記　号　処　理 74－4
プログラミング－言語・基礎・実践－ 17－4
（1994．6．3）

Linear Logic と島内剛一の Prover CLC

辰己文夫
早稲田大学理工学研究科数学専攻
〒169 東京都新宿区大久保 3-4-1

古典線形命題論理 $\mathbf{CLL}_0$ の証明の構造と、島内剛一による定理自動証明系のための古典命題論理 $\mathbf{tCLC}_0$ における証明の構造を調べ、その類似点を用いて、$\mathbf{CLL}_0$ の式 Sに対する「Sの引き戻し」と呼ばれる論理式の集合を構成する。この集合の要素となる各式は、古典線形論理で証明可能であり、その各式の古典命題論理への翻訳は元の式の部分式のいずれかに等しい。このとき、Sが、Sの引き戻しに入っていることと、Sが古典線形命題論理で証明可能であることとが同値となる。このことから、古典線形命題論理上の定理自動証明の手続きを得ることが出来る。

Linear Logic and G.Simauti's Prover CLC

TATSUMI Takeo.
Department of Mathematics, School of Science and Engineering, Waseda University.
3-4-1 Ookubo, Shinjuku-ku, Tokyo, 169, Japan

A procedure for constructing proof in $\mathbf{CLL}_0$ would be shown. To make a proof of S, we define "Unfolding S" which is a set of proofs in $\mathbf{CLL}_0$ such that a classical interpretation of an endsequent in that proof is a subsequect of classical interpretation of S. Then S is provable in $\mathbf{CLL}_0$ and a proof of S is constructed iff S is the element of "Unfolding S"

1 はじめに

これまでにも多くの形式的証明系が、定理自動証明の研究において定義されてきた。[1, 17, 4, 5, 16, 14, 12, 6, 15] その中でも形式的体系 **CLC** は、**LK** と同値な体系として、1950 年代に島内剛一によって定義された形式的体系である。**CLC** は、増・弱などの構造に関する推論を持たない。

Girard によって定義された「線形論理 (Linear Logic)」[3, 9, 7, 13, 2, 10, 11] では、構造に関する推論規則を用いずに様相記号を先頭に持つ命題を証明することが出来ない。これは、構造についての推論規則の適用が、様相記号の付いた命題のみに制限されているからである。したがって、様相記号を持たない線形論理は、構造に関する推論規則を持たない論理体系と捉えることが出来る。記号 $\mathbf{CLL}_0$ によって、この様相記号を持たない古典命題線形論理を表す。

$\mathbf{CLL}_0$ における論理式 S の証明は、$\mathbf{tCLC}_0$(two-sided CLC on predicate logic) における S の古典論理への解釈 $\mathbf{K}(S)$ の証明によく似ている。本発表では、この類似点を頼りにして、$\mathbf{CLL}_0$ における証明図の作成手続を構成する。Lincoln[8] によれば、$\mathbf{CLL}_0$ における論理式の証明可能性の決定手続きは多項式領域決定可能である。本論文では、証明可能性の決定ではなく、証明そのものの構成手続きを示す。

2 線形論理

形式的体系 **CLL** は古典線形論理の体系である。$\mathbf{CLL}_0$ は様相記号を持たない命題古典線形論理の体系である。$\mathbf{CLL}_0$ の定義を次に示す。[11]

$\mathbf{CLL}_0$の定義

$\mathbf{CLL}_0$では、ギリシャ文字 — $\Gamma, \Delta, \cdots$ — を論理式の集合として扱う。

定義 1 [$\mathbf{CLL}_0$の公理] $P \to P$： ただし、P は原始的論理命題とする。

定義 2 [$\mathbf{CLL}_0$の推論規則] $\mathbf{CLL}_0$ の推論規則は次の通りである。

$$\sim\text{:左}\ \frac{\Gamma \to \Delta, A}{\sim A, \Gamma \to \Delta} \qquad \sim\text{:右}\ \frac{A, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \sim A}$$

$$+\text{:左}\ \frac{A, \Gamma \to \Delta \qquad B, \Gamma' \to \Delta'}{A + B, \Gamma, \Gamma' \to \Delta, \Delta'} \qquad +\text{:右}\ \frac{\Gamma \to \Delta, A, B}{\Gamma \to \Delta, A + B}$$

$$*\text{:左}\ \frac{A, B, \Gamma \to \Delta}{A * B, \Gamma \to \Delta} \qquad *\text{:右}\ \frac{\Gamma \to A, \Delta \qquad \Gamma' \to B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \to A * B, \Delta, \Delta'}$$

$$-\!\circ\text{:左}\ \frac{\Gamma \to A, \Delta \qquad B, \Gamma' \to \Delta'}{A -\!\circ B, \Gamma, \Gamma' \to \Delta, \Delta'} \qquad -\!\circ\text{:右}\ \frac{A, \Gamma \to B, \Delta}{\Gamma \to A -\!\circ B, \Delta}$$

$$\sqcup:\text{左}\ \frac{A,\Gamma\to\Delta\quad B,\Gamma\to\Delta}{A\sqcup B,\Gamma\to\Delta}\qquad \sqcup:\text{右}\ \frac{\Gamma\to\Delta,A}{\Gamma\to\Delta,A\sqcup B}\quad\frac{\Gamma\to\Delta,B}{\Gamma\to\Delta,A\sqcup B}$$

$$\sqcap:\text{左}\ \frac{A,\Gamma\to\Delta}{A\sqcap B,\Gamma\to\Delta}\quad\frac{B,\Gamma\to\Delta}{A\sqcap B,\Gamma\to\Delta}\qquad \sqcap:\text{右}\ \frac{\Gamma\to\Delta,A\quad\Gamma\to\Delta,B}{\Gamma\to\Delta,A\sqcap B}$$

$$\mathbf{1}:\text{左}\ \frac{\Gamma\to\Delta}{\Gamma,\mathbf{1}\to\Delta}\quad \mathbf{1}:\text{右}\ \to\mathbf{1}\quad \mathbf{0}:\text{左}\ \mathbf{0}\to\quad \mathbf{0}:\text{右}\ \frac{\Gamma\to\Delta}{\Gamma\to\Delta,\mathbf{0}}$$

$$\top:\text{左}\ \text{(no rule)}\quad \top:\text{右}\ \Gamma\to\Delta,\top\quad \bot:\text{左}\ \Gamma,\bot\to\Delta\quad \bot:\text{右}\ \text{(no rule)}$$

$P\multimap Q$ は $\sim P+Q$ と同じように扱うことができるので、以後、$P\multimap Q$ を $\sim P+Q$ の省略として扱う。

$\mathbf{CLL_0}$ の証明の構造

補題 3 $\mathbf{CLL_0}\vdash\Gamma\to\Delta$ のとき、$\Gamma\to\Delta$ の証明 T で、次の条件を満たすものを構成できる。

D1 Sの左式が$\sim P$の形の論理式を含むとき、S は推論規則$\sim$: 左の下式である。

D2 上の条件を満たさないときで、Sの右式が$\sim P$の形の論理式を含むとき、S は推論規則$\sim$: 右の下式である。

D3 上のすべての条件を満たさないときで、Sの左式が $P*Q$ の形の論理式を含むとき、S は推論規則$*$: 左の下式である。

D4 上のすべての条件を満たさないときで、Sの右式が $P+Q$ の形の論理式を含むとき、S は推論規則$+$: 右の下式である。

D5 上のすべての条件を満たさないときで、Sの左式が $P\sqcup Q$ の形の論理式を含むとき、S は推論規則 $\sqcup$: 左の下式である。

D6 上のすべての条件を満たさないときで、Sの右式が $P\sqcap Q$ の形の論理式を含むとき、S は推論規則$+$: 右の下式である。

補題 4 [Inversion Lemma]

I1 $\mathbf{CLL_0}\vdash\Gamma,A*B\to\Delta$ iff $\mathbf{CLL_0}\vdash\Gamma,A,B\to\Delta$

I2 $\mathbf{CLL_0}\vdash\Gamma,A\sqcup B\to\Delta$ iff $\mathbf{CLL_0}\vdash\Gamma,A\to\Delta$ かつ $\mathbf{CLL_0}\vdash\Gamma,B\to\Delta$

I3 $\mathbf{CLL_0}\vdash\Gamma\to A+B\Delta$ iff $\mathbf{CLL_0}\vdash\Gamma\to A,B,\Delta$

I4 $\mathbf{CLL_0}\vdash\Gamma\to A\sqcap B,\Delta$ iff $\mathbf{CLL_0}\vdash\Gamma\to A,\Delta$ かつ $\mathbf{CLL_0}\vdash\Gamma\to B,\Delta$

3 CLC, $\mathbf{tCLC_0}$

CLC は、島内剛一によって 1950 年代に定義された形式的体系で、**LK**[12] に同値な、定理自動証明系のための体系である。本論文では、$\mathbf{tCLC_0}$ を、式の両側に論理式を持つ **CLC** に論理定数 “**0**, **1**” を付け加えた命題論理とする。$\mathbf{tCLC_0}$ の定義は、次の通りである。

tCLC_0 の定義

定義 5 [**$\mathbf{tCLC}_0$ 公理**] $\Gamma, A, \Delta \to \Sigma, A, \Pi$、および$\Gamma, \mathbf{0} \to \Delta$、および$\Gamma \to \mathbf{1}, \Delta$
ただし、Γ, Δ の要素と A は、原始的論理命題である。A を、「公理の principal formula」と呼ぶ。

定義 6 [**$\mathbf{tCLC}_0$ の推論規則**] $\mathbf{tCLC}_0$ の推論規則は、次のように定められる。

$$\neg:左\ \frac{\Gamma \to \Delta, A}{\neg A, \Gamma \to \Delta} \qquad \neg:右\ \frac{A, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \neg A}$$

$$\wedge:左\ \frac{A, B, \Gamma \to \Delta}{A \wedge B, \Gamma \to \Delta} \qquad \wedge:右\ \frac{\Gamma \to \Delta, A \qquad \Gamma \to \Delta, B}{\Gamma \to \Delta, A \wedge B}$$

$$\vee:左\ \frac{A, \Gamma \to \Delta \qquad B, \Gamma \to \Delta}{A \vee B, \Gamma \to \Delta} \qquad \vee:右\ \frac{\Gamma \to \Delta, A, B}{\Gamma \to \Delta, A \vee B}$$

$$\supset:左\ \frac{\Gamma \to \Delta, A \qquad B, \Gamma \to \Delta}{A \supset B, \Gamma \to \Delta} \qquad \supset:右\ \frac{\Gamma, A \to B, \Delta}{\Gamma \to A \supset B, \Delta}$$

$$\mathbf{1}:左\ \frac{\Gamma \to \Delta}{\mathbf{1}, \Gamma \to \Delta} \qquad \mathbf{0}:右\ \frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \mathbf{0}}$$

$P \supset Q$ は、$\neg P \vee Q$ と同一視できるから、$P \supset Q$ を $\neg P \vee Q$ の省略とみなす。

tCLC_0 の証明

定義 7 $\frac{S'}{S}$ が $\mathbf{tCLC}_0$ の許される推論であるとき、「S' は、Sから分解される」あるいは「S は、分解可能である」という。

アルゴリズム 8 $\mathbf{tCLC}_0$ は、定理自動証明系で使いやすいように設計された形式的体系である。自動証明の手続きは次の通りである。

手続きの開始　証明をしたい式を S とする。

初期化　木 T の初期状態を S とする。

公理判定　木 T の最上部にあるすべての式が $\mathbf{tCLC}$ の公理である時は、T を証明木として、手続きを終了する。

$\wedge$: 左 の分解　T の最上式 S' で、$P \wedge Q$ の形の論理式を左式に含むものがあれば、S' を$\wedge$: 左 で分解した式を S'の上に書いた木をTとし、公理判定に戻る。

$\vee$: 右 の分解　T の最上式 S' で、$P \vee Q$ の形の論理式を右式に含むものがあれば、S' を$\vee$: 右 で分解した式を S'の上に書いた木をTとし、公理判定に戻る。

$\vee$: 左 の分解　T の最上式 S' で、$P \vee Q$ の形の論理式を左式に含むものがあれば、S' を$\vee$: 左 で分解した式を S'の上に書いた木をTとし、公理判定に戻る。

$\wedge$: 右 の分解　T の最上式 S' で、$P \wedge Q$ の形の論理式を右式に含むものがあれば、S' を$\wedge$: 右 で分解した式を S'の上に書いた木をTとし、公理判定に戻る。

1 : 左 の分解 T の最上式 S' で、**1** の形の論理式を左式に含むものがあれば、S' を **1** : 左 で分解した式を S'の上に書いた木を Tとし、公理判定に戻る。

0 : 右 の分解 T の最上式 S' で、**0** の形の論理式を右式に含むものがあれば、S' を **0** : 右 で分解した式を S'の上に書いた木を Tとし、公理判定に戻る。

中止 それでも分解不可能なときは証明不能であるから、手続きを中止する。

4 $\mathbf{CLL_0}$の証明の構成

前節までにおいて、構造に関する推論規則を持たない 2 つの形式的体系の証明論的性質について調べた。一つは $\mathbf{CLL_0}$ であり、もう一つは $\mathbf{tCLC_0}$ である。いま、$\mathbf{CLL_0}$ の式 Sが証明可能であるとき、その古典論理への翻訳は $\mathbf{tCLC_0}$ で証明可能になる。しかも、その証明図は $\mathbf{CLL_0}$における元の式の証明図に良く似ている。このような性質に注目して、 $\mathbf{CLL_0}$ における証明図の構成方法を得ることが出来る。

古典論理への翻訳

定義 9 [古典的翻訳] 古典的翻訳 $\mathbf{K} : \mathbf{CLL_0} \rightarrow \mathbf{tCLC_0}$とは、線形論理の式に現われる$*, \sqcap, +, \sqcup, \multimap, \perp, \top$ を、$\wedge, \wedge, \vee, \vee, \supset, \neg(\neg\alpha \vee \alpha), \neg\alpha \vee \alpha$ で置き換えた式である。

補題 10 $\mathbf{CLL_0} \vdash \Gamma \rightarrow \Delta$ ならば、$\mathbf{tCLC_0} \vdash \mathbf{K}(\Gamma \rightarrow \Delta)$

補題 11 $\mathbf{CLL_0} \vdash \Gamma \rightarrow \Delta$ ならば、$\mathbf{K}(\Gamma \rightarrow \Delta)$ の $\mathbf{tCLC_0}$における証明図は、構成可能である。

引き戻し法

定義 12 [部分式] S の部分式とは、S から、いくつかの (すべてでもよい) 論理式を取り除いた式のことである。

定義 13 [引き戻し] "Sの引き戻し" $\mathbf{B}(S)$ を次のように定義する。

$S' \in \mathbf{B}(S)$ iff $\mathbf{K}(S')$ は $\mathbf{K}(S)$ の部分式であり、$\mathbf{CLL_0} \vdash S'$

定理 14 $\mathbf{B}(S)$ は構成可能である。

証明 $\mathbf{tCLC_0} \nvdash \mathbf{K}(S)$ ならば、どんな部分式も $\mathbf{tCLC_0}$ で証明不可能であるから、$\mathbf{B}(S) = \phi$とする。そうでないとき、$\mathbf{K}(S)$ の $\mathbf{tCLC_0}$ における 証明木を T の構成の手続きは、次のよう $\mathbf{K}(S)$ における証明の長さに相当する Sに含まれる論理記号の個数$\nu(S)$ についての帰納法に沿ったアルゴリズム 15 で示される。 □

アルゴリズム 15 $T_0^1, T_1^1, \cdots, T_0^2, T_1^2, \cdots$ を T の部分木で、T_k^m が m 個の推論規則を含み、$k \neq k'$ ならば、T_k^m は $T_{k'}^m$ と異なるようにとる。このアルゴリズムでは、構成の手続きは $T_0^1, T_1^1, \cdots, T_0^2, T_1^2, \cdots$ の順で行われる。

- $\nu(S) = 0$ ならば、$\mathbf{tCLC_0}$の公理の形から、$\mathbf{K}(S)$ は$\Gamma, A_1, \cdots, A_m \rightarrow A_1, \cdots, A_m, \Delta$、$\Gamma, A_1, \cdots, A_m, \mathbf{0} \rightarrow A_1, \cdots, A_m, \Delta$、$\Gamma, A_1, \cdots, A_m \rightarrow \mathbf{1}, A_1, \cdots, A_m, \Delta$ のいずれかの式と同値である。ただし、$\Gamma \cap \Delta = \phi$であり、$\Gamma, \Delta$ の全ての要素は原子論理式である。

$\mathbf{K}(S) = \Gamma, A_1, \cdots, A_m \to A_1, \cdots, A_m, \Delta$ ならば $\mathbf{B}(S) = \{A_i \to A_i | i = 1, \cdots, m\}$
$\mathbf{K}(S) = \Gamma, A_1, \cdots, A_m, \mathbf{0} \to A_1, \cdots, A_m, \Delta$ ならば $\mathbf{B}(S) = \{A_i \to A_i | i = 1, \cdots, m\} \cup \{\mathbf{0} \to \quad\}$
$\mathbf{K}(S) = \Gamma, A_1, \cdots, A_m \to \mathbf{1}, A_1, \cdots, A_m, \Delta$ ならば $\mathbf{B}(S) = \{A_i \to A_i | i = 1, \cdots, m\} \cup \{\quad \to \mathbf{1}\}$

- $\nu(\Gamma, A * B \to \Delta) = n+1$ のとき、Inversion Lemma I1 により、$\mathbf{CLL}_0 \vdash \Gamma, A * B \to \Delta$ iff $\mathbf{CLL}_0 \vdash \Gamma, A, B \to \Delta$ であり、$\Gamma, A, B \to \Delta$ の証明は $\mathbf{B}(\Gamma, A, B \to \Delta)$ に含まれる。したがって、
$$\mathbf{B}(\Gamma, A * B \to \Delta) = \mathbf{B}(\Gamma \to \Delta) \bigcup \left\{ \dfrac{\dfrac{S}{\Gamma_0, A_0, B_0 \to \Delta_0}}{\Gamma_0, A_0 * B_0 \to \Delta_0} \;\middle|\; \dfrac{S}{\Gamma_0, A_0, B_0 \to \Delta_0} \in \mathbf{B}(\Gamma, A, B \to \Delta) \right\}$$
$\nu(\Gamma \to A + B, \Delta) = n+1$, $\nu(\Gamma, A \sqcup B \to \Delta) = n+1$, $\nu(\Gamma \to A \sqcap B, \Delta) = n+1$, のときも、Inversion Lemma I2,I3,I4 より同様にできる。

- $\nu(\Gamma, A \sqcap B \to \Delta) = n+1$ のとき。$S = \Gamma, A \sqcap B \to \Delta$ とする。
(ア) $P * Q, P \sqcup Q \in \Gamma$ または $P + Q, P \sqcap Q \in \Delta$ のとき、補題 D1 および、D2、D3、 D4 が成立するので、$\nu(\Gamma, A * B \to \Delta) = n+1, \nu(\Gamma, A \sqcup B \to \Delta) = n+1, \nu(\Gamma \to A \sqcap B, \Delta) = n+1, \nu(\Gamma \to A + B, \Delta) = n+1$ のときと同じ手続が適用可能になり、$\mathbf{B}(S)$ は構成可能となる。
(イ) $P * Q, P \sqcup Q \notin \Gamma$ かつ $P + Q, P \sqcap Q \notin \Delta$のとき、$\mathbf{B}(S)$ の構成の手続きは、次の 3 つに分れる。

1. $\dfrac{T}{\Gamma_0, A_0 \to \Delta_0} \in \mathbf{B}(\Gamma, A, B \to \Delta)$ のとき $\dfrac{\dfrac{T}{\Gamma_0, A_0 \to \Delta_0}}{\Gamma_0, A_0 \sqcap B_0 \to \Delta_0}$ は $\mathbf{B}(\Gamma, A \sqcap B \to \Delta)$ の要素に含まれる。

2. $\dfrac{T}{\Gamma_0, B_0 \to \Delta_0} \in \mathbf{B}(\Gamma, A, B \to \Delta)$ のときは、$\dfrac{T}{\Gamma_0, A_0 \to \Delta_0} \in \mathbf{B}(\Gamma, A, B \to \Delta)$ のときと同じである。

3. $\dfrac{T}{\Gamma_0, A_0, B_0 \to \Delta_0} \in \mathbf{B}(\Gamma, A, B \to \Delta)$ のときは、T を $\mathbf{tCLC}_0$における証明で、

$$\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{T_1'}{\Gamma_1'^{\times}, A_0'^{\times}, B_0'^{\times} \to \Delta_1'^{\times}} \qquad \dfrac{T_2'}{\Gamma_2'^{\times}, A_0'^{\times}, B_0'^{\times} \to \Delta_2'^{\times}}}{\Gamma_0'^{\times}, A_0'^{\times}, B_0'^{\times} \to \Delta_0'^{\times}} I'. \\
\vdots \\
\overline{\Gamma_0'^{\times}, A_0', B_0' \to \Delta_0'^{\times}} \\
\vdots \\
\overline{\Gamma_0', A_0', B_0' \to \Delta_0'}
\end{array}$$

となるものとする。このとき、$\dfrac{T_1}{\Gamma_1^{\times}, A_0^{\times} \to \Delta_1^{\times}} \in \mathbf{B}(\Gamma_1'^{\times}, A_0'^{\times}, B_0'^{\times} \to \Delta_1'^{\times})$ かつ $\dfrac{T_2}{\Gamma_2^{\times}, A_0^{\times} \to \Delta_2^{\times}} \in \mathbf{B}(\Gamma_2'^{\times}, A_0'^{\times}, B_0'^{\times} \to \Delta_2'^{\times})$ が成立するから、T は、次のように書き換えられる。

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{T_1}{\Gamma_1^\times, A_0^\times \to \Delta_1^\times}}{\vdots}}{\Gamma_1^\times, A_0 \to \Delta^\times}}{\Gamma_1^\times, A_0 \sqcap B_0 \to \Delta^\times} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{T_2}{\Gamma_2^\times, B_0^\times \to \Delta_2^\times}}{\vdots}}{\Gamma_2^\times, B_0 \to \Delta^\times}}{\Gamma_2^\times, A_0 \sqcap B_0 \to \Delta^\times}$$

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma_1^\times, A_0 \sqcap B_0 \to \Delta^\times \qquad \Gamma_2^\times, A_0 \sqcap B_0 \to \Delta^\times}{\Gamma_0^\times, A_0 \sqcap B_0 \to \Delta_0^\times}\, I}{\cfrac{\vdots}{\Gamma_0, A_0 \sqcap B_0 \to \Delta_0}}$$

したがって、この証明を $\mathbf{B}(\Gamma, A \sqcap B \to \Delta)$ の要素とする。

$\mathbf{CLL}_0 \vdash \Gamma, A \sqcap B \to \Delta$ ならば、$\Gamma, A \sqcap B \to \Delta$ の部分式の証明は、ここに述べた 1,2,3 のときか $\mathbf{K}(\Gamma \to \Delta)$ の要素である。したがって、$\mathbf{B}(\Gamma, A \sqcap B \to \Delta)$ の構成の手続きは、このいずれかにある。

- $\nu(\Gamma \to A \sqcup B, \Delta) = n+1$ のときは、$\nu(\Gamma, A \sqcap B \to \Delta) = n+1$ のときと同様である。
- $\nu(\Gamma, A+B \to \Delta) = n+1$ のとき。$\mathbf{K}(\Gamma, A+B \to \Delta) = \Gamma', A' \vee B' \to \Delta'$ とする。D1 および D2、D3、D4、D5、D6 により、$P * Q, P \sqcup Q, P \sqcap Q \notin \Gamma$、$P + Q, P \sqcap Q, P \sqcup Q \notin \Delta$ と仮定できる。このとき、T は次のように書ける。

$$\frac{\Gamma', A' \to \Delta' \qquad \Gamma', B' \to \Delta'}{\Gamma', A' \vee B' \to \Delta'}$$

いま、$\cfrac{T_1}{\Gamma_1, A \to \Delta_1} \in \mathbf{B}(\Gamma', A' \to \Delta')$, $\cfrac{T_2}{\Gamma_2, B \to \Delta_2} \in \mathbf{B}(\Gamma', B' \to \Delta')$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \phi$, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$, $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \phi$, $\Delta_1 \cup \Delta_2 = \Delta$, を満たすような集合が取れるならば、

$$\cfrac{\cfrac{T_1}{\Gamma_1, A \to \Delta_1} \qquad \cfrac{T_2}{\Gamma_2, B \to \Delta_2}}{\Gamma_1, \Gamma_2, A + B \to \Delta_1, \Delta_2}.$$

は $\mathbf{K}(\Gamma, A+B \to \Delta)$ の要素である。

そうではなく、$P + Q \in \Gamma$ または $P * Q \in \Delta$ のときに、$P + Q$ や $P * Q \in \Delta$ を分解して、$\Gamma_1, \Gamma_2, \Delta_1, \Delta_2$ を作ることが出来れば、証明を次のように作ることが出来る。

$$\cfrac{\cfrac{T_1}{\Gamma_1, P, A + B \to \Delta_1} \qquad \cfrac{T_2}{\Gamma_2, Q, A + B \to \Delta_2}}{\Gamma_1, \Gamma_2, P + Q, A + B \to \Delta_1, \Delta_2}$$

は $\mathbf{B}(\Gamma, A+B \to \Delta)$ の要素となる。

- $\nu(\Gamma \to A * B, \Delta) = n+1$ のときは、$\nu(\Gamma, A+B \to \Delta) = n+1$ のときと同様である。

5 結論

ここでは、2 つの形式的体系 $\mathbf{CLL}_0$ と $\mathbf{tCLC}_0$ について調べた。そして、一つの線形論理の命題の証明を構成する "引き戻し法" を得た。その方法として、古典論理上同型で、かつ線形論理の命題の証明を構成するために有用な固有の順序を推論規則に持つ証明を列挙した。

参考文献

[1] *OTTER2 Users Manual*, 1991.

[2] Kosta Dosěn. Nonmodal classical linear predicate logic is a fragmanet of intuitionistic linear logic. *Theoretical Computer Science*, pp. 207–214, 1992.

[3] Jean-Yves Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, pp. 1–102, 1987.

[4] Ken Hirose. *An approach to proof checker*. No. 233 in Lecture note in Computer Science. Springer–Verlag, 1986.

[5] Ken Hirose, Katsuhiko Kakehi, et al. Proof procedure reflecting mathematical structures in theorem proving. In *Proceedings of 3rd Asian Logic Conference*, 1990.

[6] Hirotaka Kikyo. An implementation of a theorem proving system based on proof procedures using knoledge on mathematical structures. *Bulletin of The Centre for Informatics*, Vol. 7, , 1988.

[7] Eiji Kiriyama and Hiroakira Ono. The contruction rule and decision problems for logics without structural rules. *Studia Logica*, 1991.

[8] P.D. Lincoln, A.Scedrov, and N.Shankar. Decision problems for propositional linear logic. In *31st Annual IEEE Symposium on foundations of Computer Science*, St. Louis, Missouri, Octorber 1990.

[9] Hiroakira Ono. Structural rules and a logical hierarchy. In P.P.Petcov, editor, *Mathematical Logic*, pp. 95–104. Plenum Press, 1990.

[10] Andre Scedrov. A brief guide to linear logic. annoymous FTP Service, ftp@cis.upen.edu, 1992.

[11] Troelstra Anne Sjerp. *Lectures on Linear Logic*, Vol. 23 of *CSLI Lecture Notes*. Center for the Study of Language and Infomation, 1992.

[12] SYSTEM5. 論理体系 CLC. 数学セミナー, 1986.

[13] 桐山 栄治, 有川 節夫, 小野 寛晰. 弱化規則を持たない直観主義命題論理における決定手続の計算量, 1991.

[14] 西村敏男. 定理の証明. 情報処理, Vol. 24, No. 3, pp. 267–276, 1983.

[15] 辰己丈夫. Kernel prover - kp の設計.

[16] 島内剛一. 証明のプログラミング. 数学, Vol. 15, No. 11, pp. 646–651, 1963.

[17] 大芝猛. 自動証明において自然な三段論法を導入するアルゴリズム. アルゴリズム, No. 22-9. 情報処理学会, 1991.