プログラミング－言語・基礎・実践－　20－2
（１９９５．　１．　２７）

項書換え系の合流性を保存する合併条件について

北原 彰　酒井 正彦　外山 芳人

北陸先端科学技術大学院大学
923-12 石川県能美郡辰口町旭台 15

“直和という条件のもとでの合併は合流性を保存する”という結果が知られて以来、項書換え系のモジュラ性が注目されている。特に、単純停止性については直和だけでなく、関数記号の共有を許す様々な枠組で研究が進んでいる。しかしながら、合流性に関しては直和以外の研究はあまりなされていない。本稿では関数記号の共有を許す合併で書換え系が合流性を保存するための十分条件を示し、合流性をモジュラにする新しいクラスを提案する。

On the modularity of confluent term rewriting systems with shared constructors

Akira Kitahara　Masahiko Sakai　Yoshihito Toyama

JAIST
15 Asahidai Tatsunokuchi-machi Ishikawa, 923-12, Japan
e-mail: {kitahara, sakai, toyama}@jaist.ac.jp

Modularity of term rewriting systems recently has caught much attention since it was observed that the disjoint combination of term rewriting systems preserves the confluence property. Especially, the modularity of simple termination has been studied not only for the disjoint combination but also for other combinations which permit systems to share function symbols. However, there are few results which relax the disjoint limitation for the modularity of confluence. In this paper, we present a sufficient condition for the modularity of confluent term rewriting systems with shared constructors.

1 はじめに

項書換え系 (TRS) とは、等式によって表現される計算の世界を取り扱うための数学的なモデルであり、関数型などのプログラミング言語やプログラムの変換・検証、定理自動証明などの理論的基礎として広く研究されている [3]。特に、項書換え系の合流性 (Church-Rosser 性) はもっとも重要な理論的性質の一つとして多くの研究がなされてきた [2][3][5][10]。

一方、合流性を直接示すことが難しい書換え系を解析する方法としてモジュラ性の利用が提案されている [11]。すなわち、項書換え系 $(\mathcal{F}_1, \mathcal{R}_1)$ と $(\mathcal{F}_2, \mathcal{R}_2)$ において、$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \phi$ならば次のことが成り立つ。

「$(\mathcal{F}_1, \mathcal{R}_1)$ と $(\mathcal{F}_2, \mathcal{R}_2)$ が合流する $\Leftrightarrow$ $(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2, \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)$ は合流する」

このとき合流性はモジュラであるという [4][11]。

項書換え系を分割統治することは、部分となるシステムを組み合わせて大きなシステムを構成する一般的なプログラミング手法の理論的背景になる。このため、モジュラ性の直和条件を弱める研究が停止性に関して行なわれてきた [7][6][9]。しかし、合流性に関しては関数記号を共有した場合の反例が知られているため [7]、直和を弱める研究はあまりなされていない。

本稿では、関数記号の共有を許す項書換えシステムに対して合流性を保存する合併条件を提案し、[4] の証明手法を使って合流性がモジュラとなる新しい項書換え系のクラスを示す。

2 項書換え系

本節では項書換え系の基本事項について説明する。詳細については [2][3] を参照してほしい。

項書換え系 (TRS) とは $F, G, H, I, \ldots$ などの関数記号の集合 $\mathcal{F}$と書換え規則の集合 $\mathcal{R}$ の順序対 $(\mathcal{F}, \mathcal{R})$ で、$\mathcal{R}$ の任意の書換え規則 $l \triangleright r$は次の条件を満たす項と項の順序対である。

- 左辺 lは変数でない。
- 右辺 rに現れている変数は、左辺 lに現れている。

ここで、項とは $\mathcal{F}$と $\mathcal{F} \cap \mathcal{V} = \phi$である変数の集合 $\mathcal{V}$によって帰納的に定義される。すなわち、任意の変数は項であり、かつ $n(\geq 0)$ 引数の関数記号 Fと項 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ で構成される $F(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ も項である。$\mathcal{F}$と $\mathcal{V}$から構成される項の集合を $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ と書く。特に、$\mathcal{F}$のみによって構成される項の集合を $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ と書き、その元を定項と呼ぶ。例えば $E(A, B)$ などは定項である。項と項の恒等関係は $\equiv$を用いる。任意の項 t の最外記号を返す関数は以下の様に定義できる。

$$root(t) = \begin{cases} F & if\ t \ \equiv \ F(t_1, t_2, \cdots, t_n) \quad with\ n \geq 0. \\ x & if\ t \ \equiv \ x \ \in \ \mathcal{V}. \end{cases}$$

文脈は関数記号の集合 $\mathcal{F}$に特別な関数記号 □ を加えた項の集合 $\mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \{\square\}, \mathcal{V})$ の元のことで、□ を n 個持つ文脈を $C[, \cdots,]$ と書き、$C[\ ]$ と書いたならば □ をただ一つだけ持つ文脈を表している。n 個 □ を持つ文脈 $C[, \cdots,]$ の □ を左から順に $t_1, t_2, \cdots, t_n$と置き換えた項を $C[t_1, t_2, \cdots, t_n]$ と書く。この文脈の集合を項の集合とは区別するために $\mathcal{T}_c(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ と書く。項 t, s の間にある文脈 $C[\ ]$ が存在して、$t \equiv C[s]$ が成り立つとき、s を t の部分項と呼び、$s \subseteq t$ と書く。この二項関係 $\subseteq$は $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ 上の半順序である。

項書換え系 $(\mathcal{F},\mathcal{R})$ と項 t に対して、$\mathcal{R}$ の元 $l \rhd r$ と文脈 $C[\ ]$、そして代入と呼ばれる変数から項への写像 θ が存在して、$t \equiv C[\theta(l)]$ ならば t と、$\theta(l)$ を $\theta(r)$ に置き換えた項 $C[\theta(r)] \equiv s$ との二項関係を書換えと呼び、$t \rightarrow_{\mathcal{R}} s$ と書く。また、$\theta(l)$ をリデックスと呼び、左辺 l の変数以外の部分を書換え $t \rightarrow_{\mathcal{R}} s$ のリデックス・パターンと呼ぶ。リデックスが存在しない項は正規形という。

書換えの反射推移閉包は $\xrightarrow{*}_{\mathcal{R}}$ と表し、反射推移、及び、対称的閉包は $=_{\mathcal{R}}$ と書き、特に混乱の恐れがないときは、$\mathcal{R}$ を略して、$\xrightarrow{*}$, $=$ とのみ書く。ここで、$t \xrightarrow{*} s$ ならば $t \equiv u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \cdots \rightarrow u_k \equiv s$ となる項の列が存在するが $(k \geq 1)$、$k > 1$ の項の列 $u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \cdots \rightarrow u_k$ を特に書換え列と呼ぶ。また、t と s の間にある項 u が存在して、$t \xrightarrow{*} u \xleftarrow{*} s$ となる書換え列が存在するとき $t \downarrow s$ と書く。

停止性がある項書換え系 $(\mathcal{F},\mathcal{R})$ では $t \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \cdots$ となる無限列が存在しない。また、項 t が合流性を持つとは、$s \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} s'$ となる任意の書換え列で $s \downarrow s'$ が満たされることである。$\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ 上の任意の項が合流するとき、項書換え系 $(\mathcal{F},\mathcal{R})$ は合流性 (Church-Rosser 性) をもつという。合流性をもつ書換え系 $(\mathcal{F},\mathcal{R})$ では、$\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ 上の任意の項 t, s に対して、$t = s$ ならば、$t \downarrow s$ が成立する。

3 擬定項な構成子共有システム

本稿では合流性を保存する合併として、栗原らが提案した構成子共有システム [7] を制限した次の様な条件を考える。

定義 1 項書換え系 $(\mathcal{F}_1,\mathcal{R}_1),(\mathcal{F}_2,\mathcal{R}_2)$ に対して、$\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ に含まれる任意の書換え規則 $l \rhd r$ が次の条件を満たすとき、項書換え系 $(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2,\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)$ を**擬定項な構成子共有システム**と呼ぶことにする。

(条件 1) $root(l) \notin \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$.

(条件 2) l または r の部分項 s が、$root(s) \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ ならば s は定項.

ここで、条件 1 または、条件 2 の一方だけ満たしても合流性が保存されない例を以下に示す。

例 1 条件 2 のみでは合流性が保存されないことは $\mathcal{R}_1 = \{A \rhd_1 B\}$, $\mathcal{R}_2 = \{A \rhd_2 C\}$ から明らかである。一方、条件 1 のみを満たしても合流性が保存されないことは栗原ら [7] によって示されている。さらに、条件 1 を強めて、共有する関数記号が書換え規則の右辺にしか現れないという強い制限を付け加えても以下の様な反例が存在する。$\mathcal{F}_1 = \{A, B, C, F, G, H\}$, $\mathcal{F}_2 = \{C, P\}$ とする。

$$\mathcal{R}_1 \left\{ \begin{array}{rcl} F(x,x) & \rhd_1 & A \\ F(x,G(x)) & \rhd_1 & B \\ H(x,x) & \rhd_1 & G(H(x,C(x))) \end{array} \right. \qquad \mathcal{R}_2 \left\{ \begin{array}{rcl} P & \rhd_2 & C(P) \end{array} \right.$$

このとき、$(\mathcal{F}_1,\mathcal{R}_1)$ は停止し、重なりがないので合流性する [5]。$(\mathcal{F}_2,\mathcal{R}_2)$ は左線形で重なりがないので合流する [10]。また、$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{C\}$ より、条件 1 を満足する。しかし、項 $F(H(P,P),H(P,P))$ は $(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2,\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)$ において二つの正規形 A, B をもつので合流しない。ここで、重なりとは書換え系 $(\mathcal{F},\mathcal{R})$ のある書換え規則 $l \rhd r$, $l' \rhd r'$ の間に、$s \notin \mathcal{V}$ となる l の部分項 s と代入 θ, θ' が存在して、$\theta(s) \equiv \theta'(l')$ が成り立つことで、$(\mathcal{F}_1,\mathcal{R}_1)$ ではその様な書換え規則が存在しない ($l \equiv s \equiv l'$ かつ $r \equiv r'$ の場合は重なりと考えない)。一方、左線形とは書換え系の任意の規則 $l \rhd r$ の左辺 l に同じ変数が 2 回以上現れていないことである。

以下では、擬定項な構成子共有システムが合併によって合流性を保存することを証明し、モジュラ性を持つ新しい書換え系のクラスであることを明らかにする。そのため、$(\mathcal{F}_1,\mathcal{R}_1),(\mathcal{F}_2,\mathcal{R}_2)$ はそれぞれ合流性をもつ書換え系で、その和 $(\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2,\mathcal{R}_1\cup\mathcal{R}_2)$ は擬定項な構成子共有システムであると仮定する。また、本稿での証明は [7] で提案された項の階数の定義を参考に、[4] の手法に改良を加えて行っている。

定義 2 $t,s\in\mathcal{T}(\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2,\mathcal{V})$ とする。

(1) 層の定義

$t\equiv C[t_1,t_2,\cdots,t_n]$ かつ $C[,\cdots,]\not\equiv\Box$ とする。このとき、$root(t)\notin\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2$ かつ $C[,...,]\in\mathcal{T}_c(\mathcal{F}_a,\mathcal{V})$ かつ $root(t_i)\in\mathcal{F}_b-(\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2)$ ならば $t\equiv C[\![t_1,t_2,...,t_n]\!]$ と書く $(a,b\in\{1,2\}$, $a\neq b)$。また、$root(t)\in\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2$ のときも、$C[,...,]\in\mathcal{T}_c(\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2,\mathcal{V})$、かつ $root(t_i)\in\mathcal{F}_a-(\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2)$ ならば $t\equiv C[\![t_1,t_2,...,t_n]\!]$ と書く $(a\in\{1,2\})$。

(2) 層の階数 $(rank)$ の帰納的定義

$$rank(t)=\begin{cases}0 & if\ t\in\mathcal{T}(\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2,\mathcal{V}).\\ 1 & if\ t\in\mathcal{T}(\mathcal{F}_1,\mathcal{V})\cup\mathcal{T}(\mathcal{F}_2,\mathcal{V})\\ & \quad and\ t\notin\mathcal{T}(\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2,\mathcal{V}).\\ max\{rank(t_i)\mid 1\le i\le n\} & if\ root(t)\in\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2\\ & \quad and\ t\equiv C[\![t_1,t_2,...,t_n]\!]\ with\ n\ge 1.\\ 1+max\{rank(t_i)\mid 1\le i\le n\} & if\ root(t)\notin\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2\\ & \quad and\ t\equiv C[\![t_1,t_2,...,t_n]\!]\ with\ n\ge 1.\end{cases}$$

(3) 特別部分項の多重集合 $S(t)$ を以下の様に決める ([ ] は多重集合を表す)。

$$S(t)=\begin{cases}[\ ] & if\ rank(t)=0.\\ [\,t\,] & if\ root(t)\notin\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2\ and\ rank(t)=1.\\ \bigcup_{i=1}^{n}S(t_i) & if\ root(t)\in\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2\ and\ t\equiv C[\![t_1,t_2,...,t_n]\!]\ with\ n\ge 1.\\ [\,t\,]\cup\bigcup_{i=1}^{n}S(t_i) & if\ root(t)\notin\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2\ and\ t\equiv C[\![t_1,t_2,...,t_n]\!]\ with\ n\ge 1.\end{cases}$$

(4) $root(t)\notin\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2$ かつ $t\equiv C[\![t_1,t_2,\cdots,t_n]\!]$ $(n\ge 1)$ ならば項 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ を項 t のエイリアンと呼ぶ。また、$root(t)\in\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2$ かつ $t\equiv C[\![t_1,t_2,\cdots,t_n]\!]$ $(n\ge 1)$ ならば項 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ のそれぞれのエイリアンは項 t のエイリアンであるとする。

(5) $s\to t$ でリデックスの出現位置が s のエイリアンにあるならば $s\to^{i}t$ と書き、内部書換えと呼ぶ。それ以外のときは $s\to^{o}t$ と書き、外部書換えと呼ぶ。

定義 3 書換え $s\to t$ において、項 s の特別部分項の元 $s'(\in S(s))$ が存在して、$s\equiv C[s']\to C[t']\equiv t$ かつ $rank(s')>rank(t')$ ならば $s\to t$ を破壊的書換えと呼ぶ。

定義 4 ある項から始まるすべての書換え列において破壊的な書換えがないならば、
その項を層保存項と呼び、項のエイリアンがすべて層保存項ならばその項を内部層保存項と呼ぶ。

定義 5 $\alpha = < a_1, a_2, \cdots, a_n >$, $\beta = < b_1, b_2, \cdots, b_n >$ の二つの項の列があり、$a_i \equiv a_j$であるときはいつでも $b_i \equiv b_j$が成立するならば、$\alpha \propto \beta$と書くことにする $(1 \leq i, j \leq n)$。

命題 1 $root(s) \notin \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$かつ、$s \equiv C[\![s_1, s_2, \cdots, s_n]\!] \to^o C'[s_{j_1}, s_{j_2}, \cdots, s_{j_p}] \equiv t$ ならば、$< s_1, s_2, \cdots, s_n > \propto < t_1, t_2, \cdots, t_n >$ であるような任意の項の列 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ で $s' \equiv C[t_1, t_2, \cdots, t_n] \to^o C'[t_{j_1}, t_{j_2}, \cdots, t_{j_p}] \equiv t'$ と書換えできる $(j_k \in \{1, \cdots, n\})$。

証明 $[\![\ ]\!]$ の定義より明らか 。□

補題 1 $t \to s \Longrightarrow rank(t) \geq rank(s)$.

証明 t の $rank$に関する帰納法による。□

定義 6 書換え列 $s \xrightarrow{*} t$ において、項 s の特別部分項の元 $s'(\in S(s))$ が存在して、$s \equiv C[s'] \xrightarrow{*} C[t'] \equiv t$ かつ $rank(s') > rank(t')$ ならば s と t の二項関係を**層破壊書換え**と呼び $s \to_c t$ と書く。また、s'を s の**層破壊リデックス**という。

命題 2

(1) $s \to_c t \Longrightarrow s \xrightarrow{*} t$.

(2) ある項が層保存項である $\Longleftrightarrow$ その項には層破壊リデックスがない.

証明 定義より自明。□

命題 3 全ての項は書換えによって層保存項に到達する。

証明 任意の項 t $(\in \mathcal{T}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2, \mathcal{V}))$ に $\|t\| = [\ rank(t') \mid t' \in S(t)]$ という順序をつける。このとき $\|t\|$ は自然数上の多重集合で、その二項関係 $\gg$ は整礎である [1]。層破壊書換えの定義より、任意の $t \to_c s$ には、破壊的書換えがある (命題 2(2))。よって、$\|t\| \gg \|s\|$ なので $\to_c$ の無限列があることは $\gg$ が整礎であることに矛盾する。ゆえに、任意の項 を 可能な限り層破壊書換え$\to_c$すると、層破壊リデックスを持たない項が現れる。この項が命題 2より層保存項である。□

4 内部層保存書換え列の合流性

擬定項な構成子共有システムが一般の書換え列で合流性を持つことを証明する前に、内部層保存項からの任意の書換え列で合流することを、[4] の証明手法を拡張してすることによって導く。

定義 7 Sは合流性を持つ項の有限集合とする。そのとき $\hat{S}$ は 以下の条件を満たす項の集合でSの**表現集合**という。

(1) Sの任意の元 s に対して $s \xrightarrow{*} \hat{s}$ となる $\hat{s} \in \hat{S}$ はただ一つある。このとき $\hat{s}$ を s の**表現**という。

(2) Sの任意の元 s, s'について、$s \downarrow s'$ならば s と s'の表現は等しい。

命題 4 合流性を持つ項の有限集合には表現集合がある。

証明 [4] 参照 □

定義 8 Sを合流性を持つ項の有限集合とする。項 u に現れるSの要素の中で、$\subseteq$に関する極大の項を表現で置き換えた項を$\tilde{u}$と書く ($n \geq 0$)。

Sの元のうちで項uの極大な部分項をそれぞれ $u_1, u_2, \cdots, u_n$ とすると、表現の定義より、

$$u \equiv C[u_1, u_2, \cdots, u_n] \xrightarrow{*} C[\hat{u}_1, \hat{u}_2, \cdots, \hat{u}_n] \equiv \tilde{u}$$

である ($\hat{u}_1, \hat{u}_2, \cdots, \hat{u}_n \in \hat{\mathrm{S}}$)。

定義 9 $t \equiv C[s]$ とする。このとき、$t \xrightarrow{*} t' \equiv C'[s']$ となる s' に対して、$s \xrightarrow{*} s'$ となる書換え列が存在するならば、s' を s の子孫と呼ぶ。

擬定項な構成子共有システムでは、書換え規則の先頭の項 t の $root$ が $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$であっても書換えには全く関わらない。よって、$t \equiv C[\![t_1, t_2, \cdots, t_n]\!]$ となる項 $t_1, t_2, \cdots, t_n$の各々が合流性を持つならば、項 t は合流性をもつ。そこで、以後は書換え列の先頭の項の $root$ が $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$の元でない書換え列のみを考える。

補題 2 内部層保存項からの書換え列は合流する。

証明 項のランクに関する帰納法によって、任意の項 $t, t_1, t_2 (\in \mathcal{T}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2, \mathcal{V}))$ に対して、$t_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} t_2$ならば、$t_1 \downarrow t_2$であることを示す。$rank(t) \leq 1$ のとき、$\mathcal{R}_1$または$\mathcal{R}_2$の合流性より明らか。
$rank(t) = k (> 1)$ のとき、対称性より $root(t) \in \mathcal{F}_1 - (\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)$ としても一般性は失われない。
ここで、項 $t \equiv C[\![e_1, e_2, \cdots, e_m]\!]$ としたときの文脈 $C[, \cdots,]$ に現れる $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$の元の入れ子の最大数 h に関する帰納法を行なう。

Base Step. $h = 0$ のとき。すなわち、$C[, \cdots,]$ には $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$の元が現れない場合。

項 t の任意のエイリアン e と $e \xrightarrow{*} s$ となる任意の書換え列に対して、e が層保存項であることから、$root(s) \in \mathcal{F}_2$ かつ $s \notin \mathcal{T}(\mathcal{F}_1, \mathcal{V})$。また、前提より書換え規則の共有する関数記号で始まる部分項は定項である。これらのことから、書換え列 $t_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} t_2$におけるリデックス・パターンはエイリアンの子孫の内部にあるか、または、外部にあるかのいずれかで内部と外部の両方に跨ることはない。

そこで、書換え列 $t_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} t_2$におけるエイリアンの子孫の集合をSとすると、Sの任意の元 s は $rank(s) < k$なので帰納法の仮定より合流し、s には表現が存在する。

このとき、$\tilde{t}_1 \xleftarrow{*}{}^{o}_{\mathcal{R}_1} \tilde{t} \xrightarrow{*}{}^{o}_{\mathcal{R}_1} \tilde{t}_2$となることを示す。$u \to u'$を $t_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} t_2$に現れる任意の書換えとすると、項 u の $root$ の関数記号によって場合分けする。

(1) $root(u) \in \mathcal{F}_1 - (\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)$ のとき。$u_1, u_2, \cdots, u_n$をそれぞれ u に現れるエイリアンの子孫の極大項とすると、ある文脈 $C'[, \cdots,]$ に対して、$u \equiv C'[u_1, u_2, \cdots, u_n]$ と書ける。このとき、書換え $u \to u'$ のリデックスの位置によって場合分けする。

(1.1) リデックスがエイリアンの子孫の外部にあるとき。命題1と同様に、全ての部分項 u_iを表現$\hat{u}_i$に置き変えても書換えられる ($1 \leq i \leq n$)。また、$root(u) \in \mathcal{F}_1 - (\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)$ より、$C'[, \cdots,] \in \mathcal{T}_c(\mathcal{F}_1, \mathcal{V})$。よって、$\tilde{u} \xrightarrow{o}_{\mathcal{R}_1} \tilde{u}'$。

(1.2) リデックスがエイリアンの子孫の内部あるとき。すなわち、$u \equiv C'[u_1, u_2, \cdots, u_i, \cdots, u_n] \to C'[u_1, u_2, \cdots, u'_i, \cdots, u_n] \equiv u'$のとき $(1 \le i \le n, u_i \to u'_i)$、エイリアンの子孫 u_i, u'_iの表現は等しいので、$\tilde{u} \equiv C'[\hat{u}_1, \hat{u}_2, \cdots, \hat{u}_i, \cdots, \hat{u}_n] \equiv \tilde{u}'$。

(2) $root(u) \notin \mathcal{F}_1 - (\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)$ ならば、書換え列の先頭の項 $t \equiv C[\![e_1, e_2, \cdots, e_m]\!]$ となる文脈 $C[, \cdots,]$ には共有する関数記号がないことから、u はエイリアンの子孫であるか、または、$root(u)$ は $\mathcal{R}_1$ による書換えで発生した共有する関数記号である。u がエイリアンの子孫ならば u と u'の表現は等しいので、$\tilde{u} \equiv \tilde{u}'$。一方、$root(u)$ が $\mathcal{R}_1$による書換えで発生した共有する関数記号ならば、書換え規則の共有している関数記号で始まる部分項は定項なので、$u \in \mathcal{T}(\mathcal{F}_1, \mathcal{V})$。また、$u, u'$にはエイリアンの子孫は存在しない。故に、$\tilde{u} \equiv u \overset{o}{\to}_{\mathcal{R}_1} u' \equiv \tilde{u}'$。

以上より、$t_1 \overset{*}{\leftarrow} t \overset{*}{\to} t_2$ ならば、$\tilde{t}_1 \overset{*o}{\leftarrow}_{\mathcal{R}_1} \tilde{t} \overset{*o}{\to}_{\mathcal{R}_1} \tilde{t}_2$ となる。ここで 、$\to_{\mathcal{R}_1}$ は仮定より合流するので、$\tilde{t}_1 \downarrow \tilde{t}_2$。よって、$t_1 \overset{*}{\to} \tilde{t}_1 \downarrow \tilde{t}_2 \overset{*}{\leftarrow} t_2$。

Induction Step. $h = k(> 0)$ の場合。すなわち、$C[, \cdots,]$ に $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$の関数記号が最大 k回入れ子になっているとき。

t の部分項 s の $root$ が $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ならば、ある文脈 $C''[, \cdots,] \in \mathcal{T}(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2, \mathcal{V})$ に対して、$s \equiv C''[\![s_1, s_2, \cdots, s_n]\!]$ と書ける $(n \ge 0)$。このとき、部分項 $s_1, s_2, \cdots, s_n$の中で、$root(s_i) \in \mathcal{F}_1 - (\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)$ となる項 s_iが存在しても、t に現れる $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$の要素の入れ子の最大数より、$s_i$に現れる $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$の要素の入れ子の最大数は真に小さいので、帰納法仮定より s_iは合流する。よって、s は合流する。

ここで、書換え列の先頭の項 t のエイリアン e、または、$e \notin \mathcal{T}(\mathcal{F}_1, \mathcal{V})$ かつ $root(e) \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$を満たす t の部分項 e の中で、項 t における極大項の集合を E とする。このとき、Base Step と同様に、E の任意の元 e と $\mathcal{T}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2, \mathcal{V})$ 上の項 s に対して、$e \overset{*}{\to} s$ となる書換え列が存在するならば、$root(s) \in \mathcal{F}_2$かつ $s \notin \mathcal{T}(\mathcal{F}_1, \mathcal{V})$。書換え規則の共有している関数記号で始まる部分項は定項なので、書換え列 $t_1 \overset{*}{\leftarrow} t \overset{*}{\to} t_2$ のリデックス・パターンは E の子孫の内部にあるか、または、外部のいずれかである。そこで、書換え列 $t_1 \overset{*}{\leftarrow} t \overset{*}{\to} t_2$における E の子孫の集合を S とすると、S の任意の元は合流性を仮定できるので表現が存在する。

$t_1 \overset{*}{\leftarrow} t \overset{*}{\to} t_2$ ならば、$\tilde{t}_1 \overset{*o}{\leftarrow}_{\mathcal{R}_1} \tilde{t} \overset{*o}{\to}_{\mathcal{R}_1} \tilde{t}_2$となることを示す。$t_1 \overset{*}{\leftarrow} t \overset{*}{\to} t_2$に現れる任意の書換えを $u \to u'$ とする。

(1) $root(u) \in \mathcal{F}_1 - (\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)$ のとき、リデックスが E の子孫の内部にあるか、外部にあるかで場合分けすると、Base Step と同様に $\tilde{u} \equiv \tilde{u}'$、または、$\tilde{u} \overset{o}{\to}_{\mathcal{R}_1} \tilde{u}'$。

(2) $root(u) \notin \mathcal{F}_1 - (\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)$ ならば u は S の元であるか、または、$root(u)$ は $\mathcal{R}_1$よる書換えで出現した共有する関数記号である。よって、u が S の元ならば、u, u'の表現は等しいので、$\tilde{u} \equiv \tilde{u}'$。一方、$root(u)$ が $\mathcal{R}_1$よる書換えで出現した共有する関数記号ならば、$u \in \mathcal{T}(\mathcal{F}_1, \mathcal{V})$ より、$\tilde{u} \overset{o}{\to}_{\mathcal{R}_1} \tilde{u}'$。

以上より、$t_1 \overset{*}{\leftarrow} t \overset{*}{\to} t_2$ ならば、$\tilde{t}_1 \overset{*o}{\leftarrow}_{\mathcal{R}_1} \tilde{t} \overset{*o}{\to}_{\mathcal{R}_1} \tilde{t}_2$ となる。

よって、Induction Step の場合も $\to_{\mathcal{R}_1}$の合流性より、$t_1 \overset{*}{\to} \tilde{t}_1 \downarrow \tilde{t}_2 \overset{*}{\leftarrow} t_2$。故に、補題が成り立つ。□

5 一般書換え列の合流性

次に、内部層保存を仮定しないで、擬定項な構成子共有システムが合併によって合流性を保存することを証明する。そのために、$\mathcal{T}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2, \mathcal{V})$ 上の任意の項 t の証人 $\dot{t}$ を次の様に定義する。

$$\dot{t} = \begin{cases} t & if\ rank(t) \leq 1. \\ C[\dot{t}_1, \dot{t}_2, \cdots, \dot{t}_n] & if\ root(t) \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2\ and\ t \equiv C\ \llbracket\ t_1, t_2, ..., t_n\ \rrbracket\ with\ n\ \geq\ 1. \\ C[u_1, u_2, \cdots, u_n] & if\ root(t) \notin \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2\ and\ t \equiv C\ \llbracket\ t_1, t_2, ..., t_n\ \rrbracket\ with\ n\ \geq\ 1. \end{cases}$$

ここで、すべての u_iは $\rightarrow_c$ に関する項 t_iの正規形で、$< t_1, t_2, \cdots, t_n > \propto < u_1, u_2, \cdots, u_n >$ を満たすものとする。このとき、命題3より、全ての項は層保存項に到達することができるので任意の項には証人が存在することになる。

補題 3 $s \rightarrow t$ において、項 s のエイリアンが合流するならば、$\dot{s} \downarrow \dot{t}$。

証明 項 s の $root$ の関数記号によって場合分けする。

(1) $root(s) \notin \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$の場合。$s \equiv C\ \llbracket\ s_1, s_2, \cdots, s_i, \cdots, s_n\ \rrbracket$ とする。項 s には証人 $\dot{s}$ が存在するので、適当な項 $u_1, u_2, \cdots, u_i, \cdots, u_n$に対して、$\dot{s} \equiv C[u_1, u_2, \cdots, u_i, \cdots, u_n]$ と書ける。このとき、項 s のリデックスの位置によって場合分けする。

(1.1) 外部書換えの場合。$s \rightarrow^o t$ ならば $t \equiv C'[s_{k_1}, s_{k_2}, \cdots, s_{k_p}]$ と書ける ($p \geq 0, k_j \in \{1, \cdots, n\}$)。
そのとき、適当な項 $v_{k_1}, v_{k_2}, \cdots, v_{k_p}$が存在して、証人は $\dot{t} \equiv C'[v_{k_1}, v_{k_2}, \cdots, v_{k_p}]$ となる。
また、$< s_1, s_2, \cdots, s_n > \propto < u_1, u_2, \cdots, u_n >$より、
$\dot{s} \equiv C[u_1, u_2, \cdots, u_n] \rightarrow^o C'[u_{k_1}, u_{k_2}, \cdots, u_{k_p}]$ と書換えることができる (命題 1)。
仮定より、s_iからの書換えは合流するので、$u_i \downarrow v_i (1 \leq i \leq n)$。 よって、$\dot{s} \downarrow \dot{t}$。

(1.2) 内部書換えの場合。$s \rightarrow^i t$ ならば、$t \equiv C[s_1, s_2, \cdots, t_i, \cdots, s_n]$ ($s_i \rightarrow t_i, 1 \leq i \leq n$)。
このとき、適当な項 $w_1, w_2, \cdots, w_i, \cdots, w_n$が存在して、証人は $\dot{t} \equiv C[w_1, w_2, \cdots, w_i, \cdots, w_n]$ となる。s_iから、始まる書換え列は合流するので、$u_i \downarrow w_i$。 よって、$\dot{s} \downarrow \dot{t}$。

(2) $root(s) \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$の場合。$s \equiv C\ \llbracket\ s_1, s_2, \cdots, s_i, \cdots, s_n\ \rrbracket$ とする。このとき、s の証人が存在して、$\dot{s} \equiv C[\dot{s}_1, \dot{s}_2, \cdots, \dot{s}_i, \cdots, \dot{s}_n]$ と書ける。$\llbracket\ \ \rrbracket$ の定義より、$C[, \cdots,] \in \mathcal{T}_c(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2, \mathcal{V})$。
よって、$t \equiv C[s_1, s_2, \cdots, t_i, \cdots, s_n]$ $(1 \leq i \leq n, s_i \rightarrow t_i)$ と書ける。
このとき、$root(s_i) \notin \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$なので、(1) より $\dot{s}_i \downarrow \dot{t}_i$。 よって、$\dot{s} \downarrow \dot{t}$。□

補題 4 擬定項な構成子共有システムは合併で合流性を保存する。

証明 文献 [4] と同様に、任意の項 t の層の数に関する帰納法による。$rank(t) \leq 1$ のとき $\mathcal{R}_1$または$\mathcal{R}_2$の合流性より明らか。$rank(t) = k (> 1)$ のとき、$\mathcal{T}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2, \mathcal{V})$ 上の任意の項 t_1, t_2 に対して、$t_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} t_2$ となる書換え列が存在するならば、図 1 の様に合流させることができる。つまり、補題3より内部層保存項の列に書換えでき、補題2より内部層保存項の書換え列は $t_1 \downarrow t_2$。故に、本補題が成り立つ。□

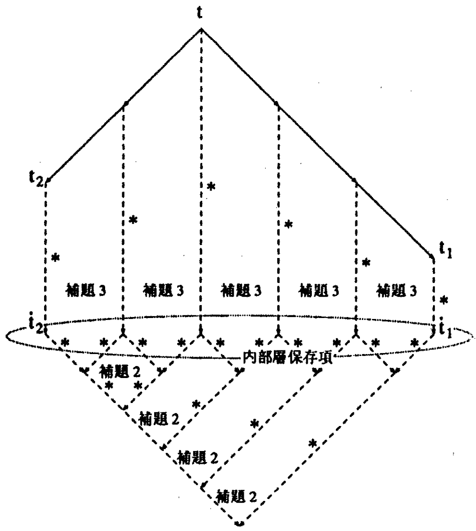

図 1 一般書換え列における合流性の概略図

定理 1 擬定項な構成子共有システムにおいて合流性はモジュラである。

証明「$(\mathcal{F}_1,\mathcal{R}_1)$ と $(\mathcal{F}_2,\mathcal{R}_2)$ が合流する$\Leftrightarrow(\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2,\mathcal{R}_1\cup\mathcal{R}_2)$ は合流する」($\Leftarrow$) 明らか、($\Rightarrow$) 補題 4。□

例 2 擬定項な構成子共有システムの例を以下に示す。
$\mathcal{F}_1=\{And,True,False\}$, $\mathcal{F}_2=\{Eq,S,0,True,False\}$ とする。

$$\mathcal{R}_1\left\{\begin{array}{rcl} And(And(x,y),z) & \rhd_1 & And(x,And(y,z)) \\ And(x,y) & \rhd_1 & And(y,x) \\ And(True,y) & \rhd_1 & y \\ And(False,y) & \rhd_1 & False \end{array}\right. \qquad \mathcal{R}_2\left\{\begin{array}{rcl} Eq(x,x) & \rhd_2 & True \\ Eq(S(x),0) & \rhd_2 & False \\ Eq(0,S(y)) & \rhd_2 & False \\ Eq(S(x),S(y)) & \rhd_2 & Eq(x,y) \end{array}\right.$$

このとき、$(\mathcal{F}_1,\mathcal{R}_1)$ は Huet[2] の定理 3.3 より合流し、$(\mathcal{F}_1,\mathcal{R}_2)$ は停止性を仮定できるので Knuth-Bendix[5] より合流する。よって、$(\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2,\mathcal{R}_1\cup\mathcal{R}_2)$ が合流することは定理より明らかである。しかしながら、従来の手法では左線形性も停止性も仮定できない項書換え系なので合流性を示すことは困難である。

6 おわりに

本稿では、関数記号を共有する合併で合流性を保存するための十分条件を考察し、[4] で使われた手法を基に、擬定項な構成子共有システムならば合流性はモジュラになることを明らかにした。今後の研究としては、定項条件を弱めることや単純停止性のモジュラ性に対する研究で行なわれているような、より一般的なモジュラ条件を考察したい。

参考文献

[1] N.Dershowitz and Z.Manna, Proving termination with multiset orderings, *Communication of ACM* **22**(8) (1979) 465-476.

[2] G.Huet, Confluent Reductions : Abstract Properties and Applications to Term Rewriting Systems, *Journal of the ACM* **27** (1980) 797-821.

[3] J.W.Klop, Term Rewriting Systems, *Handbook of Logic in Computer Science vol.II*, (1992) 1-112.

[4] J.W.Klop, A.Middeldorp, Y.Toyama and R.Vrijer, Modularity of confluence : A simplified proof, *Information Processing Letters* **49** (1994) 101-109.

[5] D.E.Knuth and P.G.Bendix, Simple word problems in universal algebras, in J.Leech, ed., *Computational problems in abstract algebras, Pergamon Press* (1970) 263-279.

[6] M.R.K.Krishna Rao, Simple Termination of Hierarchical Combinations of Term Rewiting Systems, *Lecture Notes in Computer Science* **789** (1994) 203-223.

[7] M.Kurihara and A.Ohuchi, Modularity of simple termination of term rewriting systems with shared constructors, *Theoretical Computer Science* **103** (1992) 273-282.

[8] A.Middeldorp, Modular properties of term rewriting systems, *Ph.D. thesis, Vrije Universiteit, Amsterdam* (1990).

[9] E.Ohlebusch, Modular Properties of Composable Term Rewriting Systems, *Ph.D. thesis, Universitaet Bielefeld* (1994).

[10] B.K.Rosen, Tree-manipulating systems and Church-Rosser theorems, *Journal of the ACM* **20** (1973) 160-187.

[11] Y.Toyama, On the Church-Rosser property for the direct sum of term rewriting systems, *Journal of the ACM* **34** (1987) 128-143.

[12] Y.Toyama, Counterexamples to termination for the direct sum of term rewriting systems, *Information Processing Letters* **25** (1987) 141-143.