 に到る際に書換えたリデックスの出現の集合を O_2 とする。このとき、階層化条件が満たされることから、$O_1^U = \{\ u \in O_1 \mid \exists v \in O_2\ u \leq v\ \}$、$O_1^D = O_1 - O_1^U$、$O_2^L = \{\ v \in O_2 \mid \exists u \in O_1\ u < v\ \}$、$O_2^D = O_2 - O_2^L$ とすると、O_1^U、O_1^D、O_2^D は互いに素であり並列書換え $s \underset{R_2}{\ominus\!\!\!\rightarrow} m_1 \underset{R_1}{\ominus\!\!\!\rightarrow} m_2$ は、項 s の部分項の集合 s/O_1^U、s/O_1^D、s/O_2^D の要素それぞれについての並列書換えと見ることができるので、それぞれの場合に分けて考えれば、容易に導ける。□

【 補題 1.3 】項 s、m、n に対して、$s \underset{R_2}{\overset{*}{\ominus\!\!\!\rightarrow}} m$ かつ $s \underset{R_1}{\overset{*}{\ominus\!\!\!\rightarrow}} n$ であるとき、項 t が存在して、$m \underset{R_1}{\overset{*}{\ominus\!\!\!\rightarrow}} t$ かつ $n \underset{R_2}{\overset{*}{\ominus\!\!\!\rightarrow}} t$ である。

【証明】$*$をϵに置き換えた命題が文献[4]より成り立つので、このことより導かれる。□

【補題 1.4】項s、m、nに対して、$s \xrightarrow[R_1]{K} m$かつ$s \xrightarrow[R_1]{L} n$であるとき、項tが存在して、$m \xrightarrow[R_1]{(L)} t$かつ$n \xrightarrow[R_1]{(K)} t$である。ここで、$\xrightarrow{(L)}$はたかだか$L$回の並列書換えを表す。

【証明】文献[1]参照。□

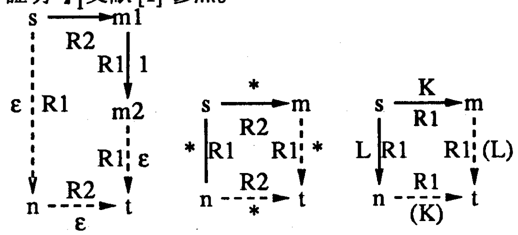


図 1.1: 補題 1.2　図 1.2: 補題 1.3　図 1.3: 補題 1.4

【補題 1.5】項書換えRの部分集合R_1、R_2と基底項$s \in T(Func(R) \cup \Omega,\ \phi)$が階層化条件を満たすとき、項$s$、$m_1$、$m_2$に対して、$s \xrightarrow[R_2]{N} m_1 \xrightarrow[R_1]{} m_2$が成り立つならば、項$n$、$t$が存在して、$s \xrightarrow[R_1]{\epsilon} n \xrightarrow[R_2]{(N)} t$かつ$m_2 \xrightarrow[R_1]{(2)} t$が成り立つ。

【証明】$s \xrightarrow[R_2]{N-1} s' \xrightarrow[R_2]{} m_1 \xrightarrow[R_1]{} m_2$となる項$s'$が存在するので、補題1.2より、$s' \xrightarrow[R_1]{\epsilon} n' \xrightarrow[R_2]{\epsilon} t'$かつ$m_2 \xrightarrow[R_1]{\epsilon} t'$となる項$n'$、$t'$が存在する。このとき、$s \xrightarrow[R_2]{N-1} s' \xrightarrow[R_1]{\epsilon} n'$が成り立つので、帰納法の仮定より、$s \xrightarrow[R_1]{\epsilon} n \xrightarrow[R_2]{(N-1)} n''$かつ$n' \xrightarrow[R_1]{\epsilon} n''$となる項$n$、$n''$が存在する。さらにこのとき、$n' \xrightarrow[R_2]{\epsilon} t'$かつ$n' \xrightarrow[R_1]{\epsilon} n''$であることと補題1.3より、$t' \xrightarrow[R_1]{\epsilon} t$かつ$n'' \xrightarrow[R_2]{\epsilon} t$となる項$t$が存在する。よって、$s \xrightarrow[R_1]{\epsilon} n \xrightarrow[R_2]{(N)} t$かつ$m_2 \xrightarrow[R_1]{(2)} t$が成り立つ。尚、補題1.2は、補題1.1より適用可能となる。□

【補題 1.6】項書換えRの部分集合R_1、R_2と基底項$s \in T(Func(R) \cup \Omega,\ \phi)$が階層化条件を満たすとき、項$s$、$m_1$、$m_2$に対して、$s \xrightarrow[R_2]{N} m_1 \xrightarrow[R_1]{M} m_2$が成り立つならば、項$n$、$t$が存在して、$s \xrightarrow[R_1]{(M)} n \xrightarrow[R_2]{(N)} t$かつ$m_2 \xrightarrow[R_1]{*} t$が成り立つ。

【証明】$s \xrightarrow[R_2]{N} m_1 \xrightarrow[R_1]{} p \xrightarrow[R_1]{M-1} m_2$となる項$p$が存在するので、補題1.5より、$s \xrightarrow[R_1]{\epsilon} s' \xrightarrow[R_2]{(N)} n'$かつ$p \xrightarrow[R_1]{(2)} n'$となる項$s'$、$n'$が存在する。このとき、$p \xrightarrow[R_1]{M-1} m_2$かつ$p \xrightarrow[R_1]{(2)} n'$であることと補題1.4より、$m_2 \xrightarrow[R_1]{(2)} t'$かつ$n' \xrightarrow[R_1]{(M-1)} t'$となる項$t'$が存在する。さらにこのとき、$s' \xrightarrow[R_2]{(N)} n' \xrightarrow[R_1]{(M-1)} t'$であることと$M$に関する帰納法の仮定より、$s' \xrightarrow[R_1]{(M-1)} n \xrightarrow[R_2]{(N)} t$かつ$t' \xrightarrow[R_1]{*} t$となる項$t$が存在する。よって、$s \xrightarrow[R_1]{(M)} n \xrightarrow[R_2]{(N)} t$かつ$m_2 \xrightarrow[R_1]{*} t$が成り立つ。□

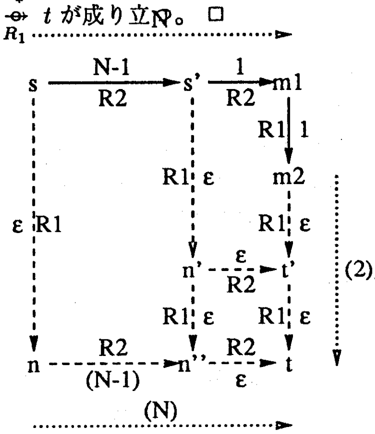


図 1.4: 補題 1.5

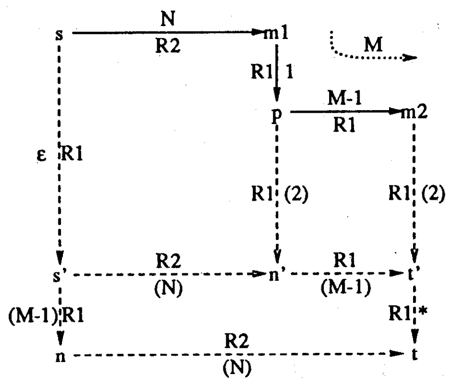


図 1.5: 補題 1.6

【補題 1.7】項書換えRの部分集合R_1、R_2と基底項$s \in T(Func(R) \cup \Omega,\ \phi)$が階層化条件を満たすとき、項$s$、$t$に対して、$s \xrightarrow[R_1+R_2]{*} t$ならば、項$t'$、$t''$が存在して、$s \xrightarrow[R_1]{*} t' \xrightarrow[R_2]{*} t''$かつ$t \xrightarrow[R_1]{*} t''$である。

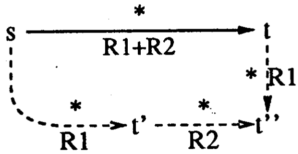


図 1.6: 補題 1.7

【 証明 】

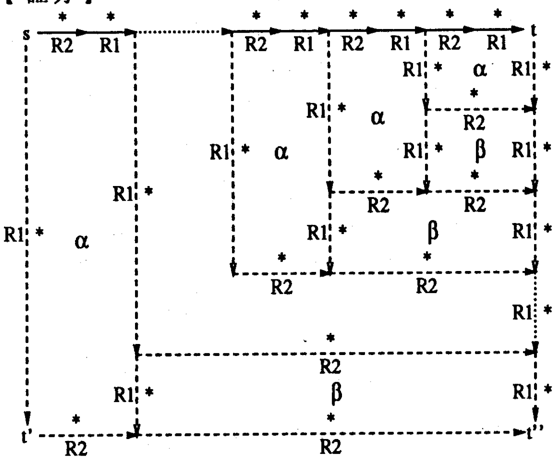
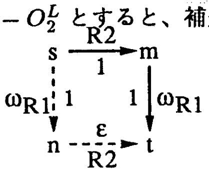


図 1.7: 補題 1.7の証明

上の図において、ループ α に対して補題 1.6を、ループ β に対して補題 1.3を順次適用することにより導かれる。尚、補題 1.6は、補題 1.1より適用可能となる。 □

【 **補題 1.8** 】項書換え R の部分集合 R_1、R_2 と基底項 $s \in T(Func(R) \cup \Omega,\ \phi)$ が階層化条件を満たすとき、項 s、m、t に対して、$s \underset{R_2}{\circ\!\!\!\rightarrow} m \xrightarrow[\omega_{R_1}]{} t$ ならば、項 n が存在して、$s \xrightarrow[\omega_{R_1}]{} n \underset{R_2}{\overset{\epsilon}{\circ\!\!\!\rightarrow}} t$ である。ここで、$s \xrightarrow[\omega_R]{} n$ は $n = \omega_R(s)$ であることを表す。

【 証明 】 s から m に到る際に書換えたリデックスの出現の集合を O_1、m から t に到る際に ω_{R_1} によって Ω に置換された出現の集合を O_2 とする。このとき、階層化条件が満たされることから、$O_1^U = \{\ u \in O_1 \mid \exists v \in O_2\ u \le v\ \}$、$O_1^D = O_1 - O_1^U$、$O_2^L = \{\ v \in O_2 \mid \exists u \in O_1\ u < v\ \}$、$O_2^D = O_2 - O_2^L$ とすると、補題 1.2の証明と同様。 □



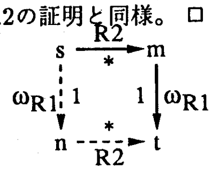


図 1.8: 補題 1.8　　図 1.9: 補題 1.9

【 **補題 1.9** 】項書換え R の部分集合 R_1、R_2 と基底項 $s \in T(Func(R) \cup \Omega,\ \phi)$ が階層化条件を満たすとき、項 s、m、t に対して、$s \underset{R_2}{\overset{*}{\circ\!\!\!\rightarrow}} m \xrightarrow[\omega_{R_1}]{} t$ ならば、項 n が存在して、$s \xrightarrow[\omega_{R_1}]{} n \underset{R_2}{\overset{*}{\circ\!\!\!\rightarrow}} t$ である。

【 証明 】

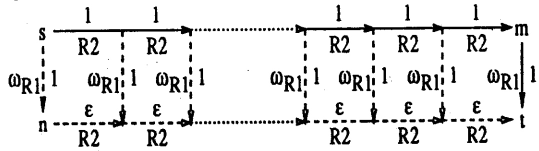


図 1.10: 補題 1.9の証明

補題 1.1と補題 1.8と図 1.10 より明らか。 □

【 **補題 1.10** 】項書換え系 R と項 t_1、t_2、…、t_n に対して、$t_1,\ t_2 \ldots,\ t_n \in T(Func(R) \cup \{\Omega\},\ \phi)$ ならば、$\forall f \in DefFunc(R)\ \ f(t_1,\ t_2 \ldots,\ t_n) \in Cand_R^-$ である。

【 証明 】各ソートごとに構成子定数記号が存在するという仮定と項書換え系 R の完全性と $Cand_R^-$ の性質より導かれる。 □

【 **補題 1.11** 】項書換え系 R と基底項 $t \in T(Func(R) \cup \{\Omega\},\ \phi)$ が与えられたとき、t の中に現れる被定義関数記号の出現の集合を P とし、$\min(P) = \{p_1,\ \ldots,\ p_n\}$ とおくと、$\omega_R(t) = t[p_1 \leftarrow \Omega,\ \ldots,\ p_n \leftarrow \Omega]$ である。

【 証明 】補題 1.10と ω_R の定義より明らか。 □

【 **補題 1.12** 】項書換え系 R の部分集合 R_1、R_2 と基底項 $t \in T(Func(R) \cup \{\Omega\},\ \phi)$ に対して、

(1) $\forall p_1, p_2 \in Occ_{DefFunc}(R_1,\ t)\ \ p_1 | p_2$

(2) $\forall p \in Occ_{DefFunc}(R_1,\ t), \forall q \in Occ_{DefFunc}(R_2,\ t)\ \ p \not\le q$

が成り立つならば、$\omega_R(t) = \omega_{R_2}(\omega_{R_1}(t))$ が成り立つ。

【 証明 】 $Occ_{DefFunc}(R_1,\ t) = \{p_1,\ \ldots,\ p_n\}$、$Occ_{DefFunc}(R_2,\ \omega_{R_1}(t)) = \{q_1,\ \ldots,\ q_n\}$ とすると、条件 (1)、(2)、補題 1.11より、$\omega_{R_2}(\omega_{R_1}(t)) = (t[p_1 \leftarrow \Omega,\ \ldots,\ p_n \leftarrow \Omega])[q_1 \leftarrow \Omega,\ \ldots,\ q_n \leftarrow \Omega]$ である。すなわち、$\min(Occ_{DefFunc}(R_1,\ t) \cup Occ_{DefFunc}(R_2,\ \omega_{R_1}(t))) = \{i_1,\ \ldots,\ i_n\}$ とおくと、$\omega_{R_2}(\omega_{R_1}(t)) = t[i_1 \leftarrow \Omega,\ \ldots,\ i_n \leftarrow \Omega]$ である。また条件 (2) より、$Occ_{DefFunc}(R_2,\ \omega_{R_1}(t)) = Occ_{DefFunc}(R_2,\ t)$ であるので、$\min(OccDefFunc(R_1,\ t) \cup Occ_{DefFunc}(R_2,\ \omega_{R_1}(t))) = \min(Occ_{DefFunc}(R,\ t))$ である。よって、$\omega_R(t) = \omega_{R_2}(\omega_{R_1}(t))$ である。 □

【 **補題 1.13** 】項書換え系 R の部分集合 R_1、R_2 と基底項 $t \in T(Func(R) \cup \{\Omega\},\ \phi)$ が階層化条件を満たすならば、$\forall s$ such that $t \xrightarrow[R]{*} s\ \ \omega_R(s) = \omega_{R_2}(\omega_{R_1}(s))$ が成り立つ。

【 証明 】補題 1.1と補題 1.12より明らか。 □

【補題 1.14】項書換え系 R の部分集合 R_1、R_2 と基底項 $t \in T(Func(R)\cup\{\Omega\}, \phi)$ が階層化条件を満たすならば、項 s が存在して $t \xrightarrow[R]{*} s$ であるとき、$t \xrightarrow[R_1]{*} t'$ かつ $\omega_{R_1}(t') \xrightarrow[R_2]{*} s'$ かつ $\omega_{R_2}(s') \succeq \omega_R(s)$ となるような項 t'、s' が存在する。

【証明】図 1.11 のループ α に補題 1.7を適用し、ループ β に補題 1.9を適用すると、t'、s' の存在がまず示される。次に補題 1.13より、$\omega_R(s'') = \omega_{R_2}(\omega_{R_1}(s'')) = \omega_{R_2}(s')$ が得られる。また、$s \xrightarrow[R_1]{*} s''$ であることから、$\omega_R(s'') \succeq \omega_R(s)$ が得られるので、$\omega_{R_2}(s') \succeq \omega_R(s)$ が成り立つ。尚、補題 1.7は、補題 1.1より適用可能となる。

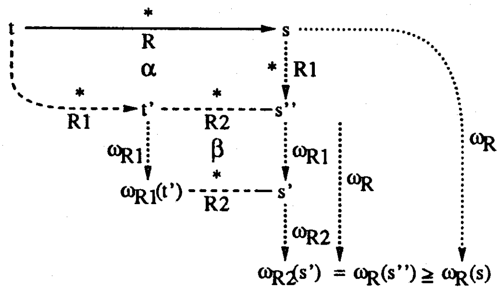


図 1.11: 補題 1.14の証明

□

【補題 1.15】項書換え系 R の部分集合 R_1、R_2 と基底項 $t \in T(Func(R)\cup\{\Omega\}, \phi)$ が階層化条件を満たすならば、$V_R \preceq V_{R_2}(V_{R_1}(t))$ である。

【証明】$V_R(t)$、$V_{R_2}(V_{R_1}(t))$ をそれぞれ変形すると、まず、V_R の定義より、$V_R(t) = \sqcup\{\, \omega(s) \mid t \xrightarrow[R]{*} s \,\}$、$V_R$ の定義と連続性、$\sqcup$ の定義より、$V_{R_2}(V_{R_1}(t)) = \sqcup\{\, \omega_{R_2}(s') \mid \exists s\ t \xrightarrow[R_1]{*} s,\ \omega_{R_1}(s) \xrightarrow[R_2]{*} s' \,\}$ となる。ここで補題 1.14より、$\forall a \in \{\, \omega(s) \mid t \xrightarrow[R]{*} s \,\} \exists b \in \{\, \omega_{R_2}(s') \mid \exists s\ t \xrightarrow[R_1]{*} s,\ \omega_{R_1}(s) \xrightarrow[R_2]{*} s' \,\}\ \ a \preceq b$ が成り立つので、$\sqcup\{\, \omega(s) \mid t \xrightarrow[R]{*} s \,\} \preceq \sqcup\{\, \omega_{R_2}(s') \mid \exists s\ t \xrightarrow[R_1]{*} s,\ \omega_{R_1}(s) \xrightarrow[R_2]{*} s' \,\}$ である。ゆえに、$V_R \preceq V_{R_2}(V_{R_1}(t))$ が成り立つ。□

2 $V_R \succeq V_{R_2}(V_{R_1}(t))$ の証明

【補題 2.1】項書換え系 R の部分集合 R_1、R_2 と基底項 $s \in T(Func(R) \cup \{\Omega\}, \phi)$ が階層化条件を満たすとき、項 s、m、t に対して、$s \xrightarrow[\omega_{R_1}]{} m \underset{R_2}{\ominus\!\!\!\rightarrow} t$ ならば、項 n が存在して、$s \overset{+}{\underset{R_2}{\ominus\!\!\!\rightarrow}} n \xrightarrow[\omega_{R_1}]{} t$ である。

【証明】s から m に到る際に ω_{R_1} によって Ω に置換された出現の集合を O_1、m から t に到る際に書換えたリデックスの出現の集合を O_2 とする。このとき、階層化条件が満たされることから、$O_1^L = \{\, u \in O_1 \mid \exists v \in O_2\ u > v \,\}$、$O_1^D = O_1 - O_1^L$、$O_2^U = \{\, v \in O_2 \mid \exists u \in O_1\ u \geq v \,\}$、$O_2^D = O_2 - O_2^U$ とすると、補題 1.2の証明と同様。□

【補題 2.2】項書換え系 R の部分集合 R_1、R_2 と基底項 $s \in T(Func(R)\cup\{\Omega\}, \phi)$ が階層化条件を満たすとき、項 s、m、t に対して、$s \xrightarrow[\omega_{R_1}]{} m \overset{*}{\underset{R_2}{\ominus\!\!\!\rightarrow}} t$ ならば、項 n が存在して、$s \overset{*}{\underset{R_2}{\ominus\!\!\!\rightarrow}} n \xrightarrow[\omega_{R_1}]{} t$ である。

【証明】補題 2.1より、補題 1.9の証明と同様にして導かれる。□

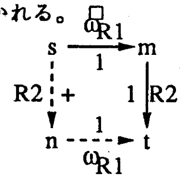


図 2.12: 補題 2.1

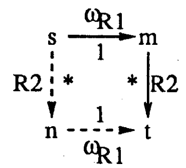


図 2.13: 補題 2.2

【補題 2.3】項書換え系 R の部分集合 R_1、R_2 と基底項 $t \in T(Func(R)\cup\{\Omega\}, \phi)$ が階層化条件を満たすならば、$V_R \succeq V_{R_2}(V_{R_1}(t))$ である。

【証明】$V_R(t)$、$V_{R_2}(V_{R_1}(t))$ をそれぞれ変形すると、$V_R(t) = \sqcup\{\, \omega(s_2) \mid t \xrightarrow[R]{*} s_2 \,\}$、$V_{R_2}(V_{R_1}(t)) = \sqcup\{\, \omega_{R_2}(s_3) \mid \exists s_1\ t \xrightarrow[R_1]{*} s_1,\ \omega_{R_1}(s_1) \xrightarrow[R_2]{*} s_3 \,\}$ となる。また、補題 2.2と補題 1.12より、図 2.19 を得る。このときこの図より、$\{\, \omega(s_2) \mid t \xrightarrow[R]{*} s_2 \,\} \supseteq \{\, \omega_{R_2}(s_3) \mid \exists s_1\ t \xrightarrow[R_1]{*} s_1,\ \omega_{R_1}(s_1) \xrightarrow[R_2]{*} s_3 \,\}$ が成り立つ。ゆえに、$V_R \succeq V_{R_2}(V_{R_1}(t))$ である。

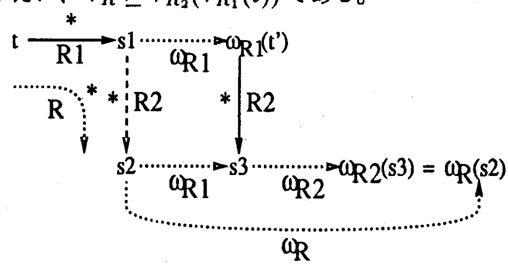


図 2.14: 補題 2.3の証明

□