プログラミング-言語・基礎・実践- 21－16
(1995. 3. 10)

ペトリネットのいくつかの性質を保存する縮小変形

中村伸治　　渡辺敏正
広島大学工学部第二類 (電気系)
724 東広島市鏡山一丁目 4-1
(電話) 0824-24-7661 [中村] : 0824-24-7662 [渡辺]
(電子メール)shinji@huis.hiroshima-u.ac.jp : watanabe@huis.hiroshima-u.ac.jp

あらまし　ペトリネットのいくつかの性質を保存するような縮小変形法について議論する．まず，バンドルと呼ぶ部分ネットを定義導入し，与えられたペトリネット内のバンドル（定義域ネット）を他のバンドル（値域ネット）に置き換えることを考える．いくつかの性質を保存するような定義域ネットと値域ネットの対をキットと定義する．具体的には発火系列の存在性及び boundedness がある制限下では保存されているキットを示す．値域ネットのプレース数が極小ないくつかのキットを示し，最後に，キットの適用を反復して縮小変形を行う手法を示す．

キーワード　**ペトリネット，縮小変形，性質の保存，バンドル，キット**

Net Reduction Preserving Some Properties of Petri Nets

Shinji Nakamura and Toshimasa Watanabe

Department of Circuits and Systems, Faculty of Engineering, Hiroshima University,
4-1 Kagamiyama, 1 Chome, Higashi-Hiroshima, 724 Japan
Phone: +81-824-24-7661 (Nakamura) : +81-824-24-7662(Watanabe)
E-mail: shinji@huis.hiroshima-u.ac.jp : watanabe@huis.hiroshima-u.ac.jp

Abstract　The paper introduces *bundles*, which are subnets having special connection structure, and discusses net reduction that preserves some properties of Petri nets by focusing on bundles. We consider replacement of a bundle (called a domain net) in a given Petri net by another one (called a range net) such that some properties, such as existence of certain firable sequences of transitions or some restricted boundedness, are preserved. We call such a pair of bundles a *kit*. Some minimal kits (kits whose range nets have minimal number of places) and an algorithm for net reduction that repeats replacement by kits are shown.

key words　**Petri Nets, Net reduction, Property-preserving, Bundles, Kits**

1 はじめに

ペトリネットとは，プレース及びトランジションと呼ばれる，2種類の頂点からなる有向2部グラフである．ペトリネットは，様々なシステムのモデル化に用いられてきたが，そこでは，各プレースが保持するトークンの分布(マーキングという)を，そのシステムの状態に対応させ，マーキングの変化で，システムの状態の動的変化を表現する．

モデル化後のネットの構造，及び，その解析を容易にするためのモデル化の手法として大別して二つの方向から考えられてきた．一つのアプローチとしてシステムのモデル化により構成されたネット内の一つのトランジション(プレースの場合も考えられる)を，別のペトリネットで置き換えることにより，より細部をモデル化していく手法がある．この手法では，ペトリネットを階層構造化することにより各階層ごとに解析を行うことにより，全体として解析の容易化を実現する [14, 5, 10, 17].

もう一方のアプローチとしては，システムをできるだけ小さなネット構造で，モデル化することを考える．その際，まずモデル化を行い，そのペトリネットを縮小変形して，ネット構造を小さくしていく．縮小変形を実行することにより，変形前後のペトリネットがともに，ある一つの性質を満たすとき，その縮小変形は，その性質を保存するという．ここで言うペトリネットの持つ性質としては，liveness，boundedness 等は最も基本的である [12]. liveness 及び boundedness 等の性質そのものに関する研究として [1, 2, 9, 13, 15]，それらの性質を保存したペトリネットの変形に関する研究として [18, 8, 6, 11, 7, 4, 14, 16, 3]. がある．

本研究では，後者のアプローチに属する．まず，バンドルと呼ぶペトリネットの部分ネットを定義導入し，一つのバンドルを他のバンドルに置き換えるためのバンドルの対として縮小変形のキットを定義する．このとき，キットの適用（つまりバンドルの置き換え）による縮小変形の前後で，発火系列の存在性及び boundedness がある制限下では保存されていることを示す．キットの中の置き換え前のネットを定義域ネット，置き換え後のネットを値域ネットと呼ぶ．値域ネットのプレース数が極小のキットを極小キットと呼ぶ．次に，いくつかの極小キットの値域ネットを示し，これらがキットの値域ネットになっていることを示す．最後に，キットの適用を反復してペトリネットの縮小変形を行うためのアルゴリズムを示す．

2 準備

ペトリネット (Petri net) やマーキングなどの基礎的定義及び，本稿の中心的概念であるバンドルの定義を与える．

定義 1 ペトリネット PTN=(P,T,A,W) とマーキング M は，以下のように定義される：

(1) P は，プレースの集合である．
(2) T は，トランジションの集合であり，以下のような条件を満たす：$P \cap T = \emptyset$.
(3) $A \subseteq P \times T \cup T \times P$ は，枝の集合である．なお $(u,v) \in A$ は，u から v への有向枝を表す．
(4) $W : A \to Z^{+} - \{0\}$ は，枝の重みを表す関数であり，正整数をとる．
(5) $M : P \to Z^{+}$ をマーキングと呼び，$M(p)$ $(p \in P)$ はプレース p に含まれるトークン数である．M 中のトークン総数（つまり，すべての $p \in P$ についての $M(p)$ の総和）を $|M|$ と表す．

通常ペトリネットには初期マーキング（M_{ini}と表す）が与えられる．本稿では，以下の記号，用語を用いる．$x \in P \cup T$ に対し，${}^{\bullet}x := \{y \in P \cup T | (y,x) \in A\}$，$x^{\bullet} := \{y \in P \cup T | (x,y) \in A\}$．集合 S, S' に対して，$S \backslash S'$ とは，S の要素から S' の要素を取り除いたものである．$k \geq 1$ なる整数 k に対し，$t \in T$ がマーキング M で k 回発火可能とは，$(\forall p \in {}^{\bullet}t)\ M(p) \geq k \cdot W(p,t)$ が成り立つことである．このときに，$k' \leq k$ なる任意の整数 k' に対して，t の k' 回発火とは，$(\forall p \in {}^{\bullet}t - t^{\bullet})\ M'(p) = M(p) - k'W(p,t)$，$(\forall p \in {}^{\bullet}t \cap t^{\bullet})$ $M'(p) = M(p) - k'W(p,t) + k'W(t,p)$，$(\forall p \in t^{\bullet} - {}^{\bullet}t)$ $M'(p) = M(p) + k'W(t,p)$，且つ $(\forall p \in T - ({}^{\bullet}t \cup t^{\bullet}))$ $M'(p) = M(p)$ なるマーキング M' を構成することである．$M[t>$ は，トランジション t がマーキング M で 1 回発火可能であることを示す．$M[t>= M'$ は，トランジション t がマーキング M で 1 回発火したときマーキングが M' に変わることを示す．以下，1 回の発火は単に発火と言うことにする．マーキング M と二つのトランジション t, t' に対して，$M[t>$ 且つ $M[t>= M'$ なる M' に対して，$M'[t'>$ のとき系列 tt' を M から発火可能であるという．このとき $M[tt'>$ と表す．また，$M'[t'>= M''$ とするとき，$M[tt'>= M''$ とも表現する．一般に $\delta = t_1 \ldots t_s$ $(s \geq 1)$ なるトランジションの系列に対して，$M[\delta>$ 及び $M[\delta>= M'$ なる表現を用いる．また，M' は M から到達可能であるという．

ペトリネットの持つ性質として，以下に示すものがある．ペトリネット PTN，マーキング M が与えられたとする．

定義 2 [12] $p \in P$ が bounded であるとは，初期マーキング M から到達可能な任意のマーキング M' において，ある自然数 n が存在して，$M'(p) \leq n$ のとき及びそのときのみとする．ネット内のすべてのプレースが bounded であるとき及びそのときのみ，そのネットは bounded であるという．

定義 3 ペトリネット PTN=(P,T,A,W) の，バンドル (bundle) は，入口プレース集合 P'_{in}，出口プレース集合 P'_{out}，内部ネット $PTN' = (P', T', A', W')$ からなり，以下のように定義される．(図 1を参照)．

(1) $P' \subseteq P$

(2) $T' \subseteq T$
(3) $A' \subseteq A \cap (P' \times T' \cup T' \times P')$
(4) $(\forall a \in A')\ W'(a) = W(a)$
(5) $P'_{in} \cup P'_{out} \subseteq P \backslash P'$, $P'^{\bullet}_{in} \cup {}^{\bullet}P'_{out} \subseteq T'$
(6) $P'_{in} \cap P'_{out} = \emptyset$
(7) ${}^{\bullet}P' \cup P'^{\bullet} \subseteq T'$, ${}^{\bullet}T' \subseteq P' \cup P'_{in}$, $T'^{\bullet} \subseteq P' \cup P'_{out}$
(8) PTN$'$は弱連結であり，且つ以下の (i)–(iii) のパスを持つ：

(i) $\forall p \in P'_{in}$に対して，p からある $q \in P'_{out}$へのパス；
(ii) $\forall q' \in P'_{out}$に対して，ある $p' \in P'_{in}$から q へのパス；
(iii) $\forall r \in P'$に対して，r を通るようなある $p'' \in P'_{in}$からある $q \in P'_{out}$ へのパス．

ペトリネット PTN のバンドルを $\{PTN : PTN', P'_{in}, P'_{out}\}$ と表す．但し，PTN を固定して議論するときには単に $\{PTN', P'_{in}, P'_{out}\}$ と表すことにする．$t \in T\backslash T', t' \in T'$なる任意の対 $\{t, t'\}$ に対して，バンドルの定義から，${}^{\bullet}t \cap {}^{\bullet}t' = \emptyset$である．このことから，以下の性質が成り立つことを容易に示すことができる．

性質 1 t,t$'$を $t \in T\backslash T'$, $t' \in T'$なる任意の対とする．このとき M[t>かつ，M[t$'$>なる任意のマーキング M に対して，M[t$'$t>かつ M[tt$'$>である．

一般に M[t>且つ M[t$'$>ならば，M[tt$'$>且つ M[t$'$t>なるトランジション対 t,t$'$をパーシステント対と呼び，ペトリネットの任意のトランジション対がパーシステント対のとき，パーシステントネットと呼ぶ．性質 1 は，「$t \in T\backslash T', t' \in T'$なるトランジション対 t,t$'$はパーシステント対である」ことを示している．

本研究で扱うペトリネットは，特に断らない限り各枝の重みが 1 のものとする．このため，枝重み関数は省略する．

3 ペトリネットの縮小変形

ペトリネットの縮小変形を考える．その際に必要なキットの定義をバンドルを用いて与える．そして発火系列の存在性及びネットの boundedness について，ある制限下では，これらがキットによる縮小変形の前後で保存されることを示す．次に，バンドルの入口プレース集合 P'_{in}，出口プレース集合 P'_{out}が，$|P'_{in}| \leq 2$ 且つ $|P'_{out}| \leq 2$ である極小キット（定義は後述），及び $|P'_{in}| = |P'_{out}| = 3$ なる極小キットを与える．

3.1 縮小変形とそのためのキット

$B_0 = \{PTN : PTN'_0, P'_{in}, P'_{out}\}$ を一つのバンドルとする．但し，$PTN = (P, T, A)$，$PTN'_0 = (P'_0, T'_0, A'_0)$ とする．いま，$PTN'_1 = (P'_1, T'_1, A'_1)$ を適当な一つの弱連結ペトリネット（つまり無向化すると連結であるようなペトリネット）とする．まず PTN から $P'_0 \cup T'_0$をすべて除去したペトリネット $PTN \backslash (P_0 \cup T_0)$ を構成する．ここで，$p \in P'_0, t \in T'_0$の除去とはそれら自身の除去と共に接続するすべての枝も除去するものとする．このとき除去された枝集合を A_{del}と表す．次にこのペトリネットに P'_0, T'_0, A'_0をまず加え，更に定義 3 (8) が成り立つように，P'_{in}から P'_0へ，P'_0から P'_{out}へそれぞれ適当に枝を付加する（すなわち，一つのバンドルを構成する）．ここで付加した枝集合を $A'_{in} \subseteq P'_{in} \times P'_0$及び $A'_{out} \subseteq P'_0 \times P'_{out}$と表す．以上の結果，構成されたペトリネットを $PTN' = (P', T', A')$ と表す．但し，$P' = (P \backslash P'_0) \cup P'_1$，$T' = (T \backslash T'_0) \cup T'_1$，$A' = (A \backslash A_{del}) \cup A'_1 \cup A'_{in} \cup A'_{out}$である．以上の操作によって，$B_0$に着目して，PTN と PTN'_1から PTN$'$を構成することを，(PTN における) PTN'_0と PTN'_1の置き換え，あるいは (PTN において) PTN'_0を PTN'_1に置き換える，ということにし，$PTN' = PTN(PTN'_0; PTN'_1)$ と表記する．$B_1 = \{PTN' : PTN'_1, P'_{in}, P'_{out}\}$ も (PTN$'$の) バンドルである．B_0と B_1を (PTN に関する) 置き換えバンドル対と呼び，$K = \{PTN'_0, PTN'_1, P'_{in}, P'_{out}\}$ と表す．もし，PTN と PTN$'$を明示する必要があるときには，上記で PTN'_0, PTN'_1をそれぞれ $PTN(PTN'_0)$, $PTN'(PTN'_1)$ と書き換える．

定義 4 $K = \{PTN'_0, PTN'_1, P'_{in}, P'_{out}\}$ を PTN に関する置き換えバンドル対とする．K がキットであるとは以下の条件が成立するとき及びそのときのみをいう．ここで $\{i, j\} = \{0, 1\}, i \neq j$なる添字 i, jを用いる．
（条件） 以下の (i)–(iii)：

(i) $M_i^{(2)} = M_i^{(1)}[\delta_i>$且つ $|M_i^{(2)}| \leq |M_i^{(1)}|$；
(ii) $(\forall p \in P'_i)\ M_i^{(1)}(p) = M_i^{(2)}(p) = 0$；
(iii) δ_iは T'_iの要素のみを含む，

を満たす $M_i^{(1)}$と δ_iが存在するならば，次の (iv)–(vii)：

(iv) $M_j^{(2)} = M_0^{(1)}[\delta_j>$且つ $|M_j^{(2)}| \leq |M_j^{(1)}|$；
(v) $(\forall q \in P'_j)\ M_j^{(1)}(q) = M_j^{(2)}(q) = 0$；
(vi) δ_jは T'_jの要素のみを含む；
(vii) $(\forall p' \in P'_{in} \cup P'_{out})\ M_i^{(s)}(p') = M_j^{(s)}(p')\ (s = 1, 2)$,

を満たす $M_j^{(1)}$と δ_jが存在する．K が縮小変形キットであるとは，K がキットであり，且つ $|P'_0| > |P'_1|$ であるときをいう．

(注 1) PTN'_0を PTN'_1に置き換えることは $|P'_0|$ と $|P'_1|$の大小関係には依存しない．しかしながら本稿では，$|P'_0| > |P'_1|$ なる場合を「縮小変形」と名付けて扱っているので，以下では縮小変形キットのみを扱うものとし，これを単にキットと呼ぶことにする．

K がキットのときに，PTN'_0を PTN'_1に置き換えることを「キットを適用する」と表現することもある．またPTN'_0を定義域ネット，PTN'_1を値域ネットと呼ぶ．$|P'_1|$ が極小のとき K を極小キットと呼ぶ．

3.2 キットの適用と性質の保存性

キットの適用前後のペトリネット PTN と PTN'に関して，発火系列の存在性とネットの（一つのバンドルに関して）PTN'_0–bounded が保存されることを示す．

δを一つのマーキング M に対して $M[\delta>$なる PTN の発火系列とする．PTN の一つのバンドル $B_0 = \{PTN'_0, P'_{in}, P'_{out}\}$ に注目したとき，δは一般に次の様に表現できる：

$$\delta = \delta_1\pi_1\delta_2\pi_2\ldots\delta_s\pi_s \ (s \geq 1).$$

ここでδ_1とπ_s以外は空系列でないものとし，各 $i = 1,\ldots,s$ に対してδ_i（それぞれπ_i）は空系列でないならば $T\backslash T'_0$の要素のみ（T'_0の要素のみ）を含むものとする．（もしδが $T\backslash T'_0$の要素のみからなるならば $s=1$ とし，π_1は空系列と考えればよい）．ここで $M_i^{(1)} = M[\delta_1\pi_1\ldots\delta_i>$, $M_i^{(2)} = M[\delta_1\pi_1\ldots\delta_i\pi_i>$ と表す．各 $i = 1,\ldots,s$ について $(\forall p \in P'_0)\ M_i^{(1)}(p) = M_i^{(2)}(p) = 0$ が成り立つとき及びそのときのみδをバンドル B_0の許容発火系列（あるいは簡単に，PTN'_0–発火系列）と呼ぶ．バンドルの許容発火系列について次の命題が成り立つ．

命題 1 $K = \{PTN'_0, PTN'_1, P'_{in}, P'_{out}\}$ を PTN に関するキットとし，$PTN' = PTN(PTN'_0, PTN'_1)$ とする．PTN において $M' = M[\delta>$となる PTN'_0–発火系列が存在するとき，及びそのときのみ，PTN'において $M' = M[\delta'>$となる PTN'_1–発火系列δ'が存在する．

証明 $\delta = \delta_1\pi_1\delta_2\pi_2\ldots\delta_s\pi_s$ $(s \geq 1)$ を $M' = M[\delta>$なる PTN'_0–発火系列とする．このとき，定義 4を各π_iに適用すれば，$M[\delta'>$なる PTN'_1–発火系列$\delta' = \delta_1\pi'_1\delta_2\pi'_2\ldots\delta_s\pi'_s$ が存在する．このとき，各 $i = 1,\ldots,s$ に対して，$M[\delta_1\pi_1\ldots\delta_i> = M[\delta_1\pi'_1\ldots\delta_i>$且つ $M[\delta_1\pi_1\ldots\delta_i\pi_i> = M[\delta_1\pi'_1\ldots\delta_i\pi'_i>$が成り立つので，$M[\delta> = M[\delta'>$である．逆方向の証明も全く同様である． **証明終**

定義 2におけるプレース $p \in P$ の boundedness を若干変更した，PTN'_0–発火系列に関する p の boundedness を定義する．

定義 5 PTN の一つのバンドル $B_0 = \{PTN : PTN'_0, P'_{in}, P'_{out}\}$ と $(\forall p' \in P'_0)\ M(p') = 0$ なる一つの初期マーキング M について，M から PTN'_0–発火系列により到達可能な任意のマーキング M'において，ある自然数 n が存在して，$M'(p) \leq n$ のとき及びそのときのみプレース p は PTN'_0–bounded であるという．ネット内のすべてのプレースが PTN'_0–bounded であるとき及びそのときのみそのネットは PTN'_0–bounded であるという．

$PTN' = PTN(PTN'_0, PTN'_1)$ なる二つのペトリネット PTN, PTN'に関して次の命題が成り立つ。

命題 2 $PTN' = PTN(PTN'_0, PTN'_1)$ とする．このとき，PTN が PTN'_0–bounded であるとき，及びそのときのみ，PTN'が PTN'_1–bounded である．

証明 PTN における $M' = M[\delta>$ なる PTN'_0–発火系列$\delta = \delta_1\pi_1\delta_2\pi_2\ldots\delta_s\pi_s$ $(s \geq 1)$ を考える．命題 1 により $M' = M[\delta'>$なる PTN'_1–発火系列$\delta' = \delta_1\pi'_1\delta_2\pi'_2\ldots\delta_s\pi'_s$ が存在する．各 $i = 1,\ldots,s$ に対して $M_i^{(1)} = M[\delta_1\pi_1\ldots\delta_i>$, $M_i^{(2)} = M[\delta_1\pi_1\ldots\delta_i\pi_i>$, $M_i^{(1)\prime} = M[\delta_1\pi'_1\ldots\delta_i>$, $M_i^{(2)\prime} = M[\delta_1\pi'_1\ldots\delta_i\pi'_i>$とおく．このとき，命題 1 の証明より，$M_i^{(1)} = M_i^{(1)\prime}$且つ $M_i^{(2)} = M_i^{(2)\prime}$である．今，PTN'が unbounded プレース p を持つと仮定してみる．バンドルの定義より，P'_{in}から P'_1に供給されるトークン総数はある有限値 k_{in}以下である．各δ_i中の任意のトランジション t の発火前後では PTN と PTN'におけるマーキングは等しいことから，各プレースの boundedness は t の発火前後では保存されている．従って以下のようなδ'が存在すると仮定できる：あるπ'_iの中に$\pi'_i = \sigma'_{i1}\sigma'_{i2}\sigma'_{i3}$（但し$\sigma'_{i1}$と$\sigma'_{i3}$は空系列かもしれない）なる部分系列$\sigma'_{i2}$（空系列ではない）が存在して，これが$\delta'$の中に繰り返し出現して p が unbounded となっている．このことから $p \in P'_1$であるとしてよい．また，あるπ'_jが存在して，この中にσ'_{i2}が現れる回数には上限が存在しない．しかしながら，このことは $(\forall q \in P'_1)$ $M_i^{(2)\prime}(q) = 0$ であることに矛盾する． **証明終**

3.3 $|\mathbf{P}'_{in}| \leq 2$ 且つ $|\mathbf{P}'_{out}| \leq 2$ なるキット

$|P'_{in}| \leq 2$ 且つ $|P'_{out}| \leq 2$ なるキットの値域ネットでプレースを含まないものを図 2に示す．なお，同図 (4) は (3) の P'_{out1}と (2) の P'_{in1}を同一視して合成されたネットである．以下の命題はバンドルの内部ネットは弱連結であること及び P'_{in}, P'_{out}でのマーキングの対応を見ること，により証明できる．

命題 3 図 2の各ネットは極小キットの値域ネットである．

3.4 （$|\mathbf{P}'_{in}| = 1$ 且つ $|\mathbf{P}'_{out}| = 3$）または（$|\mathbf{P}'_{in}| = 3$ 且つ $|\mathbf{P}'_{out}| = 1$）なるキット

次に，（$|P'_{in}| = 1$ 且つ $|P'_{out}| = 3$）または（$|P'_{in}| = 3$ 且つ $|P'_{out}| = 1$）なるキットを図 3に示す．

これらのネットが当該の極小キットの値域ネットであることは，前節と同様に確かめることが可能である．さらに図 2 (2) の P'_{out}，(3) の P'_{out1}を各々p と考えて，図 2，図 3 の二つのネット中のプレース p を同一視して合成できるネット（$|P'_{in}| \leq 3$ 且つ $|P'_{out}| = 3$ である）についても次の命題が成り立つ．証明は省略する．

命題 4 図 2，図 3に示す任意の二つのネット K_0, K_1のプレース p を同一視して得られるネット K は極小キットの値域ネットである（図 4参照）．

より一般的に次の命題が成立する．

命題 5 図 5に示す 2 つのネットのプレース p を同一視して合成されるネットは $|P'_{in}| = r$ 且つ $|P'_{out}| = s$ なる極小キットの値域ネットである．

4 キットの適用

ペトリネット PTN が与えられたとき，キットの適用可能性を判定し，適用可能ならばそのキットの適用後のネット $PTN' = PTN(PTN'_0, PTN'_1)$ を構成することを，適用可能なキットがなくなるまで反復して，最終的に構成されるネットを出力するアルゴリズム *apply_kit* を以下にまとめておく．簡単のため，ここでは，$|P'_{in}| = |P'_{out}| = 2$ の場合のみを考えているが他の場合でも同様である．なお，アルゴリズムが利用可能なキットの集合が予め与えられているものとする．

アルゴリズム *apply_kit*；
Input：ペトリネット PTN；
Output：キットの適用後のペトリネット $PTN' = PTN(PTN'_0, PTN'_1)$．

Step.1 $P'_{in} \leftarrow \emptyset, P'_{out} \leftarrow \emptyset, P'_{sink} \leftarrow \emptyset, P'_0 \leftarrow \emptyset, T'_0 \leftarrow \emptyset, A'_0 \leftarrow \emptyset$.
Step.2 任意のプレース $p_{in1}, p_{in2} \in P$ を選び，$P'_{in} \leftarrow \{p_{in1}, p_{in2}\}$.
Step.3 手続き *Find_Bundle* を実行する．
Step.4 バンドル $B_0 = \{PTN : PTN'_0, P'_{in}, P'_{out}\}$ が見つからなければ，**Step.7** へ．
Step.5 もし B_0を含むキット $K = \{PTN'_0, PTN'_1, P'_{in}, P'_{out}\}$ があれば $PTN' \leftarrow PTN(PTN'_0, PTN'_1)$ として **Step.7** へ．
Step.6 $P'_{sink} \leftarrow P'_{out}$とし，**Step.3** へ．
Step.7 未選択の $\{p_{in1}, p_{in2}\}$ がなければ終了．あれば，その内の一つを選び直し，$P'_{in} \leftarrow \{p_{in1}, p_{in2}\}, P'_{out} \leftarrow \emptyset, P'_{sink} \leftarrow \emptyset, P'_0 \leftarrow \emptyset, T'_0 \leftarrow \emptyset, A'_0 \leftarrow \emptyset$ とし **Step.3** へ．

アルゴリズム *apply_kit* 内で使用されている，手続き *Find_Bundle* は，以下のようになる．

手続き *Find_Bundle*；
Input：$P'_{in}, P'_{sink}, P'_0, T'_0, A'_0$；
Output：$P'_{out}, P'_0, T'_0, A'_0$.

Step.1 $P'_{sink} \leftarrow P'_{in}$
Step.2 $T'_0 \leftarrow T'_0 \cup P'^{\bullet}_{sink}$
$A'_0 \leftarrow A'_0 \cup ((P'_{sink} \times P'^{\bullet}_{sink}) \cap A)$
Step.3 $P'_{tmp} \leftarrow (P'^{\bullet}_{sink})^{\bullet}$
$A'_0 \leftarrow A'_0 \cup ((P'_{sink} \times P'_{tmp}) \cap A)$
Step.4 $P'_0 \leftarrow P'_0 \cup P'_{tmp}$
$(P = P'_{in} \cup P'_{tmp} \cup P'_0)$ 且つ $(T = T'_0)$ 且つ $(A = A'_0)$ ならば「バンドル無し」として終了．
Step.5 ${}^{\bullet}P'_{tmp} \not\subseteq T'_0$ならば「バンドル無し」として終了．
Step.6 $|P'_{tmp}| = 2$ ならば $P'_{out} \leftarrow P'_{tmp}$とし，$P'_{out}, P'_0, T'_0, A'_0$を出力して終了．
Step.7 $P'_{sink} \leftarrow P'_{tmp}$とし，**Step.2** へ．

ここでアルゴリズムの時間計算量について考察する．与えられたペトリネットから特定の入口プレース集合を持つバンドルを見つける手続き *Find_Bundle* の計算時間は，$O(|P| + |T| + |A|)$ である．アルゴリズム *apply_kit* において，**Step.4** でキットの適用が可能であるかどうか調べている．Step.4 は $O(1)$ で実行されると仮定する．ペトリネットの縮小変形を行うアルゴリズム *apply_kit* では，入口プレース集合の候補となるプレースのすべての組み合わせについて調べるので，キット 1 回の適用でプレース数は 1 以上減少するので，アルゴリズム全体での計算時間は，$O(|P|^3(|P| + |T| + |A|))$ である．

5 まとめ

ペトリネットのいくつかの性質を保存する縮小変形を定義論じた．バンドルを定義導入して，バンドル同士の置き換えを扱った．定義域ネット（置き換え前のバンドル）と値域ネット（置き換え後のバンドル）の対で，置き換え前後である種の等価性保存するものをキットと定義した．本稿で示した結果をまとめておく．

(1) キットの適用による縮小変形の前後で，発火系列の存在性及び boundedness がある制限下では保存されていることを示した．
(2) $|P'_{in}| \leq 2$ 且つ $|P'_{out}| \leq 2$ なる極小キットの値域ネットを示した．
(3) （$|P'_{in}| = 1$ 且つ $|P'_{out}| \leq 3$）または（$|P'_{in}| \leq 3$ 且つ $|P'_{out}| = 1$）なるキットを示し，これらの任意の二つのキットから（$|P'_{in}| = 3$ 且つ $|P'_{out}| = 3$）なる新しい値域ネットが合成できることを示した．
(4) キットの適用を繰り返し行うことによりペトリネットの縮小変形を行っていく $O(|P|^3(|P| + |T| + |A|))$ アルゴリズムを示した．

参考文献

[1] D.Gomm, E.Kindler, B.Peach, and R.Walter. Compositional liveness properties of en-systems. In

M.A.Marsan, editor, *Application and Theory of Petri Nets 1993, Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 691, pp. 262–281. Springer-Verlag, 1993.

[2] E.Teruel and M.Silva. Liveness and home states in equal conflict systems. In M.A.Marsan, editor, *Application and Theory of Petri Nets 1993, Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 691, pp. 415–432. Springer-Verlag, 1993.

[3] G.Berthelot. Transformations and decompositions of nets. In W.Reisig W.Brauer and G.Rozenberg, editors, *Petri Nets: Central Models and Their Properties, Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 254, pp. 359–376. Springer-Verlag, 1987.

[4] G.Berthelot, G.Roucairol, and R.Valk. Reduction of nets and parallel programs. In W.Brauer, editor, *Net Theory and Applications, Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 84, pp. 277–290. Springer-Verlag, 1980.

[5] I.Suzuki and T.Murata. A method for stepwise refinement and abstraction of petri nets. *Journal of Computer and System Sciences*, Vol. 27, pp. 51–76, 1983.

[6] J.Desel. On abstraction of nets. In G.Rozenberg, editor, *Advances in Petri Nets 1991, Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 524, pp. 78–92. Springer-Verlag, 1992.

[7] J.D.Noe. Abstraction of net models. In W.Brauer, editor, *Net Theory and Applications, Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 84, pp. 369–388. Springer-Verlag, 1980.

[8] J.Esparza and M.Silva. Top-down synthesis of live and bounded free choice nets. In G.Rozenberg, editor, *Advances in Petri Nets 1991, Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 524, pp. 118–139. Springer-Verlag, 1992.

[9] K.Barkaoui and M.Minoux. A polynomial-time graph algorithm to decide liveness of some basic classes of bounded petri nets. In K.Jensen, editor, *Applicationand Theory of Petri Nets 1992, Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 616, pp. 62–75. Springer-Verlag, 1992.

[10] K.Muller. Constructable petri nets. *Elektr. Inf. Kybern.*, Vol. 21, pp. 171–199, 1985.

[11] L.Czaja. Making nets abstract and structured. In G.Rozenberg, editor, *Advances in Petri Nets 1985, Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 222, pp. 181–202. Springer-Verlag, 1986.

[12] M.Jantzen and R.Valk. Formal properties of place/transition nets. In W.Brauer, editor, *Net Theory and Applications, Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 84, pp. 165–212. Springer-Verlag, 1980.

[13] P.Kemper and F.Bause. Linear time algorithm to decide liveness and boundedness of free-choice net. In K.Jensen, editor, *Applicationand Theory of Petri Nets 1992, Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 616, pp. 263–278. Springer-Verlag, 1992.

[14] R.Valette. Analysis of petri nets by stepwise refinement. *Journal of Computer and System Sciences*, Vol. 18, pp. 35–46, 1979.

[15] V.M.Savi and X.Xie. Liveness and boundedness analysis for petri nets with event graph modules. In K.Jensen, editor, *Applicationand Theory of Petri Nets 1992, Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 616, pp. 328–347. Springer-Verlag, 1992.

[16] W.Brauer, R.Gold, and W.Volger. A survey of behaviour and equivalence preserving refinements of petri nets. In G.Rozenberg, editor, *Advances in Petri Nets 1990, Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 483, pp. 1–46. Springer-Verlag, 1991.

[17] W.Vogler. Behaviour survey refinements of petri nets. In G.Tinhofer and G.Schmidt, editors, *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 246, pp. 82–93. Springer-Verlag, 1987.

[18] Y.Souissi. On liveness preservation by composition of nets via a set of places. In G.Rozenberg, editor, *Advances in Petri Nets 1991, Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 524, pp. 277–295. Springer-Verlag, 1992.

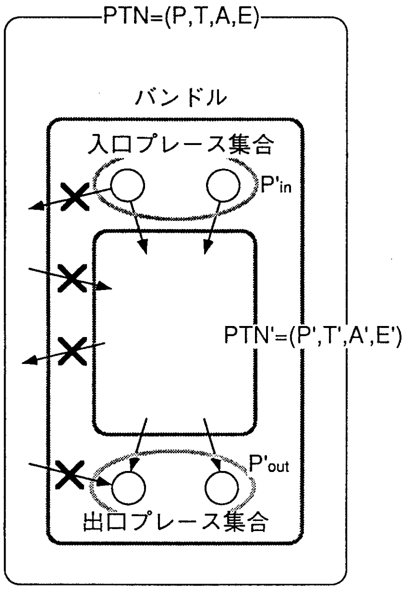

図 1: バンドルの直観的な説明（×印はその枝の存在が禁止されていることを示す.）

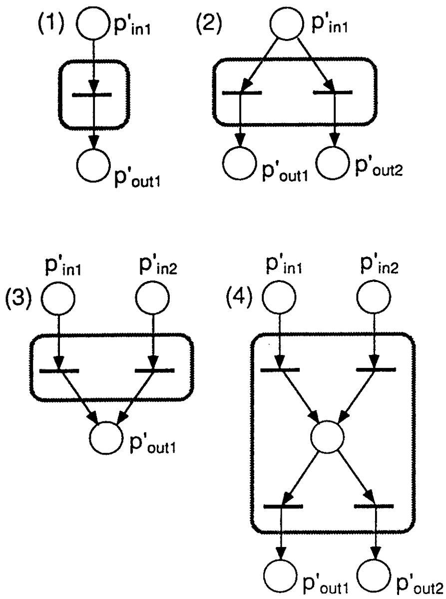

図 2: $|P'_{in}| \le 2$ 且つ $|P'_{out}| \le 2$ なる極小キットの値域ネット

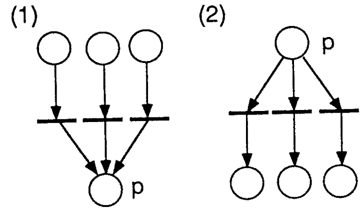

図 3: （$|P'_{in}| = 1$ 且つ $|P'_{out}| = 3$）または（$|P'_{in}| = 3$ 且つ $|P'_{out}| = 1$）なるキットの値域ネット

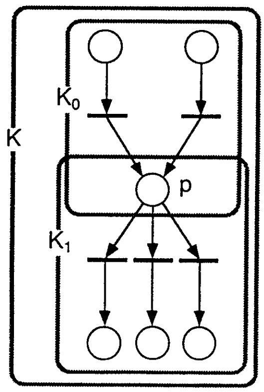

図 4: 図 2(3) と図 3(2) の合成により得られる $|P'_{in}| = 2$ 且つ $|P'_{out}| = 3$ なる極小キットの値域ネット

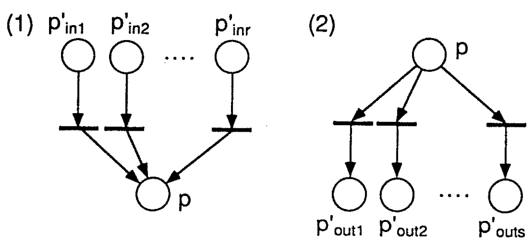

図 5:$|P'_{in}| = r$ 且つ $|P'_{out}| = s$ なる値域ネット