

有効根付木探索のための効率のよいアルゴリズム

柴田望洋* 立野繁之** 松山久義**

福岡工業大学 情報工学科*
九州大学工学部 化学機械工学科**

* 〒811-02 福岡市東区和白東3-30-1

**〒812 福岡市東区箱崎6-10-1

あらまし 化学プラントは、潜在する危険性が大きいいため、異常が発生した際に迅速に原因を突き止めて、適切な対応措置を行わねばならない。化学プラントの異常診断法の1つとして、符号付有向グラフによるモデル化を利用したものが提案され、現在では実用化の段階に入っている。この診断法では、異常の伝播を有効根付木によって表現するが、その探索を行うアルゴリズムは、診断の対象となるシステムの構造や、異常伝播の状態によっては計算速度が低下する場合がある。本研究では、効率よく有効根付木を探索するアルゴリズムを提案し、2つの数学的モデルでその有効性を確認した。

キーワード 異常診断, システム工学, 化学プラント, グラフ理論, 符号付有向グラフ, 有効根付木

An Efficient Algorithm for Searching Consistent Rooted Trees

BohYoh Shibata* Shigeyuki Tateno** Hisayoshi Matsuyama**

Fukuoka Institute of Technology*
(3-30-1 Wajirohigashi, Higashi-ku, Fukuoka, 811-02, JAPAN)

Kyushu University**
(6-10-1 Hakozaki, Higashi-ku, Fukuoka, 812, JAPAN)

Abstract

The detailed techniques for improving the efficiency of a fault diagnosis algorithm can be based on the signed directed graph. This graph represents the structure of the system, and the pattern on the graph represents a state of the system. Shiozaki et al. have presented the formulation of the problem of fault diagnosis by use the concept of a consistent rooted tree. This paper represents a more efficient algorithm that requires less computer time. The usefulness of the improved algorithm is demonstrated using two models.

key words Fault Diagnosis, Systems Engineering, Graph Theory, Consistent Rooted Tree, Signed Directed Graph

1. まえがき

化学プラントの異常発生時におけるオペレータの誤判断・誤操作を防ぐためには、プラントから得られる大量の情報を処理して異常原因の同定を行い、オペレータの判断を支援する異常診断システムが必要である。異常診断システムに要求される品質の重要な要因として、診断精度と診断速度がある。診断精度は、得られる異常原因の候補（以下「候補」）の数として評価できるが、一般に診断速度が速いほど診断精度が低くなる傾向がある。

Iriら¹⁾は、化学プラントの数学的な表現として符号付有向グラフを用いた診断アルゴリズムを提案した。この診断法は、

- ・論理的診断法の一つであり、過去に発生したことのない異常に対しても有効である。
- ・診断に必要なデータが少なく、作成のための労力が大きくない。
- ・診断精度はそれほど高くなく、真の原因以外の候補を出力することが多いが、診断速度は比較的速い。

などの特徴を持つ。異常が伝播する時間の情報を利用する手法、測定値の経時変化に関する情報を利用する手法、それらの複合的な情報を利用する手法、他の診断法と組み合わせる手法などが考案され、診断精度が低いことに関する問題はクリアされており、現在では実用化の段階に入っている。

この診断法では、有効根付木と呼ばれる木構造のモデルによって、異常の伝播を表現する。有効根付木を探索するアルゴリズムは、診断の対象となるシステムの物理的構造や異常の伝播状況に依存する。

本論文では、効率よく有効根付木を探索するアルゴリズムを提案する。

2. 符号付有向グラフを用いた異常診断法

2-1 符号付有向グラフ

プラントの状態変数を点で表し、変数間の因果関係を '+'(助長)または '-'(抑制)の符号を持つ有向枝で表したグラフは、プラント内の因果関係を表現するモデルであり、符号付有向グラフと呼ぶ。

■ 符号付有向グラフの定義

(I) 有向グラフ $G = (N, B, \lambda^+, \lambda^-)$

(a) $N = \{n_1, n_2, \dots, n_p\}$: G 内の点の集合

(b) $B = \{b_1, b_2, \dots, b_q\}$: G 内の枝の集合

(c) $\lambda^+ : B \rightarrow N, \lambda^- : B \rightarrow N$:

各枝の始点と終点を与える接続関数

(II) 写像 $\Psi : \rightarrow \{+, -\}$

からなる複合概念 $S = (G, \Psi)$ である。 □

実際のシステムでは、全ての状態変数が測定されていることは稀である。測定されている変数に対応する符号付有向グラフ上の点を測定点、そうでない点を非測定点と呼び、測定点の集合を M 、非測定点の集合を W と表記する。

プラントから得られる状態変数の値は、高い、正常、低いの3つに分類し、それぞれを '+', '0', '-' の符号で表して測定点に与える。非測定点の符号は分からないので、便宜上 '?' の符号を与えることにする。なお、点 c が符号 's' であることを $c[s]$ と表記する。

符号が '+' または '-' である測定点を有効点と呼び、有効点とその符号の対を有効対と呼ぶ。全ての有効対の集合を有効対集合と呼び、 V^* で表す。

始点の符号と終点の符号の積が、その符号と等しい枝は、異常を伝播していると考えられ、有効枝と呼ぶ。

【例1】

3つのタンクを直列にパイプでつないだシステム（空気が流れるものとし、発熱などの反応は起こらないとする）の符号付有向グラフを Fig.1(a) に示す。 P_i はタンク内圧力、 F_i はパイプ内流量に相当する。

全ての点が測定点であり、 $\{P1[-], F1[-], P2[-], F2[-], P3[0]\}$ という情報が得られたとする。このとき、有効点と有効枝のみを取り出した部分グラフは (b) となる。 □

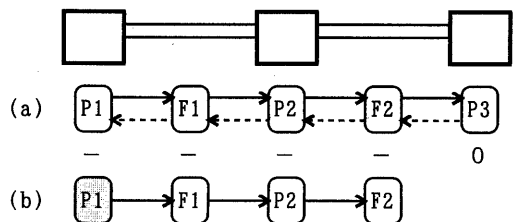


Fig.1 符号付有向グラフと有効点・有効枝

2-2 符号付有向グラフと異常原因

診断の対象となるプラント内で発生する可能性のある異常原因の集合 F は、符号付有向グラフ S 上の点と、その符号の対の全集合 $N \rightarrow \{+, '-'\}$ に写像される。ただし、その要素は、必ずしも F の要素の像とは限らない。 S 上の点とその符号の対の中で、異常の原因に対する F の要素の像となるものの全集合を原因対集合と呼び F^* で表し、その要素を原因対と呼ぶ。

2-3 単一原因の前提とパターン

化学プラントにおいては、独立した異常が同時に発生する確率は極めて低いので、異常の伝播状況を表している可能性のあるものを選ぶ基準として、次の前提条件を導入する。

■ 単一原因の前提

異常の原因はただ一つである。 □

プラントから得られる情報は、測定点の符号のみであるため、不完全な情報から異常診断を行わなければならない。したがって、非測定点に対して適当な符号を与えることによって、不完全な情報を補完する必要がある。そこで以下に示す概念を導入する。

■ パターン、拡張パターンの定義

写像 $\omega^+ : X \rightarrow \{+, '0', '-'\}$, $X \subset N$ を X 上のパターンと呼び、 $N - X$ に任意の符号を加えたもの、すなわち $\omega : N \rightarrow \{+, '0', '-'\}$, $\omega|N = \omega^+$ なるパターン ω をそのパターンに対する拡張パターンと呼ぶ。 □

測定点の符号の組合わせを、特に測定点上のパターンと呼ぶ。

2-4 有効根付木に基づいた異常診断

異常が伝播する経路を、符号付有向グラフ上の初等的な有向道で表現すると、符号付有向グラフ上で異常が伝播している初等的な有向道は、次の定義を満足する有効道でなければならない。

■ 有効道の定義

G の初等的な有向道 μ と、それに含まれる測定点上のパターン Ψ_{μ^+} が与えられたとき、 Ψ_{μ^+} の μ 上の拡張パターンで、 μ の枝を全て有効枝とするパターン Ψ_{μ} が存在すれば、 μ を有効道

と呼び、 Ψ_{μ} をその上のパターンと呼ぶ。 □

【例2】

Fig.1に示した直列配管系において、測定点上のパターンが $\{P1[-], P2[-], P3[-]\}$ であるとする。このとき、 $F1$ および $F2$ に対して、'-' を与えた拡張パターンを考えると、 $P1$ を始点とし、 $P3$ を終点とする有効道が得られる。 □

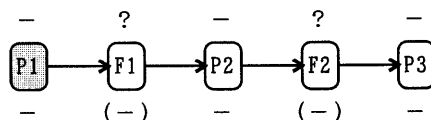


Fig.2 拡張パターンと有効道

システムに単一原因の前提を満足する異常が起こったとき、全ての有効点の符号は、ただ1つの異常原因で説明できるはずである。よって、異常の原因から全ての有効な測定点へ、少なくとも1つの有効道が存在する必要がある。Shiozakiら³⁾は、以下に示す有効根付木の概念を提案している。

【定義】有効根付木の定義

符号付有向グラフ $S=(G, \Psi)$ と測定点上のパターン Ψ^+ が与えられたとき、 G の部分グラフ T と、 T に含まれる測定点上のパターン Ψ_T^+ に対する T 上の拡張パターン Ψ_T で、次の条件を満足するものが存在すれば、 T を Ψ^+ を説明可能な有効根付木と呼び、 Ψ_T をその上のパターンと呼ぶ。

- (1) T は根付木である。
- (2) T は全ての有効点を含む。
- (3) T において出次数が0の点を $n_i (i=1, 2, \dots, k_T)$ とする。
 - (a) $n_i (i=1, 2, \dots, k_T)$ は全て有効な測定点である。
 - (b) T の根 r_T から $n_i (i=1, 2, \dots, k_T)$ への道を $\mu_i (i=1, 2, \dots, k_T)$ 、 μ_i に含まれている点の集合を $N_{\mu_i} (i=1, 2, \dots, k_T)$ とする。このとき、 $(\Psi_T|N_{\mu_i})(i=1, 2, \dots, k_T)$ に対して、 $\mu_i (i=1, 2, \dots, k_T)$ が全て有効道である。 □

あるシステムに異常が起こり、そのシステムの符号付有向グラフとその上の測定点のパターンが与えられたとき、それを説明可能な有効根付木を全て数え上げることによって、その異常状態に対する候補集合を列挙することができる。

すなわち異常診断問題は、有効根付木の概念を用いて次のように定式化される。

【問題1】符号付有向グラフ $S = (G, \Psi)$ 、測定点上のパターン Ψ^* が与えられたとき、そのパターンを説明可能な全ての有効根付木 T と、その上のパターン Ψ_T を求めよ。根に対応する点 r_r と符号 s の対 $r_r[s]$ が異常の原因の候補である。 □

なお、有効根付木の根に対応する点と符号の対を候補対と呼び、その集合を候補対集合と呼び、 C^* と表す。

【例3】

Fig.1に示した直列配管系において、測定点上のパターンが $\{P1[-], P2[-], P3[-]\}$ であるとする。非測定点に対して符号を適当に仮定することによって、3つの有効根付木を得ることができ、候補対集合は $\{P1[-], P2[-], P3[-]\}$ となる。

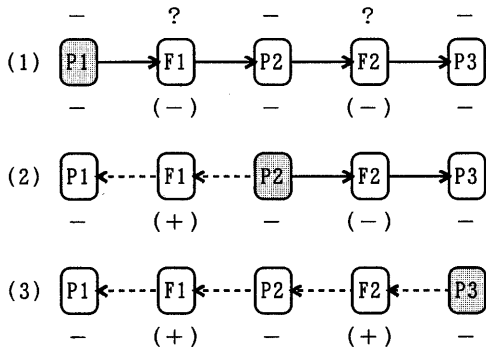


Fig.3 有効根付木の例

2-5 潮崎らのアルゴリズム

異常診断の際に与えられる情報は、測定点上のパターンであるため、不完全な情報から有効根付木探索を行わなければならない。非測定点に符号を与えることによって、欠落した情報を補完した拡張パターンは、非測定点の数を w とすると、 3^w 個にも膨れ上がることになる。

Shiozaki ら³⁾ は、ある枝が有効枝となるかどうかを、仮定することによって、有効根付木を探索するアルゴリズムを提案している。そのアルゴリズムの概略を示す。

Step0

有効点を $v_i (i=1, 2, \dots, k)$ (k は有効な測定点の

数)とし $f=1$ とする。

Step1

v_i から枝の向きとは逆に方向に、次の条件を満足する点 r を重複を許さない方法で探索する。

- (1) r から v_i へ有効道が存在する。
- (2) r は未だ候補として検出されていない。

if (そのような点 r が存在しない)

探索終了。

else

探索中の道上の点の番号を1とする。

r とその符号 s の対 $r[s]$ を候補対と仮定する。

end if

Step2

if ($i > k$)

有効根付木が完成しているので、仮定されている候補対 $r[s]$ を出力して Step1へ。

if (v_r に番号が与えられている)

$f \leftarrow f+1$. Step2へ。

v_r から枝の向きとは反対の方向へ、始点に番号が与えられており、終点が v_r の有効道を重複を許さない方法で探索する。

if (そのような有効道が存在する)

その有効道の始点を除くすべての点に番号 f を与え、 $f \leftarrow f+1$.

Step3

$f \leftarrow f-1$.

if ($f=1$)

Step1へ。

if (v_r に番号が与えられている and

番号 f のついた有効道が変更可能)

$f \leftarrow f+1$. Step2へ。

Step3へ。

このアルゴリズムは、必ずしも効率よく有効根付木を求めるものではない。

3. アルゴリズムの改良

3-1 問題の縮小

候補対は、異常原因の事象に対応する原因対でなければならない。したがって、有効根付木の定義における(1)を、

(1') T は根付木であり、根に対応する点と符

号の対は、 F^* に含まれる。

と変更すると、問題1は、次のように定義することができる。

【問題1'】符号付有向グラフ $S=(G, \Psi)$ 、原因対集合 F^* 、測定点上のパターン Ψ^* が与えられたとき、そのパターンを説明可能な全ての有効根付木 T と、その上のパターン Ψ_T を求めよ。その根に対応する点と符号の対が異常の原因の候補である。 □

有効根付木の列挙によって求められる候補対集合 C^* は、原因対集合 F^* の部分集合となるので、有効根付木列挙問題は、適当な候補対を原因対集合の中から探索する問題であると考えられる。

測定点上のパターンが与えられたとき、以下に示す自明な定理が成立する。

【定理】有効点 n の符号が s であるとき、点 n に逆符号を与えた $n[-s]$ は、候補対とはなり得ない。 □

したがって、原因対集合 F^* は、以下に示す $F^{*'} \rightarrow$ と縮小することができる。

$$F^{*'} = F^* - (M \rightarrow '+' \cup M \rightarrow '-' - V)$$

原因対集合を縮小することによって、候補対の探索範囲が縮まることになり、問題の大きさが縮小される。

3-2 拡張有効道と有効根付木の再構築

ある測定点上のパターン Ψ^* と、それを説明可能な一つの有効根付木 T が与えられたとき、有効根付木上の非測定点に対しては、既に適当な符号が仮定されて与えられている。その拡張パターンを共有する、 Ψ^* を説明可能な別の有効根付木が存在するのであれば、比較的簡単な手続きによって、有効根付木を再構築できる可能性がある。以下に示す拡張有効道の概念を導入する。

■ 拡張有効道の定義

G の初等的な有向道 θ と、それに含まれる有効根付木 T 上の点のパターン Ψ_{θ^T} が与えられたとき、 Ψ_{θ^T} の θ 上の拡張パターンで、 θ の枝を全て有効にするようなパターン Ψ_{θ} が存在すれ

ば、 θ を拡張有効道と呼び、 Ψ_{θ} をその上のパターンと呼ぶ。 □

拡張有効道の概念を導入すると、以下に示す定理が成立する。

【定理】

符号付有向グラフ $S=(G, \Psi)$ 、原因対集合 F^* 、測定点上のパターン Ψ^* に対する有効根付木 T が与えられたとき、任意の点 x (ただし $x \in N$ かつ $x \neq r_T$) を始点として、 r_T を終点とする拡張有効道が存在すれば、 x は、 Ψ^* を説明可能な有効根付木 $T_x (T_x \neq T)$ の根となる。 □

以下、この定理を2つの場合に分けて証明し、それぞれに対して簡単な例を挙げることにする。

(1) 拡張有効道 θ の終点 r_T を除いた全ての点が T に含まれない場合

有効根付木 T に対して θ を結合したグラフは、 x を根とする有効根付木 $T_x (T_x \neq T)$ となる。

[証明]

θ は有効根付木 T の根に入る道であるため、 T と θ を結合したグラフは、 x を根とする根付木となる。この根付木は、有効根付木となるための条件を全て満たすため、 T_x は、 Ψ^* を説明可能な有効根付木となる。

【例4】

Fig.1に示した符号付有向グラフにおいて、測定点の集合が $\{P_2, P_3\}$ であり、Fig.4(a)に示す測定点上のパターンが与えられ、そのパターンを説明可能な有効根付木 T として(a1)が得られたとする。このとき、F1を始点とする拡張有効道、P1を始点とする拡張有効道が存在するので、(b1),(b2)に示す拡張パターンを与えることによって有効根付木が得られる。

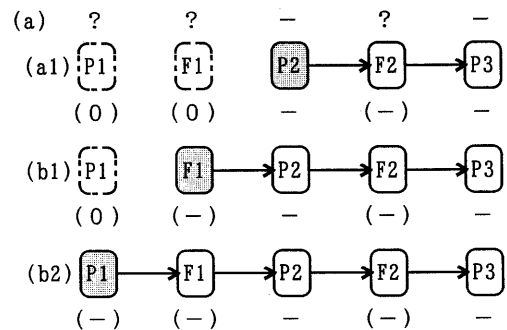


Fig.4 有効根付木と拡張有効道

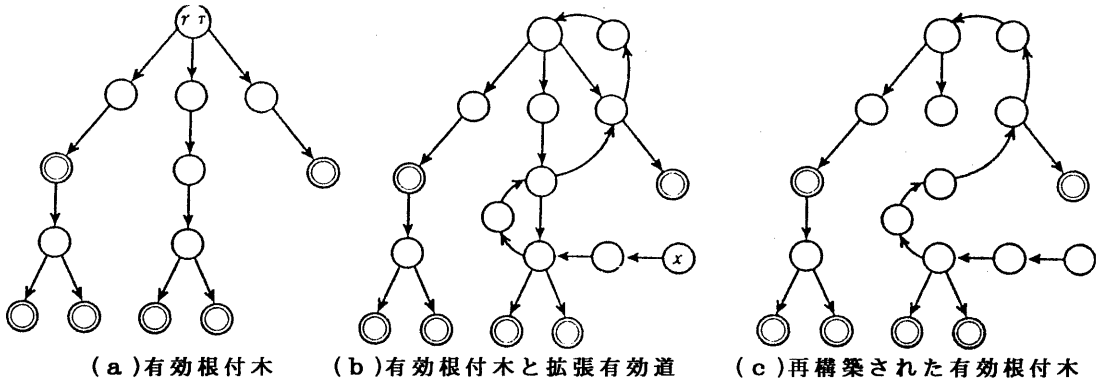


Fig.5 有効根付木の再構築

(2) 拡張有効道 θ 上の点の内、終点 r_T を除く点
が1つでも T に含まれる場合

θ 上の点で T に含まれる点の集合を $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ とする。有効根付木 T に θ を結合させたグラフから、 a_i に入る枝の中で θ に含まれないものを除去すると、 x を根とする有効根付木 T_x ($T_x \neq T$) となる。

【証明】

a_i に入る枝の中で θ に含まれない枝を除去すると、 x を除いた全ての点の入次数は1となり、このグラフは根付木となる。この根付木は、有効根付木となるための他の条件を全て満たすため、 T_x は Ψ^* を説明可能な有効根付木となる。

【例5】

Fig.5(a) に示す有効根付木が得られたとする（簡単のために全ての点と枝の符号を '+' としている）。 x を始点とし r_T を終点とする拡張有効道が存在するのであれば(b)、前述した枝の除去作業によって、 x を根とする有効根付木を再構築することができる(c)。

3-3 拡張有効道の探索

拡張有効道の始点とその符号の対は、候補対となるので、枝の除去などによる再構築の作業は、実際には必要ない。すなわち、有効根付木の根から、有効根付木上のパターン Ψ^* の符号を壊すことなく、枝の向きとは逆向きに遡ることのできる点と符号の対を全て列挙することによって実現できる。

なお、有効根付木と拡張有効道とに関して、以下の自明な定理が成立する。

【定理】 有効根付木 T 上の非測定点 w の符号が s であるとき、点 w に逆符号を与えた $w[-s]$ を始点とする拡張有効道は存在し得ない。□

したがって、拡張有効道の始点なり得る点と符号の対の集合は、以下に示す集合の部分集合となる。

$$F^* - C^* - (W \rightarrow '+' \cup W \rightarrow '-' - \Psi_T)$$

なお、拡張有効道の探索を行うときには、すでに1つ以上の候補対が得られており、 C^* はその集合を表す。

拡張有効道探索による有効根付木再構築は、以下の部分問題として定義される。

【部分問題】 符号付有向グラフ $S = (G, \Psi)$ 、原因対集合 F^* 、測定点上のパターン Ψ^* 、そのパターンを説明可能な1つ有効根付木 T と、その上のパターン Ψ_T 、既に得られた候補対の集合 C^* が与えられたとき、それに対する全ての拡張有効道を求めよ。その始点に対応する点と符号の対は異常の原因の候補となる。□

3-4 有効根付木探索アルゴリズム

改良した有効根付木探索アルゴリズムの概略を以下に示す。

Step0

有効点を v_i ($i=1, 2, \dots, k$) (k は有効な測定点数) とする。

すべての点の番号を0とする。

$$F^* \leftarrow F^* - (M \rightarrow '+' \cup M \rightarrow '-' - V)$$

$$C^* \leftarrow \phi$$

Step1

if ($C^* = F^*$)

探索終了.

v_r から枝の向きとは逆の方向へ、次の条件を満足する原因対 $r[s]$ を重複を許さない方法で探索する.

- (1) r から v_r へ有効道が存在する.
- (2) $r[s]$ は未だ候補として検出されていない.

if (そのような $r[s]$ が存在しない)

探索終了.

else

同じ道を重複して探索しないように、探索中の道上の点の番号を1とする.

$r[s]$ を候補対と仮定する.

end if

Step2

if ($i > k$)

有効根付木が完成しているので、 $r[s]$ を C^* に加えて Step4 へ.

if (v_r に番号が与えられている)

$f \leftarrow f + 1$. Step2 へ.

v_r から枝の向きとは逆の方向へ、始点に番号が与えられており、終点が v_r の有効道を重複を許さない方法で探索する.

if (そのような有効道が存在する)

その有効道の始点を除くすべての点の有効路フラグを f とし、 $f \leftarrow f + 1$ とする.

Step3

$f \leftarrow f - 1$.

if ($f = 1$)

Step2 へ.

if (v_r に番号が与えられている and

番号 f の与えられた有効道の変更が可能)

$f \leftarrow f + 1$. Step2 へ.

Step3 へ.

Step4

次の条件を満足する原因対 $x[s]$ を重複を許さない方法で全て探索し、 C^* に加える.

- (1) x から r へ拡張有効道が存在する.
- (2) $x[s]$ は未だ候補として検出されていない.

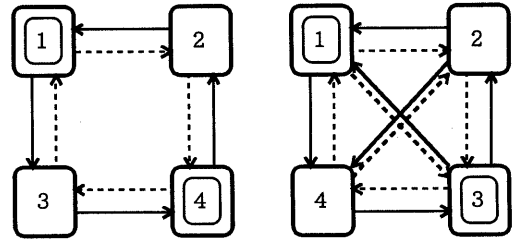
Step1 へ.

4. 有効根付木を利用した2つの診断アルゴリズムの診断速度の比較

本論文で提案したアルゴリズムと、Shiozakiらのアルゴリズムについて、Fig.6に示す2つの数学的な符号付有向グラフに対する診断速度の比較を行った.

Table1に示すのは、(a)管路グラフ、(b)完全グラフに対して、奇数の点に '+' の符号が与えられたときの結果である。診断速度は、有効根付木構築および再構築の過程における「枝を遡る」回数にほぼ比例するので、ここではその回数の比較を行った。いずれの場合においても、計算時間が短くなったことが確認できる。

表中の $c1$ は、診断の結果出力される候補対の数であり、 $c2$ は本法において、有効根付木再構築の過程で求められた候補対の数である。過半数の候補対が、有効根付木再構築によって求められたことが分かる。



(a)

(b)

Fig.6 符号付有向グラフ

Table1 点の数と計算時間

n			c1	c2
6	30	24	9	5
8	58	42	12	7
10	98	68	15	9
12	152	104	18	11

n			c1	c2
4	20	12	6	4
6	145	26	9	6
8	3,524	179	12	8
10	116,819	3,017	15	10
12	9,401,944	148,469	18	12

n = 点の数

c1 = 候補対の数

c2 = 再構築によって求められた候補対の数

5. むすび

本論文で提案した、有効根付木探索のアルゴリズムは、必要とする記憶容量等は従来法と同等であり、計算時間の短縮をはかることができる。

ただし、いくつかの符号付有向グラフに対しては、それほど計算時間の短縮の効果がないこともあった。これは、有効根付木再構築のための探索過程が徒勞に終わる場合があるからである。したがって、グラフの構造、パターン、既に得られている有効根付木などを総合的に評価し、有効根付木の再構築が可能性が低い場合には、再構築のための探索を早期に打ち切るなどの処理を行うことによって、さらなる高速化が望めると思われる。

著者ら⁴⁾は、最大候補集合の概念を導入して、符号付有向グラフを用いた異常診断法の診断精度を厳密に事前評価する手法を提案している。この手法は、組合わせ的に生成する数多くの異常状態に対して、繰返し異常診断を行う必要があり、莫大な計算時間を要する。

効率よく最大候補対集合探索するアルゴリズムの開発なども今後の課題である。

文献

1) Iri M., K.Aoki, E.O'Shima and H.Matsuyama: *A Graphical Approach to the Problem of Locating the Origin of Failure*, *Journal of Operations Research Society of Japan*, Vol.23, No.4, pp.295-311(1980)

2) Tsuge Y., and H.Matsuyama: *Equivalence between the Two Formulations of the Problems of Fault Diagnosis of the Chemical Process*, *Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyushu University*, 44, 3, pp.359-366(1984)

3) Shiozaki J., H.Matsuyama, E.O'Shima and M.Iri, *An Improved algorithm for diagnosis of system failures in the chemical process*, *Computers and Chemical Engineering*, Vol.9, No.3, p.285-293(1985)

4) 柴田望洋, 松山久義: 符号付有向グラフを用いた異常診断システムの診断精度の事前評価 - 最大候補集合による評価 -, *化学工学論文集*, Vol. 15, No. 2, pp. 395-402 (1989)

付録

有効道の探索

有効道および拡張有効道の探索は、*Depth-First-Search* を基本としてし、各枝が有効枝となるように、枝の向きとは逆に遡っていくことに

よって行う。

Fig.7(a)に示す符号付有向グラフと、その測定点上パターン {A[+], C[+]} が与えられたとする。このとき、E[-]を始点としA[+]を終点とする有効道の探索の様子を以下に示す。

- (1)点 A を出発点とする。
- (2)枝 B → A が有効枝となるように遡り、点 B に到達する。このとき、B には '+' の符号を仮定する。
- (3)枝 C → B が有効枝となるように遡ろうと試みるが失敗する。
- (4)枝 D → B が有効枝となるように遡り、点 D に到達する。このとき、D には '+' の符号を仮定する。
- (5)枝 E → D が有効枝となるように遡り、点 E に到達する。このとき、E には '-' の符号を仮定する。

この手続きによって、符号が '-' である点 E を始点とし、A を終点とする有効道の探索が完了する。

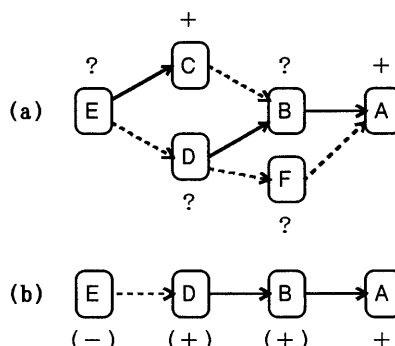


Fig.7 符号付有向グラフと有効道

有効道の変更

任意の点を始点および終点とする有効道としては、必ずしも1つだけが存在するとは限らない。Fig.7(a)において、E[-]を始点とし、A[+]を終点とする有効道は、Fig.8に示す有効道へ変更できる。有効道を求めることによって中断された *Depth-First-Search* を再開することによって、有効道の変更手続きが行える。

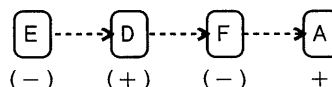


Fig.8 変更された有効道